

Masarykova univerzita
Fakulta sportovních studií

SPORT, MATEMATIKA, POČÍTAČ

Josef Kopřiva

Brno 2011

© 2011, Josef Kopřiva, dědicové

ISBN 978-80-210-4591-0

Recenzenti: RNDr. Pavel Popela Ph.D., Mgr. Martin Sebera, Ph.D.

Editor: Mgr. Martin Sebera, Ph.D.

Vydala Masarykova univerzita Brno v roce 2011

První vydání

Náklad 100 výtisků

Tisk Knihovnicka.cz, Cejl 32, 602 00 Brno

OBSAH

A. Úvod

- A00 Obsah
- A01 Předmluva
- A02 Význam matematiky v tělesné výchově a sportu

B. Statistika

- B01 Aritmetický průměr a směrodatná odchylka
- B02 Statistika párovaných dat
- B03 Průměry, směrodatné odchylky, součinitel korelace, regresní přímka pro párovaná data
- B04 Průměry, směrodatné odchylky, matice korelačních součinitelů
- B05 Klouzavý průměr
- B06 F-test a t-test nepárovaných dat
- B07 t-test párovaných dat
- B08 Analýza variance ANOVA
- B09 Parciální korelace dvou činitelů ze tří
- B10 Parciální korelace dvou činitelů ze čtyř
- B11 Kontingenční tabulka 2×2
- B12 Kontingenční tabulka 2×2 pro malé četnosti (Fischer)
- B13 Kontingenční tabulka $m \times n$
- B14 Korelační součinitel pro kontingenční tabulku
- B15 χ^2 -test jednoduchého výběru
- B16 Kvantily
- B17 Kvantily z průměru a směrodatné odchylky
- B18 Kvantily a směrodatná odchylka
- B19 Vyhodnocení testové baterie procentily a grafem
- B20 Graf procentního rozdělení
- B21 Pravděpodobnostní papír

C. Matematika

- C01 Aproximace empirické funkce
- C02 Lineární regrese funkcí $y = a + b \cdot x$
- C03 Korelační pole, regresní přímka
- C04 Aproximace polynomem 2.stupně $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$
- C05 Aproximace polynomem zvoleného stupně
- C06 Aproximace 16 funkcemi se dvěma parametry $y = f(x,a,b)$
- C07 Aproximace lineární funkcí dvou proměnných $y = f(x,y)$
- C08 Aproximace vývojové křivky sportovní výkonnosti
- C09 Graf funkce
- C10 Graf funkce a její derivace
- C11 Funkce hustoty a Abbottova křivka
- C12 Harmonická analýza empirické křivky
- C13 Rychlá Fourierova transformace (FFT)
- C14 Matice ve sportu
- C15 Numerické řešení diferenciální rovnice II. řádu
- C16 Diferenční rovnice v mechanice

D. Antropometrie, somatometrie

- D01 Relativní hmotnost částí lidského těla
- D02 Těžiště lidského těla, momenty a poloměr setrvačnosti
- D03 Staré antropometrické indexy
- D04 Součinitel tělesného typu (Šolc-Hochman)
- D05 Somatotyp Heathové a Cartera
- D06 Graf somatotypu HC
- D07 Index rozptylu somatotypu SDI
- D08 Procento tuku z kožních řas

E. Fyziologie práce

- E01 Změny srdeční frekvence při změně zatížení
- E02 Laktátový práh
- E03 Síla svalových skupin
- E04 Opakovací maximum
- E05 Výkon člověka a jeho trvání

F. Psychologie, nervová činnost

- F01 Měření reakční doby
- F02 Zkrácení reakční doby
- F03 Měření frekvence ťukání

G. Mechanika

- G01 Parabolická dráha
- G02 Optimální počáteční úhel parabolické dráhy
- G03 Parabolická dráha a měření času
- G04 Dostředivá a odstředivá síla
- G05 Účinek síly při různém časovém průběhu
- G06 Moment setrvačnosti
- G07 Analogie mezi translačním a rotačním pohybem
- G08 Vztah mezi hmotností těla a svalovou silou
- G09 Výdej energie při kolísavé rychlosti

H. Sporty obecně

- H01 Kvalita a četnost sportovního výkonu
- H02 Křivka světových rekordů
- H03 Relativní výkony žen při srovnání s muži
- H04 Charakteristické rovnice vybraných sportovních disciplin
- H05 Ztráta a zisk startem
- H06 Maximální rychlosti v lokomočních sportech
- H07 Zpracování mezičasů
- H08 Kvantitativní kritérium vytrvalosti
- H09 Zlepšování sportovních výsledků
- H10 Dlouhodobé tabulky
- H11 Zdánlivá velikost branek a terčů
- H12 Vyhodnocení intervalového tréninku lokomočních sportech

I. Hry, míče

- I01 Maximální rychlost pádu ve vzduchu
- I02 Pružnost tenisových míčů
- I03 Úspěšnost střelby na koš
- I04 Volný hod v košíkové
- I05 Půdorys hřiště kopané

K. Gymnastika

- K01 Výdej energie, výkon a účinnost při některých cvicích
- K02 Maximální odrazová síla na pružném odrazovém můstku
- K03 Kývání a otáčení tělesa
- K04 Rychlost gymnasty při veletoci na hrazdě
- K05 Síly při veletoci na hrazdě
- K06 Svislé síly při veletoci na hrazdě
- K07 Trvání veletoce na hrazdě

L. Atletika

- L01 Dynamika sprinterského startu
- L02 Vytrvalost sprintera
- L03 Zvedání těžiště při běhu
- L04 Běh v zatáčce
- L05 Výdej energie při běhu
- L06 Fyziologický výkon při běhu různou rychlostí
- L07 Práce a účinnost při běhu
- L08 Skok vysoký a měření času
- L09 Skok o tyči
- L10 Vliv sklonu dopadové plochy při vrzích a hodech

M. Plavání

- M01 Odpor vody a jeho měření vlekem
- M02 Odpor vody a hnací síla
- M03 Výdej energie a výkon při plavání
- M04 Účinnost plavání kolísavou rychlostí
- M05 Startovní skok
- M06 Diferenciální rovnice splývání po startu a obrátce
- M07 Závislost výkonu plavců seniorů na věku
- M08 Hodnocení výkonu plavců seniorů
- M09 Grafy souhry
- M10 Graf vyváženosti disciplin plavce polohového závodu

N. Skoky do vody

- N01 Trvání skoku do vody
- N02 Rychlosti při skocích do vody

O. Cyklistika

- O01 Frekvence šlapání při světových rekordech

P. Lukostřelba

P01 Elementární teorie luku

R. Rychlobruslení

S01 Bodování rychlobruslařských čtyřbojů

Z. Seznam literatury

A. ÚVOD

A01 Předmluva

Většina sportovců patří k typům s dominujícími tělesnými vlastnostmi. Naproti tomu matematika bývá zajímavá jen pro malý počet lidí převážně duševního typu. Averse sportovců vůči matematice je dobře známá. Proto je téma i název knihy určitým způsobem rozpor. Protože však sporty a zejména světové rekordy dosáhly velmi vysoké úrovně, není další zlepšování možné jen praktickými metodami, a ve všech sportech je nezbytný teoretický přístup k problémům sportovní techniky, tréninku i závodů. Roste podíl měření a zpracování údajů, naštěstí jsme v době, kdy vývoj počítačů a jejich dostupnost dovolují a usnadňují použití matematických metod, zejména statistiky.

Starší knihy o matematice ve sportu byly pro tehdejší nedostatek informací z měření, filmování a snímání televizním záznamem věnovány pouze teoretickým úvahám a výpočtům, vzdáleným praxi a skutečnosti. Dnes velké množství informací nejen můžeme, ale i musíme zpracovávat matematickými metodami, které převádí data na ukazatele, umožňující nalézt souvislosti a vztahy, z původních dat nevyplývající.

Tato kniha se snaží ukázat použití matematických metod ve sportu, spojit praxi sportu s matematikou v poměrně větším rozsahu od elementární statistiky až po diferenciální rovnice druhého řádu. Právě ty jsou jedním z nejabstraktnějších nástrojů k popisu sportovní techniky.

Značná část knihy byla iniciována problémy studentů a učitelů tělesné výchovy a proto doufáme, že kniha bude praktičtější a méně akademická, nežli podobné starší i novější knihy o matematice ve sportu, jejichž seznam následuje.

Kniha se snaží ukázat použití matematiky sportovnímu teoretikovi, trenérovi nebo i sportovci, a dát příklady pro vyučování matematiky nebo mechaniky, které by mohly být zajímavější pro žáky a studenty, protože jsou ze sportu.

Programy jsou napsány v QBasicu, protože tento jazyk je volně přístupný, (tzv. freeware), poměrně „malý“ (okolo 325 kB i s nápovědou), dobře vyjadřuje algoritmus úlohy a proto jej lze snadno přeložit do jiných jazyků. Mnohé problémy lze řešit v profesionálních programech jako Excel, Statistica, SPSS, MAPLE, Matlab a pod, které jsou ale většinou drahé nebo nejsou k dispozici, pokud nechceme porušit autorská práva. Navíc neřeší některé speciální požadavky, takže jsou nutné programy, stavěné „na míru“ v programovacích jazycích. Programování je v dnešních systémech (Windows apod.) zanedbáno, protože většina dnešních použití počítačů je zaměřena na zpracování textu a hry.

Doufáme, že kniha poslouží jako sbírka příkladů, jak užívat matematiku ve sportu a programovat jednodušší úlohy.

A02 Význam a použití matematiky v tělesné výchově a sportu

V tělovýchově a sportu bude odborný pracovník, ať teoretik nebo praktik dříve nebo později studovat souvislosti mezi některými jevy nebo veličinami. Nejracionálnějším nástrojem studia souvislostí je matematika. Málokdy se nám podaří popsat nebo vyjádřit nějakou souvislost v praxi jako příčinnou pomocí matematické funkce. Daleko častěji budeme sledovat volné souvislosti pomocí statistických metod.

Jednoduché příčinné souvislosti nacházíme u neživých objektů, a to ještě často za cenu velkého zjednodušení nebo řady předpokladů, které nemusí platit obecně.

U živých objektů souvisí vlastnosti a děje navzájem většinou volně, pravděpodobně, statisticky. Na příklad výkon sportovce závisí na jeho věku, váze, výšce, pohlaví, typu těla, síle, trénovanosti, zkušenostech, motivaci, povaze, počasí, denní době, závodisti, konkurenci a mnoha dalších činitelích, pro každý sport jiných. Každý z uvedených činitelů je opět složitý a má proměnlivý vliv, takže není možné stanovit výkon sportovce jakýmkoliv teoretickým způsobem.

Statistické (volné) souvislosti se objevují tam, kde počet vlivů je velmi velký a účinek jednotlivých vlivů nelze definovat zejména pro složitost procesů v lidském těle a mysli.

Statistika spočívá na zákonech pravděpodobnosti a zákonech velkých čísel. Pravděpodobnost, s jakou se vyskytují různé hodnoty kteréhokoliv údaje je popsána Gaussovou zvonovitou křivkou, zákon velkých čísel říká, že střední hodnota souboru dat je spolehlivější nežli jednotlivé měření, nebo že relativní četnost se dá použít k odhadu neznámé pravděpodobnosti.

Kromě Gaussova normálního rozdělení používáme podobná rozdělení pro vyhodnocení statistických testů: F, t, a χ^2 rozdělení jsou popsána statistickými tabulkami nebo je lze najít jako speciální funkce v nejlepších kalkulátorech (Sharp PC-E500, HP-48/49, CASIO 9970 apod.)

Příkladem použití matematiky ve sportu nebo tělovýchově mohou být

- a) výpočet průměrů případně variačních součinitelů u ročních nebo dlouhodobých tabulek
- b) návrh a výpočet bodovacích tabulek pro víceboje nebo hodnocení výkonů v měřitelných sportech
- c) stanovení korelace mezi různými činiteli nebo parametry za účelem stanovení souvislostí, regresní přímky nebo křivky a výpočet regresních hodnot
- d) aproximace empirických závislostí matematickými funkcemi, které mohou ukázat povahu závislosti a dovolit přibližné prognózy
- e) hodnocení testů různými stupnicemi (t nebo Z body, procentily)
- f) studium složitých souvislostí vícenásobnými korelacemi, analýzou rozptylu (ANOVA), faktorovou nebo shlukovou analýzou
- g) přepočty a zobrazení výsledků tak, aby vynikla názorně některá souvislost nebo vývoj
- h) výpočet ukazatelů, vyjadřujících těžko měřitelné vlastnosti jako vytrvalost, stabilita, přednosti a nedostatky sportovce
- i) pohyby sportovce popsat analyticky nebo kinogramem, který lze vyhodnotit
- j) bateriemi testů studovat soubory vlastností, ukazatelů, nedostatků
- k) ovlivňovat sportovní techniku analýzou biomechanických ukazatelů
- l) ovlivňovat sportovní trénink analýzou fyziologických a psychologických ukazatelů
- m) vyhodnocovat trénink, dávky a intenzitu i odpočinky matematickými a grafickými metodami

a řada dalších.

Dnešní trenér a teoretik má vynikajícího pomocníka v počítači, zejména přenosném (laptop, notebook), bez něhož nelze používat na příklad řadu statistických metod. Počítače jsou dnes nenahraditelnou součástí měřicích přístrojů a dovolují takové typy měření, které dříve nebyly ani známé, ani možné.

Literatura o použití matematiky a počítačů v tělesné výchově a sportu:

1. Brancazio P. J. Sport Science. 1954, New York, Simon and Schster
2. Brodie D. A. - Thornhill J. J.: Microcomputing in Sport and Physical Education. 1983, New York, Sterling Publ.Co.
3. Donnelly Joseph E. (Edit): Using Microcomputers in Physical Education and the Sport Sciences. 1987, Champaign - Illinois, Human Kinetics Publishers Inc.
4. Griffing D. F.: The Dynamics of Sports. 1987, Oxford - Ohio, Dalog Co.
5. Lampe E.: Mathematik und Sport. 1956, Leipzig, B.G.Teubner
6. Sadovskij L. E.- Sadovskij A.L.: Matematika i sport. 1969, FiS, Moskva
7. Townsend M. S.: Mathematics in Sport. 1984, Chichester, Ellis Horwood.
8. Zaciorskij V. M.: Kibernetika, matematika, sport. 1969, FiS, Moskva.

B. STATISTIKA

B01 Aritmetický průměr a směrodatná odchylka

Kvantitativní údaje o nějakých vlastnostech nebo výkonech členů dané skupiny lze vyjádřit čísly. Na příklad tělesná hmotnost, výška, výkon v běhu, počet shybů jsou údaje popisující jednotlivce v takové skupině. Celou skupinu pak charakterizují průměry všech naměřených dat. Aritmetický průměr počítáme vzorcem

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Údajem o tom, jak rozptýleny jsou naměřené hodnoty jest rozptyl čili střední kvadratická odchylka všech hodnot od průměru. Její druhá odmocnina je směrodatná odchylka, kterou počítáme upraveným vzorcem

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{(n-1)}}$$

Aritmetický průměr a směrodatná odchylka jsou charakteristiky souborů při statistických testech, o nichž bude řeč později. Lze je také počítat lepšími vědeckými kalkulátory, zde uvádíme program pro jejich výpočet z čísel, uvedených v řádku DATA.

```
DATA 10,13,12,14,17,18,16
a:
READ x: ON ERROR GOTO b
s = s + x: k = k + x * x
n = n + 1: GOTO a
b:
p = s / n
sx = SQR((k - s * s / n) / (n - 1))
LPRINT „prum,smer.odch,n=“; p, sx, n
END
```

Výsledek:
prum,smer.odch,n= 14.28571 2.870208 7

Pozn.: není-li k dispozici tiskárna, změním příkaz LPRINT v předposledním řádku programu na pouhé PRINT, a výsledky musíme opisovat z obrazovky.

B02 Statistika párovaných dat

Máme-li n párů dat x, y , můžeme potřebovat jejich průměry

$$p_x = \frac{\sum x}{n}$$

$$p_y = \frac{\sum y}{n}$$

a směrodatné odchylky

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{(n-1)}}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}}{(n-1)}}$$

Páry můžeme zakreslit do korelačního pole, a má-li toto pole lineární trend, můžeme počítat pomocí kovariance

$$\text{COV}_{x,y} = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{(n-1)}$$

součinitel korelace r

$$r = \frac{\text{COV}_{x,y}}{s_x s_y}$$

Tento součinitel ukazuje těsnost souvislosti mezi činiteli x, y . Všechny potřebné sumace a výpočty lze provést programem:

```
DATA 76,81,71,85,57,52,49,52,70,70,69,63,26,33,65,83,59,62
```

```
a:
```

```
READ x, y: ON ERROR GOTO b
```

```
sx = sx + x: kx = kx + x * x
```

```
sy = sy + y: ky = ky + y * y
```

```
xy = xy + x * y: n = n + 1: GOTO a
```

```
b:
```

```
px = sx / n: py = sy / n
```

```
s1 = SQR((kx - sx * sx / n) / (n - 1))
```

```
s2 = SQR((ky - sy * sy / n) / (n - 1))
```

```
c = (xy - sx * sy / n) / (n - 1)
```

```
r = c / (s1 * s2)
```

```
LPRINT „px,sx=“; px; „ “; s1
```

```
LPRINT „py,sy=“; py; „ “; s2
```

```
LPRINT „r,n=“; r; „ “; n
```

```
END
```

Příklad: z dat v řádku DATA dostaneme:

```
px,sx = 60,222 15,28707
```

```
py,sy = 64,555 17,24174
```

```
r,n = 0,8877378 9
```

B03 Aritmetické průměry, směrodatné odchyly, součinitel korelace a graf lineární regrese pro párovaná data

Máme-li n párů dat x, y , můžeme potřebovat jejich průměry

$$p_x = \frac{\sum x}{n}$$
$$p_y = \frac{\sum y}{n}$$

a směrodatné odchyly

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{(n-1)}}$$
$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}}{(n-1)}}$$

Páry můžeme zakreslit do korelačního pole, a má-li toto pole lineární trend, můžeme počítat pomocí kovariance

$$\text{cov}_{x,y} = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{(n-1)}$$

součinitel korelace

$$r = \frac{\text{cov}_{x,y}}{s_x s_y}$$

Tento součinitel ukazuje těsnost souvislosti mezi činiteli x, y . Je-li dostatečně blízký jedničce, je vhodné najít regresní přímku $y = a + b \cdot x$, která dovoluje počítat teoretické hodnoty y pro daná x . Součinitele a, b počítáme podle vzorců:

$$b = \frac{\text{cov}_{x,y}}{s_x^2}$$
$$a = p_y - b \cdot p_x$$

Všechny potřebné sumace, výpočty a nakreslení grafu provede následující program:

```
DATA 100,110,120,107,140,115,160,125,180,132,200,138
DATA 220,147,240,152,260,154,280,159,300,165,320,167
DATA 340,173,360,175,380,179,400,182
CLS: INPUT „xmin,xmax=“; x1, x2
INPUT „ymin,ymax=“; y1, y2
CLS: SCREEN 12: KEY OFF
LINE (50, 10)-(50, 300): LINE -(640, 300)
FOR x = x1 TO x2 STEP (x2 - x1) / 10
v = 50 + (x - x1) / (x2 - x1) * 500
LINE (v, 300)-(v, 305)
LOCATE 21, v / 8 - 1: PRINT x;: NEXT x
FOR y = y1 TO y2 STEP (y2 - y1) / 10
s = 300 - (y - y1) / (y2 - y1) * 280
LINE (50, s)-(52, s)
LOCATE s / 14 + 1, 2: PRINT y: NEXT y
p:
READ x, y: ON ERROR GOTO q
CIRCLE (50 + (x - x1) / (x2 - x1) * 500, 300 - (y - y1) / (y2 - y1) * 280), 3
sx = sx + x: kx = kx + x * x: sy = sy + y: ky = ky + y * y
xy = xy + x * y: n = n + 1: GOTO p
q:
p1 = sx / n: p2 = sy / n
s1 = kx - sx * sx / n: s2 = ky - sy * sy / n
c = xy - sx * sy / n: b = c / s1: a = (sy - b * sx) / n
y3 = a + b * x1: y4 = a + b * x2
LINE (50, 300 - (y3 - y1) / (y2 - y1) * 280)-(550, 300 - (y4 - y1) / (y2 - y1)
* 280)
LOCATE 15, 42: PRINT „px,py=“; p1, p2
LOCATE 16, 42: PRINT „sx,sy=“; SQR(s1 / (n - 1)); SQR(s2 / (n - 1))
LOCATE 17, 42: PRINT „a,b=“; a; b
r = c / SQR(s1 * s2): LOCATE 18, 42: PRINT „r=“; r
END
```

B04 Vyhodnocení matice dat výpočtem aritmetických průměrů, směrodatných odchylek, matice korelačních součinitelů a součinitelů mnohonásobné korelace a determinace

Změříme-li u každé z n-osob m-hodnot (výsledky testů, antropometrická data apod.), budou nás zajímat

1. průměry a směrodatné odchylky jednotlivých sloupců (testů)
2. matice korelačních součinitelů mezi všemi možnými dvojicemi sloupců (testů)
3. součinitelé mnohonásobné korelace a determinace každého sloupce (testu) se všemi ostatními.

Následující program počítá všechny tyto ukazatele tím, že

- a) uloží data do matice $n \times m$ (počet osob \times počet testů)
- b) vypočítá aritmetické průměry všech sloupců (testů)
- c) odečte tyto průměry od hodnot příslušných sloupců
- d) vypočítá matici $m \times m$ variancí a kovariancí
- e) z variancí, ležících v diagonále této matice vypočítá směrodatné odchylky, z kovariancí a variancí matici korelačních součinitelů
- f) provede inverzi této matice
- g) z diagonálních prvků původní a invertované matice počítá součinitele mnohonásobné korelace a determinace, ukazující korelaci jednotlivých sloupců se všemi ostatními a podíl vlivu ostatních sloupců (testů) na veličinu, danou sloupcem (testem).

Literatura

9. Sassouri. Communications of Association of Computer Manufacturers (CACM) 1961, č. 3
10. Agejev N. I.: Algoritmy 1-50. Moskva, VC AN SSR, 1966, s. 71-73
11. Jahn W. - Vahle H.: Die Faktorenanalyse und ihre Anwendung. 1970, Verlag Die Wirtschaft, Berlin, str. 41
12. Lohse H. - Ludwig R. - Roehr L.: Statistische Verfahren. 1982, Volk und Wissen, Berlin, str. 208-209.
13. Storm Regina: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. 1976, Fachbuchverlag, Leipzig, str. 244 - 245.

```
DATA 1,1.1,5
DATA 2,1.4,5
DATA 3,1.8,4
DATA 4,1.9,6
DATA 5,2.4,4
DATA 6,2.4,6
DATA 7,3.1,4
DATA 8,3.2,5
DATA 9,3.5,5
DATA 10,3.7,6
PRINT
INPUT „radku,sloupcu „; n, m
DIM x(n, m), p(m), s(m, m), c(m, m), t(m, m), r(m, m)
FOR i = 1 TO n: FOR j = 1 TO m
READ x(i, j): NEXT j: NEXT i
FOR j = 1 TO m: s = 0
FOR i = 1 TO n: s = s + x(i, j)
```

```

NEXT i: p(j) = s / n: NEXT j
FOR j = 1 TO m: FOR i = 1 TO n
x(i, j) = x(i, j) - p(j): NEXT i: NEXT j
FOR j = 1 TO m: FOR k = 1 TO m: FOR i = 1 TO n
s(k, j) = s(k, j) + x(i, k) * x(i, j)
NEXT i: NEXT k: NEXT j
FOR k = 1 TO m: FOR j = 1 TO m
s(k, j) = s(k, j) / (n - 1)
NEXT j: NEXT k: PRINT
PRINT „prumery, smer.odch“
FOR i = 1 TO m
PRINT „i,p,s=„; i, p(i), SQR(s(i, i))
NEXT i: PRINT
PRINT „matice korel.soucinitelu“
FOR i = 1 TO m: FOR j = 1 TO m
r(i, j) = s(i, j) / SQR(s(i, i) * s(j, j))
PRINT TAB(5 * j - 4); USING „#####“; INT(r(i, j) * 1000);
NEXT j: PRINT: NEXT i: PRINT
FOR i = 1 TO m: FOR j = 1 TO m
t(i, j) = s(i, j): NEXT j: NEXT i
FOR i = 1 TO m
IF ABS(s(i, i)) < 1E-09 THEN PRINT „spatne podminena matice“: END
q = 1 / s(i, i): s(i, i) = 1
FOR k = 1 TO m: s(i, k) = s(i, k) * q: NEXT k
FOR j = 1 TO m: IF i = j THEN GOTO a
q = s(j, i): s(j, i) = 0
FOR k = 1 TO m: s(j, k) = s(j, k) - q * s(i, k): NEXT k
a:
NEXT j: NEXT i
PRINT „souc.mnohonas.korelace a determinace“
FOR i = 1 TO m
mk = 1 - 1 / (t(i, i) * s(i, i)): PRINT „mk“; i; „=„; SQR(mk); mk
NEXT i: END

```

Výsledky:

prumery, směr.odch.

```

i,p,s= 1 5.5 3.02765
i,p,s= 2 2.45 .9009255
i,p,s= 3 5 .9164966

```

matice korel. souc.

```

1000 991 224
991 1000 105
224 105 1000

```

souc.mnohonas.korelace a determinace

```

mk 1 = .9991829 .9983666
mk 2 = .9991491 .9982989
mk 3 = .9487171 .9000641

```

B05 Klouzávý průměr

Má-li řada hodnot náhodné kolísání, můžeme ji vyhladit pomocí klouzávého průměru, tj. průměru n sousedních členů řady. Po výpočtu průměru se od součtu odečte první člen, a přičte další člen řady. Tak se přes všechny členy řady posouvá okno, obsahující n členů a pro každou polohu tohoto okna se počítá nový průměr. Následující program provádí tyto operace:

1. sečte prvních n členů řady, součet je s
2. vypočítá průměr $p = s / n$
3. odečte od součtu první člen
4. všechny členy řady přenesse o 1 úroveň níž: index proměnné $x_i = x_{i+1}$
5. k součtu přičte další člen řady
6. vrátí se na bod 2.

```
DATA 10,12,9,10,8,14,14,10,8,12,15,18
INPUT „prumer pro n=„; n: DIM b(n)
s = 0: FOR i = 1 TO n
READ b(i): s = s + b(i): NEXT i
q:
a = s / n: PRINT a;
s = s - b(1): FOR i = 1 TO n - 1
b(i) = b(i + 1): NEXT i
READ b(n): ON ERROR GOTO e
s = s + b(n): GOTO q
e:
PRINT „KONEC“: END
```

```
Klouzávé průměry pro n =
3      4      5      6      7      8      9

10,33 10,25 9,6 10,5 11 10,87 10,55
10,33 9,75 9,6 11,66 11 10,62 10,77
9,- 10,25 11,- 10,83 10,43 10,62 11,11
10,66 11,5 11,2 10,66 10,86 10,37 12,11
12 11,5 10,6 11 11,57 12,37
12,66 11,5 11,6 12,06 13
10,66 11 11,8 12,83
10 11,25 12,6
11,66 13,25
15
```


B06 Statistický test rozdílu aritmetických průměrů dvou nepárovaných souborů

Často potřebujeme zjistit, zda se dva soubory (sportovci-nesportovci, pokusná a kontrolní skupina, apod.) od sebe liší v některém parametru, který lze změřit (tělesná výška, sportovní výkon, fyziologická hodnota apod.) K tomu použijeme tzv. test nepárovaných hodnot.

K provedení tohoto testu se používají aritmetické průměry, směrodatné odchylky a četnosti (počty osob) obou souborů. Nejdříve porovnáme velikosti směrodatných odchylek F-testem. Ten porovnáme s kritickou hodnotou F_{krit} ze statistických tabulek pro četnosti obou souborů a zvolenou hladinu významnosti (v tělovýchově zpravidla $p = 0.05 = 5\%$). Podle výsledku F-testu provedeme pak jeden ze dvou možných t-testů. K vypočítané hodnotě t vložíme kritickou hodnotu t_k rozdělení t ze statistických tabulek pro zvolenou hladinu významnosti a je-li vypočítané t větší nežli kritická hodnota, je rozdíl aritmetických průměrů statisticky významný na zvolené hladině významnosti. Můžeme ještě ověřit, zda je vypočítané t větší nežli t_k pro $p = 1\%$, tedy pro 99 % pravděpodobnost (téměř jistotu) našeho závěru.

```
INPUT „m1,s1,n1=„; m1, s1, n1
INPUT „m2,s2,n2=„; m2, s2, n2
g1 = s1 * SQR(n1 / (n1 - 1)): g2 = s2 * SQR(n2 / (n2 - 1))
F = (g1 / g2) ^ 2
IF F < 1 THEN F = 1 / F
PRINT „F=„; F
INPUT „Fkrit=„; Fc
IF Fc < F THEN GOTO c
t = ABS(m1 - m2) * SQR((n1 + n2 - 2) / (n1 * s1 * s1 + n2 * s2 * s2) /
(1 / n1 + 1 / n2))
PRINT „t,n1,n2=„; t; „ „; n1; „ „; n2
INPUT „tkrit=„; tc: GOTO d
c:
a = s1 * s1 / (n1 - 1)
b = s2 * s2 / (n2 - 1)
t = ABS(m1 - m2) / SQR(a + b)
PRINT „t=„; t
PRINT „n1-1=„; n1 - 1: INPUT „t1=„; t1
PRINT „n2-1=„; n2 - 1: INPUT „t2=„; t2
tk = (t1 * a + t2 * b) / (a + b)
PRINT „tk=„; tk
d:
IF tk > t THEN PRINT „rozdíl není statisticky významný !“: GOTO e
PRINT „rozdíl je statisticky významný!!!“
e:
END
```

Příklad: m1,s1,n1 = 40,2.32,20
 m2,s2,n2 = 38,3.31,18
 F = 2.047516
 Fk = 2.49
 t = 2.115398
 tk = 2.09

B07 Statistický test významnosti rozdílu mezi dvěma párovanými soubory

Změříme-li jedné skupině osob některý parametr dvakrát, např. na začátku a konci daného časového intervalu nebo před působením nějakého vlivu (např. tréninku) a po něm, dostaneme dva soubory dat, kterým říkáme párované, protože ke každé osobě patří dva výsledky měření.

Statistickou významnost rozdílu těchto dvou párovaných souborů posoudíme pomocí testu párovaných dat. V něm počítáme rozdíly mezi dvojicemi, jejich aritmetický průměr p a směrodatnou odchylku s_x a nakonec testovací kritérium

$$t = \text{abs}(p) \cdot \frac{\sqrt{n-1}}{s_x}$$

Hodnotu tohoto kritéria porovnáme s kritickou hodnotou t_k z tabulek rozdělení t pro zvolenou hladinu významnosti p a počet stupňů volnosti $v = n - 1$.

```
DATA .38, .39, .56, .58, .45, .44, .49, .52, .38, .41, .41, .45
DATA .6, .59, .36, .37, .26, .28, .41, .42, .43, .42, .4, .38
```

```
a:
READ x, y: ON ERROR GOTO b
sx = sx + x: kx = kx + x * x
sy = sy + y: ky = ky + y * y
xy = xy + x * y: d = x - y
sd = sd + d: kd = kd + d * d
n = n + 1: GOTO a
b:
mx = sx / n: my = sy / n
s1 = SQR((kx - sx * sx / n) / (n - 1))
s2 = SQR((ky - sy * sy / n) / (n - 1))
c = (xy - sx * sy / n) / (n - 1)
r = c / (s1 * s2)
t = ABS(sd) / SQR((n * kd - sd * sd) / (n - 1))
PRINT
PRINT „mx,sx=„; mx, s1
PRINT „my,sy=„; my, s2
PRINT „r=„; r
PRINT „t,n=„; t, n
END
```

Příklad: z dvojic dat, vepsaných do řádků DATA dostaneme

```
mx,sx = .4275, 9.056643E-02
my,sy = .4375, 8.884319E-02
r = .9775883
t,n = 1.816588, 12
```

Pro počet stupňů volnosti 11 najdeme kritickou hodnotu t_{krit} (2.201) a protože t je menší, není rozdíl statisticky významný na hladině $p=5\%$.

B08 Analýza variance (ANOVA)

Testujeme-li rozdíl mezi dvěma průměry dvou souborů (např. t-testem), předpokládáme účinek změny jediného faktoru na aritmetický průměr závislé proměnné. Pro více nežli dva průměry a více než jeden faktor byl tento test zobecněn FISCHERem, zakladatelem analýzy variance (ANOVA). Jednoduchá analýza variance testuje účinek jednoho faktoru na více průměrů. Následující program může vzít libovolný počet souborů dat, každý s libovolným počtem dat. Program vypočítá průměry všech souborů a kritérium F, které srovnáme s kritickou hodnotou F ze statistických tabulek pro daný pár stupňů volnosti a zvolenou hladinu významnosti p (%).

Literatura:

14. Clauss G.-Ebner H.: Grundlagen der Statistik fuer Psychologen, Pedagogen und Soziologen. Berlin, Volk u. Wissen, 7. vyd., 1983
15. Thomas J. R. - Nelson J. K.: Research Methods in Physical Activity Human Kinetics, Champaign, Illinois, 1990, 2nd. ed., p. 140

```
DATA 9,11,10,12,7,11,12,10,13,11,13,11,10,12,13
DATA 15,16,15,10,13,14,15,7,13,15,15,14,11,15,10
DATA 18,14,17,9,14,17,16,15,16,8,14,10,16,15,17
INPUT „pocet souboru=“; n: DIM b(n), c(n)
FOR i = 1 TO n: PRINT i;
INPUT „pocet prvku=“; b(i)
NEXT i: PRINT
d = 0: e = 0: f = 0
FOR i = 1 TO n: s = 0
FOR j = 1 TO b(i)
READ x
s = s + x: d = d + x * x: e = e + 1
NEXT j: g = g + s
c(i) = s * s: p = s / b(i)
PRINT „p“; i; „=“; p
NEXT i
me = 0
FOR i = 1 TO n
me = me + c(i) / b(i)
NEXT i
me = me - g * g / e
ce = d - g * g / e
uv = ce - me
f = me / (n - 1) / uv * (e - n)
PRINT „F=“; f
PRINT „n1,n2=“; n - 1; e - n
END
```

Příklad: z dat v řádcích DATA dostaneme:

```
pocet souboru=? 3
  1 pocet prvku=? 15
  2 pocet prvku=? 15
  3 pocet prvku=? 15
p 1 = 11
p 2 = 13.2
p 3 = 14.4 F= 7.149618
n1,n2= 2 42
```

V tabulkách najdeme pro n_1, n_2 kritickou hodnotu $F_k = 4,05$ ($p=5\%$). Protože vypočítané F je větší, je rozdíl mezi třemi soubory statisticky významný.

B09 Součinitel parciální korelace mezi dvěma ze tří parametrů

Známe-li všechny tři korelační součinitele mezi třemi parametry téhož souboru, které označíme r_{12} , r_{13} , r_{23} , pak můžeme stanovit částečnou (parciální) korelaci mezi kterýmikoliv dvěma parametry s vyloučením vlivu třetího, tedy za předpokladu, že třetí parametr je konstantní. Vzorce pro parciální korelační součinitele jsou

$$r_{12.3} = \frac{(r_{12} - r_{13} \cdot r_{23})}{\sqrt{(1 - r_{13}^2) \cdot (1 - r_{23}^2)}}$$

$$r_{13.2} = \frac{(r_{13} - r_{12} \cdot r_{23})}{\sqrt{(1 - r_{12}^2) \cdot (1 - r_{23}^2)}}$$

$$r_{23.1} = \frac{(r_{23} - r_{12} \cdot r_{13})}{\sqrt{(1 - r_{12}^2) \cdot (1 - r_{13}^2)}}$$

Příklad: u skupiny dětí byly vypočítány korelační součinitele mezi tělesnou výškou a hmotností $r_{12} = 0,91$
výškou a výkonem ve skoku vysokém $r_{13} = 0,86$
hmotností a výkonem ve skoku vysokém $r_{23} = 0,69$

Korelace mezi hmotností a výkonem ve skoku vysokém je překvapivě vysoká a kladná. Uvědomíme-li si ale, že těžší dítě bývá také vyšší, je zřejmé, že vazbu hmotnost/výkon zprostředkuje tělesná výška, kterou bychom měli vyloučit. Pak parciální korelační součinitel mezi hmotností a výkonem ve skoku vysokém tuto vazbu vylučuje:

$$r_{23.1} = \frac{(0,69 - 0,91 \cdot 0,86)}{\sqrt{(1 - 0,91^2) \cdot (1 - 0,86^2)}} = -0,438$$

Místo původní kladné korelace jsme dostali zápornou parciální korelaci, protože byl vyloučen zprostředkující vliv tělesné výšky. S rostoucí hmotností při stálé tělesné výšce výkon ve skoku vysokém klesá.

Literatura:

16. Jahn W., Wahle H.: Die Faktoranalyse. Die Wirtschaft, Berlin, 1970, str. 36
17. Storm Regina: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. Fachbuchverlag, 1976, str. 242

```
INPUT „r12,r13,r23=„; r12, r13, r23
p12 = (r12 - r13 * r23) / SQR((1 - r13 * r13) * (1 - r23 * r23))
p13 = (r13 - r12 * r23) / SQR((1 - r12 * r12) * (1 - r23 * r23))
p23 = (r23 - r12 * r13) / SQR((1 - r12 * r12) * (1 - r13 * r13))
PRINT „p12,p13,p23=„; p12, p13, p23
END
```

B10 Součinitel parciální korelace mezi dvěma ze čtyř parametrů

Naměříme-li u souboru data o 4 nezávislých proměnných, existuje mezi proměnnými $4 \cdot 3 / 2 = 6$ možných korelací: r_{12} , r_{13} , r_{14} , r_{23} , r_{24} , r_{34} . Součinitele parciální korelace mezi dvojicemi s vyloučením vlivu zbývajících dvou proměnných počítáme pomocí následujících vzorců, např. pro $r_{12.34}$, kde 1, 2 jsou indexy proměnných a 3, 4 jsou indexy konstantních parametrů.:

$$r_{12.3} = \frac{(r_{12} - r_{13} \cdot r_{23})}{\sqrt{(1 - r_{13}^2) \cdot (1 - r_{23}^2)}}$$

$$r_{143} = \frac{(r_{14} - r_{13} \cdot r_{34})}{\sqrt{(1 - r_{13}^2) \cdot (1 - r_{34}^2)}}$$

$$r_{24.3} = \frac{(r_{24} - r_{23} \cdot r_{34})}{\sqrt{(1 - r_{23}^2) \cdot (1 - r_{34}^2)}}$$

Z nich pak hledaný

$$r_{12.34} = \frac{(r_{12.3} - r_{14.3} \cdot r_{24.3})}{\sqrt{(1 - r_{14.3}^2) \cdot (1 - r_{24.3}^2)}}$$

Je nutno poznamenat, že ne všechny možné kombinace součinitelů korelace musí dát reálný výsledek. Při výpočtu podle následujícího programu bude takový případ hlášen jako chyba.

```
input „r12,r13,r14=„;r12,r13,r14
input „r23,r24,r34=„;r23,r24,r34
r123=(r12-r13*r23)/sqr((1-r13*r13)*(1-r23*r23))
r143=(r14-r13*r34)/sqr((1-r13*r13)*(1-r34*r34))
r243=(r24-r23*r34)/sqr((1-r23*r23)*(1-r34*r34))
r12=(r123-r143*r243)/sqr((1-r143*r143)*(r243*r243))
print „r12.34=„;r12
end
```

Příklad: r12=0.8 r13=0.7 r14=0.9 r23=0.7 r24=0.6 r34=0.5 r12.34 = 0.59375

B11 Čtyřpolní tabulka 2x2 a χ^2 -test

Máme-li dvě kvalitativně rozdílné skupiny (např. muži a ženy), u nichž známe dva alternativní kvalitativní znaky (např. plavec-neplavec), můžeme každou osobu zařadit do jedné ze 4 možných kombinací a, b, c, d. Stanovíme-li četnosti těchto kombinací, můžeme je zapsat do tzv. čtyřpolní tabulky 2x2:

	plavci	neplavci
muži	a	b
ženy	c	d

$$s_1 = a + b \quad s_2 = c + d \quad s_3 = a + c \quad s_4 = b + d$$
$$s = s_1 + s_2$$

Pro rozhodnutí, zda je mezi skupinami v alternativním znaku statisticky významný rozdíl potřebujeme vypočítat kritérium

$$\chi^2 = \frac{s \cdot (a \cdot d - b \cdot c)^2}{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4}$$

Je-li toto kritérium větší nežli kritická hodnota χ^2_k ve statistických tabulkách pro četnost $n = 1$ a zvolenou hladinu významnosti (obvykle $p = 5\%$), je rozdíl mezi skupinami statisticky významný. Můžeme použít následující program:

```
data 125,80,89,26
read a,b,c,d
s1=a+b:s2=c+d
s3=a+c:s4=b+d
s=s1+s2
ch=s*(a*d-b*c)^2/(s1*s2*s3*s4)
print „chikv=„;ch
end
```

Příklad:

ve skupině mužů bylo 125 plavců a 80 neplavců, u žen 89 plavkyň a 26 neplavkyň. Vypočítané $\chi^2 = 8,98$ je větší nežli kritická hodnota $\chi^2_k = 3,8$ pro $n = 1$ a hladinu významnosti $p = 5\%$, i pro hladinu $p = 1\%$ ($\chi^2_k = 6,6$). Proto je rozdíl mezi ženami a muži statisticky významný i na hladině 1% (skutečná hladina je $p = 0,276\%$).

B12 Fischerův test pro kontingenční tabulku 2 × 2

Jsou-li četnosti v kontingenční tabulce 2 × 2 nízké, tzn. když $n = a + b + c + d < 20$ nebo kterákoliv četnost je nižší nežli 5, pak musíme použít tzv. Fischerův test, který počítá přímo pravděpodobnost p jako hladinu významnosti:

$$p = \frac{(a + b)! (c + d)! (a + c)! (b + d)!}{n! a! b! c! d!}$$

Výpočet p provedeme následujícím programem a výslednou pravděpodobnost převedeme na procenta a porovnáme se zvolenou hladinou významnosti v %.

Literatura:

18. Clauss G. - Ebner H.: Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pedagogen und Soziologen. 1983, 7 th ed., Volk u. Wissen, Berlin, str. 263 - 267

```
DATA 8,5,4,1
READ a, b, c, d
x = a: GOSUB f1: n = f
x = b: GOSUB f1: n = n * f
x = c: GOSUB f1: n = n * f
x = d: GOSUB f1: n = n * f
x = a + b + c + d: GOSUB f1: n = n * f
x = a + b: GOSUB f1: m = f
x = c + d: GOSUB f1: m = m * f
x = a + c: GOSUB f1: m = m * f
x = b + d: GOSUB f1: m = m * f
p = m / n
PRINT „p=“; p
END
f1:
f = 1
FOR i = 2 TO x
f = f * i
NEXT i
RETURN
```

Příklad: pro data v řádku DATA dostaneme $p = 0,3466$, tedy 34,66 %. Pro hladinu $p = 5$ % je výsledek testu negativní.

B13 Kontingenční tabulka $m \times n$ a χ^2 -test

Máme-li m kvalitativních proměnných x , které mohou nabývat n kvalitativních hodnot y , můžeme zapsat četnosti všech kombinací x, y do kontingenční tabulky $m \times n$

$$\begin{array}{cccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & f_{m3} & f_{mn} \end{array}$$

Chceme-li vědět, zda existuje mezi x, y statisticky významná závislost, vypočítáme kritérium

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{f_{ij} - e_{ij}}{e_{ij}}$$

f_{ij} ... četnosti z kontingenční tabulky

e_{ij} ... četnosti očekávané při rovnoměrném rozdělení

Potřebné výpočty provede následující program. Je-li vypočítané kritérium větší, nežli kritická hodnota rozdělení χ^2 ze statistických tabulek pro $n = (m - 1) \cdot (n - 1)$ a zvolenou hladinu významnosti $p = 5 \%$, pak můžeme prohlásit závislost mezi proměnnými x, y za statisticky významnou.

```
DATA 75,36,31
DATA 27,19,33
DATA 31,62,86
INPUT „řádků,sloupců=„; r, c
DIM m(r, c), o(r, c), a(r), b(c): d = 0: n = 0
FOR i = 1 TO r: FOR j = 1 TO c
READ m(i, j): n = n + m(i, j)
a(i) = a(i) + m(i, j)
NEXT j: NEXT i
FOR j = 1 TO c: FOR i = 1 TO r
b(j) = b(j) + m(i, j)
NEXT i: NEXT j
FOR i = 1 TO r: FOR j = 1 TO c
o(i, j) = a(i) * b(j) / n
d = d + (m(i, j) - o(i, j)) * (m(i, j) - o(i, j)) / o(i, j)
NEXT j: NEXT i
nu = (r - 1) * (c - 1)
PRINT „chiq,n=„; d, nu
c1 = SQR(d / (d + n))
PRINT „kontingenční souč.=„; c1
END
```

Příklad: z dat v řádku DATA dostaneme:

```
chiq,v = 48.2678 4
kontingenční souč.= .3281406
```

Porovnáním s kritickou hodnotou χ^2_k (9,5 pro $p = 5 \%$ nebo 13,3 pro $p = 1 \%$) plyne, že závislost je statisticky významná i na 1 % hladině významnosti.

B14 Korelační součinitel pro kontingenční tabulku

U kontingenční tabulky $m \times n$ vypočítáme kritérium χ^2 , které rozhodne, zda závislost, popsaná tabulkou je statisticky významná. Neurčí ale stupeň závislosti mezi kvalitativními znaky. K tomu použijeme korelační součinitel pro seskupená data, který používá četnosti v kontingenční tabulce k výpočtu míry závislosti

$$r = \frac{n \cdot \sum f \cdot x \cdot y - (\sum f \cdot x) \cdot (\sum f \cdot y)}{\sqrt{[n \cdot \sum f \cdot x^2 - (\sum f \cdot x)^2][n \cdot \sum f \cdot y^2 - (\sum f \cdot y)^2]}}$$

K výpočtu použijeme následujícího programu, do jehož řádků DATA vepíšeme četnosti z kontingenční tabulky.

Literatura:

19. The Essentials of Statistics II, Research and Education Association, New Jersey, 1989, str. 182 - 183

```
DATA 52,17,0
DATA 34,54,9
DATA 2,12,36
DATA 1,7,88
INPUT „ř,s=“; r, s
FOR y = 1 TO r
FOR x = 1 TO s
READ f
sx = sx + f * x: kx = kx + f * x * x
sy = sy + f * y: ky = ky + f * y * y
xy = xy + f * x * y: n = n + f
NEXT x: NEXT y
k = (n * xy - sx * sy) / SQR((n * kx - sx * sx) * (n * ky - sy * sy))
PRINT „r=“; k
END
```

Příklad: pro DATA, vepsaná do programu a ř,s = 4,3 dostaneme: r = 0,7949191

B15 χ^2 -test pro jeden výběr

Máme-li skupinu lidí, kterou rozdělíme podle kvalitativního znaku (pořadí apod.) na m skupin, můžeme v jednotlivých skupinách stanovit četnosti $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$. K rozhodnutí, zda se tyto četnosti liší od očekávaných rovnoměrných $f_e = n / m$, vypočítáme kritérium

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i - f_e)^2}{f_e}$$

Tuto hodnotu vypočítáme následujícím programem a srovnáme s kritickou hodnotou χ^2 pro počet stupňů volnosti $n = n - 1$ a pro zvolenou hladinu významnosti (zpravidla $p = 5\%$). Je-li kritérium větší nežli kritická hodnota, liší se rozdělení od rovnoměrného statisticky významně.

```
data 3,4,9,10,10,6,7,2,2,6
a:
read f:on error goto b
n=n+f:m=m+1:goto a
b:
e=n/m:restore
read f:c=c+(f-e)^2/e
next i
print „chikv,n=„;c,m-1
end
```

Příklad: žebříček tenistek TWA ke dni 8. 5. 1995 obsahoval v první tisícovce tyto četnosti českých tenistek v jednotlivých stovkách:

pořadí	jednotlivci	dvouhra
1-100	3	3
101-200	4	12
201-300	9	7
301-400	10	9
401-500	10	10
501-600	6	10
601-700	7	8
701-800	2	3
801-900	2	4
901-1000	6	0

Vypočítaná kritéria:

pro jednotlivce $X^2 = 14.73$

pro dvouhru $X^2 = 26.93$

Protože kritická hodnota je 18.34, neliší se rozdělení tenistek statisticky významně od rovnoměrného, ve dvojhře však ano.

B16 Kvantily

Někdy potřebujeme rozdělit statistický soubor na určitý počet stejně velkých částí. Na takovém rozdělení je možno na příklad vybudovat klasifikační stupnici sportovní nebo školní.

Je-li soubor dostatečně velký a náhodně vybraný, pak křivka četností jednotlivých znaků (frekvenční křivka) bude podobná Gaussově zvonovité křivce. (Pozn.: reálné soubory obsahují nejmenší a největší znak, proto se křivka četností dotýká svými konci vodorovné osy x na rozdíl od teoretické Gaussovy křivky). Protože plocha pod celou křivkou četností je úměrná počtu všech znaků, je naším úkolem rozdělit tuto plochu na zvolený počet stejných ploch. Hodnoty znaku x , které ukazují polohu dělicích svislých čar jsou tzv. kvantily. Tento obecný název můžeme nahradit názvem, prozrazujícím, na kolik částí daný kvantil dělí celou plochu pod frekvenční křivkou a tedy i celý soubor:

- medián je kvantil, dělicí soubor na dvě stejné poloviny, protože je tak definován.
- tercil je kvantil, určující hodnotu znaku, oddělujícího od celého souboru jednu třetinu.

Protože soubor má třetiny tři, jsou tercily dva - dolní a horní.

- kvartily jsou kvantily, dělicí soubor na čtvrtiny, proto jsou tři a to: dolní, střední (= mediánu) a horní.
- kvintily dělí soubor na pětiny, existují dva dolní a dva horní. Tento kvantil se hodí k návrhu pětistupňové hodnotící stupnice, podobné školní klasifikaci.
- sextily dělí soubor na šestiny, je jich 5, střední se rovná mediánu
- decilů je devět, střední je roven mediánu.
- procentil (percentil) dělí soubor na 100 dílů, střední je roven mediánu.

Obecně platí, že kvantilů sudého jména je lichý počet a střední je roven mediánu. Kvantily lichého jména mají sudý počet a nemají střední kvantil.

Protože najít souřadnice kvantilů na ose x pomocí statistických tabulek nebo vypočítat je není snadné, je v praxi výhodné uvést jejich souřadnice jako násobky směrodatné odchylky. Bez ní není soubor dostatečně popsán, proto ji vždy počítáme známými vzorci nebo vědeckými kalkulátory. Následující tabulka uvádí názvy kvantilů a jejich souřadnice jako násobky směrodatné odchylky:

Příklad: v několika školách byl změřen skok vysoký u hochů ve věku 15 let. Vypočítáno: průměr $p = 125$ cm, směrodatná odchylka $s = 15$ cm. Pro známkování 1 až 5 vypočítáme kvintily:

známka	kvantil	výkon (cm)
5	$p - 0,8416 \cdot s$	horší nežli 112,4
4	$p - 0,2533 \cdot s$	mezi 112,4 a 121,2
3	$p + 0,2533 \cdot s$	mezi 121,2 a 128,8
2	$p + 0,8416 \cdot s$	mezi 128,8 a 137,6
1		lepší nežli 137,6

Graficky můžeme kvantily určit snadno pomocí kumulační křivky zvoleného (zpravidla normálního) rozdělení. Ta je dána také statistickými tabulkami nebo jednoduchými vzorci (polynomy nebo racionálními lomenými funkcemi). Tím se zabývají následující kapitoly.

B17 Kvantily, vypočítané z průměru a směrodatné odchylky

Známe-li aritmetický průměr a směrodatnou odchylku určitého souboru, můžeme volit počet částí, na který bude rozdělen. Kvantily mohou klasifikovat různé výsledky, jestliže průměr je významnější nežli nejlepší hodnota neboli rekord. To je případ školní klasifikace, ne však bodování ve sportu.

Následující program vypočítá všechny kvantily pro daný počet částí.

Literatura:

20. Abramowitz M.-Stegun Irene A.: Handbook of mathematical functions. NBS, 1963, vzorec 26.2.23

```
a = .010328: b = .802853: c = 2.515517
d = .001308: e = .189269: f = 1.432788
INPUT „průměr, smodch “; m, s
INPUT „pocet částí “; n
q = 1 / n: DIM y(n)
FOR i = 1 TO n / 2: p = i * q
t = SQR(LOG(1 / (p * p)))
g = (a * t + b) * t + c
h = ((d * t + e) * t + f) * t + 1
z = t - g / h: x = m - z * s: y(i) = m + z * s
PRINT p * 100; „%“; TAB(12); USING „#####.###“; x
NEXT i
FOR i = INT(n / 2) + 1 TO n - 1
PRINT i * q * 100; „%“; TAB(12); USING „#####.###“; y(n - i)
NEXT i
END
```

Příklad: průměr = 125, směr.odchylka = 15.

Zvolíme-li počet částí n = 5 (kvintily), dostaneme:

část	kvintil
20%	112.378
40%	121.206
60%	128.793
80%	137.621

Ve školní praxi budeme výkon horší nežli 112.4 klasifikovat 5, mezi 112.4 a 121.2 jako 4, mezi 121.2 a 128.8 jako 3, mezi 128.8 a 137.6 jako 2 a lepší nežli 137.6 jako nejlepší 1.

B18 Procentily a směrodatná odchylka

Má-li vzorek normální rozdělení, můžeme počítat procentily z aritmetického průměru a směrodatné odchylky. Pro $m = 0$ a $s_x = 1$ můžeme použít tuto tabulku:

		desítky procentilů									
		1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-99
jednotky procentilů	1	-2.326	-1.227	-0.806	-0.496	-0.227	0.025	0.279	0.553	0.878	1,341
	2	-2.054	-1.175	-0.772	-0.468	-0.202	0.050	0.405	0.583	0.915	1.405
	3	-1.881	-1.126	-0.739	-0.440	-0.176	0.753	0.332	0.613	0.964	1.476
	4	-1.751	-1.080	-0.706	-0.412	-0.151	0.100	0.358	0.643	0.995	1.555
	5	-1.645	-1.036	-0.674	-0.385	-0.125	0,125	0.385	0.674	1.036	1.645
	6	-1.555	-0.995	-0.643	-0.358	-0.100	0.151	0.412	0.706	1.080	1.751
	7	-1.476	-0.954	-0.613	-0.332	-0.075	0.176	0.440	0.739	1.126	1.881
	8	-1.405	-0.915	-0.583	-0.305	-0.050	0.202	0.468	0.772	1.175	2.054
	9	-1.341	-0.878	-0.553	-0.279	-0.025	0.227	0.496	0.806	1.227	2.326
	10	-1.282	-0.842	-0.524	-0.253	0	0.253	0.524	0.841	1.282	-

Jiné kvantily lze počítat pomocí této tabulky. Na příklad kvartily jsou 25., 50. a 75. procentil. Odpovídající hodnoty jsou -0.674, 0 a 0.674. Těmito hodnotami násobíme směrodatnou odchylku a výsledek přičteme k průměru. Pro průměr $m = 120$ a směrodatnou odchylku 10 budou kvartily

- 1. kvartil $120 - 0.674 \times 10 = 113.25$
- 2. kvartil 120
- 3. kvartil $120 + 0.674 \times 10 = 126.74$

B19 Vyhodnocení testové baterie procentily jednotlivců a jejich grafem

K měření základních nebo speciálních vlastností sportovců (rychlosti, síly, vytrvalosti, pohyblivosti apod.) se používají vhodně sestavené testové baterie. Ty se skládají z řady testů, jejichž průměry a směrodatné odchylky lze vypočítat jiným programem (B04). Pak je možné srovnávat výkony jednotlivce s průměry celé skupiny pomocí procentilů, které ukazují, kolik procent členů skupiny je horších nežli tento jedinec. Průměru skupiny při tom odpovídá 50. procentil. Všechny výpočty a kreslení grafů provede následující program.

Po jeho spuštění vložíme počet disciplin, pak názvy disciplin, jejich průměry a směrodatné odchylky a (= ano) jestliže s růstem výsledku roste i jeho hodnota (skoky, vrhy), n (= ne) jestliže je tomu opačně (časy).

Po vložení dat o souboru vkládáme data jednotlivců (pouze členů skupiny!): jméno, data narození, specializace, pak podle názvu disciplíny výsledky jednotlivce. Po vložení všech dat jednotlivce se na obrazovce objeví data o jednotlivci, jeho výkony a odpovídající procentily, nakreslí se sloupkové diagramy procentilů se základem na společné ose 50. procentilu (odpovídajícího průměru).

Zkontrolujeme, zda všechny údaje a grafy jsou v pořádku a vše vytiskneme příkazem (klávesou) PrtSc (Print Screen). Pak můžeme zpracovat další osobu.

```
INPUT „pocet disciplin „; n
DIM t$(n), p(n), s(n), x(n): FOR i = 1 TO n
PRINT i;: INPUT „disciplina,prumer,smer.odch,stoupe a „; t$(i), p(i), s(i),
i$(i)
NEXT i
a:
INPUT „jmeno,naroz,sport „; j$, d$, s$
FOR i = 1 TO n: PRINT t$(i): INPUT „x=„; x(i): NEXT i
CLS: SCREEN 10: KEY OFF
PRINT j$; „ „; d$; „ „; s$
LOCATE 3, 14: PRINT „vykon procentil“
LOCATE 3, 44: PRINT „50%“
FOR i = 1 TO n: GOSUB g
IF i$(i) = „a“ THEN pr = 50 + q ELSE pr = 50 - q
LOCATE i + 3, 1: PRINT t$(i);
LOCATE i + 3, 12: PRINT USING „####.###“; x(i); pr
LINE (275 + pr * 1.5, i * 14 + 40)-(350, i * 14 + 30), , B
NEXT i: SLEEP 50
GOTO a
END
g:
x = (x(i) - p(i)) / s(i)
a = x: s = x: b = -x * x / 2: m = 1
h:
a = a * b / m: c = a / (2 * m + 1)
IF ABS(c) > .000001 THEN LET s = s + c: m = m + 1: GOTO h
q = s * 39.89423: RETURN
```

Příklad: skupina měla průměry a směrodatné odchylky pro
běh 60m 8.1 0.32
skok vys 148 6.4
vrh kouli 11.42 1.21

Pak atlet Novák, naroz. 1975 dostal za běh 7.8 s, skok 153 a vrh kouli 10,96 tyto procentily: 82.575, 78.267, 35.191.

B20 Graf procentního rozdělení

Je-li výkon sportovce určen součtem 3 časů, po sobě následujících (triatlon) nebo 3 čísla pro různé disciplíny, můžeme potřebovat hodnotit nejen celkový součet, ale i procentní rozdělení. Pak použijeme následující program s grafickým výstupem.

```
DATA 250,260,300
DATA 180,300,240
DATA 120,240,190
DIM m(3, 3), n(3, 3)
FOR i = 1 TO 3: FOR j = 1 TO 3
READ m(i, j): NEXT j: NEXT i
FOR i = 1 TO 3: n(i, 1) = m(i, 1): FOR j = 2 TO 3
n(i, j) = n(i, j - 1) + m(i, j)
NEXT j: NEXT i
ma = 0
FOR i = 1 TO 3
IF n(i, 3) > ma THEN LET ma = n(i, 3)
NEXT i
s = 300 / ma
SCREEN 10: CLS: KEY OFF
FOR i = 1 TO 3
FOR j = 1 TO 3
LINE (230, i * 40 - 28)-(230 + s * n(i, j), i * 40 - 4), , B
NEXT j: NEXT i
FOR i = 1 TO 3: FOR j = 1 TO 3
p(i, j) = m(i, j) / n(i, 3) * 100
LOCATE i * 3 - 1, j * 8 - 6: PRINT USING „####.#“; p(i, j)
LOCATE i * 3 - 1, 70: PRINT n(i, 3)
NEXT j: NEXT i
END
```


B21 Pravděpodobnostní papír

Všechny postupy a vzorce statistiky, zejména testy významnosti předpokládají normální rozdělení souboru, tj. podle Gaussovy zvonovité křivky, dané funkcí $y = k \cdot e^{-x^2}$.

Chceme-li ověřit, zda rozdělení výběru odpovídá normálnímu rozdělení, můžeme provést Kolmogorov-Smirnovův test. Jeho grafická verze se dá provést na tzv. pravděpodobnostním papíře, který není u nás vždy k dostání. V dalším textu si popíšeme jeho narýsování.

Pravděpodobnostní papír má vodorovnou osu danou rozsahem ± 6 směrodatných odchylek a průměrnou hodnotou uprostřed. Svislá osa má uprostřed 50 % a sahá zpravidla od 0,02 % do 99,98 %. Do tohoto obdélníku (nebo čtverce) můžeme zakreslit kumulativní křivku Gaussovy křivky jako přímkou metodou, kterou popisuje Reisenauer. Hlavní problém pravděpodobnostního papíru je právě v nelinearitě svislé osy. Následujícím programem můžeme vypočítat souřadnice této nelineární stupnice.

Jak jsme uvedli v úvodu, existují profesionální statistické programy, které nabízejí širokou škálu funkcí a procedur s velmi dobrou možností grafických výstupů. Srovnání základních statistických metod několika vybraných sw (Adstat, Unistat, Statgraphics, Microsoft Excel) předkládají skripta [23].

Literatura:

21. Reisenauer R.: Metody matematické statistiky. Praha, SNTL, 1965, str. 119 (1970, str. 128)
22. Abramowitz M.- Stegun Irene: Handbook of Mathematical Functions, NBS, 1964, vzorec 26.2.23
23. Seberová, H. - Sebera, M. Počítačové zpracování dat II. 1. vyd. Vyškov: VVŠ PV, 1999. 134 s. ISBN 80-7231-052-6.

```
INPUT „delka stup.=“; l: l = l / 1.18
b:
INPUT „proc=“; p: IF p > 50 THEN r = 1 - p / 100: zn = -1: GOTO c
r = p / 100: zn = 1
c:
t = SQR(LOG(1 / (r * r)))
g = (.010328 * t + .802853) * t + 2.515517
h = ((.001308 * t + .189269) * t + 1.432788) * t + 1
z = t - g / h
y = - z * l / 6
PRINT p; using „#####.##“; y* zn
GOTO b
END
```

Příklad: L = 100 mm

proc.	kóta (mm)	proc.	kóta (mm)
0.02	-50		
1	-32.86	60	3.57
10	-18.10	70	7.40
20	-11.88	80	11.88
30	- 7.40	90	18.10
40	- 3.57	99	32.86
50	0	99.98	50.00

C. MATEMATIKA

C01 Aproximace empirických funkcí

Empirická funkce je závislost mezi dvěma proměnnými - jednou nezávislou (x) a druhou závislou (y), která je popsána jen tabulkou dvojic x, y . Takové dvojice získáme zpravidla měřením a můžeme je zpracovat několika metodami:

1. interpretovat v původní číselné formě, což je obtížné a subjektivní,
2. zobrazit jako korelační pole zakreslením jednotlivých dvojic nebo jako graf spojením jednotlivých bodů,
3. závislost mezi daty aproximovat matematickou funkcí vhodného typu:
 - lineární závislostí $y = a + b \cdot x$
 - polynomem stupně n $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \dots + j \cdot x^n$
 - různými funkcemi (mocninnou, exponenciální, logaritmickou, hyperbolickou atd., viz další kapitoly).

Nejčastěji použijeme metodu nejmenších čtverců, která najde parametry aproximační funkce $y = f(x)$ nalezením minima výrazu

$$V = \sum_{i=1}^n [x_i - f(x_i)]^2$$

Řešením této podmínky podle parametrů funkce $f(x)$ dostaneme jejich hodnoty, jak ukážeme v dalších kapitolách. Součinitel korelace dovoluje vybrat aproximační funkci, která nejlépe koreluje s vloženými daty.

C02 Lineární regrese neboli aproximace lineární funkcí $y = a + b \cdot x$

Má-li bodový diagram (korelační pole) závislosti y na x lineární trend, můžeme použít lineární aproximační funkci

$$y = a + b \cdot x$$

Základní podmínkou metody nejmenších čtverců je

$$\sum_1^n (y - (a + b \cdot x))^2 = \text{minimum}$$

kde n je počet bodů nebo dvojic x, y . Algebraickými operacemi a parciální derivací podle a, b dostaneme charakteristické rovnice

$$\begin{aligned} b \cdot \sum x^2 + a \cdot \sum x &= \sum x \cdot y \\ b \cdot \sum x + a \cdot n &= \sum y \end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic můžeme řešit pomocí determinantů a následujícím programem, ke kterému jsou připojeny regresní výpočty.

```
DATA 50,5.61,60,6.46,70,7.3,80,8.13,90,9,100,9.86
a:
READ x, y: ON ERROR GOTO b
sx = sx + x: kx = kx + x * x
sy = sy + y: ky = ky + y * y
xy = xy + x * y: n = n + 1: GOTO a
b:
px = sx / n: py = sy / n
s1 = SQR((kx - sx * sx / n) / (n - 1))
s2 = SQR((ky - sy * sy / n) / (n - 1))
c = (xy - sx * sy / n) / (n - 1)
r = c / (s1 * s2)
b = c / (s1 * s1)
a = py - b * px
PRINT „px,sx=„; px, s1
PRINT „py,sy=„; py, s2
PRINT „a,b,r=„; a, b, r
e:
INPUT „x=„; x
y = a + b * x
PRINT „y=„; y
INPUT „dalsi x? a/n“; d$
IF d$ = „a“ THEN GOTO e

Příklad: mezičasy Carla Lewise
při světovém rekordu na 100 m
za 9,86 sek byly:
L(m)    t(s)
0        0,14
10       1,88
20       2,97
30       3,88
40       4,77
50       5,61
60       6,46
70       7,30
80       8,13
90       9,00
100     9,86

Z bodů 50 - 100 m dostaneme
regresní rovnici
t = 1,36238 + 0,084857.L(m)
r = 0,999974
a = 1,36 je časová ztráta
startem a rozbíháním
END
b = 0,084857 je strmost lin. části
dat a převratná hodnota rychlosti
mezi 50 a 100 m v = 11,4845 m/s.
```

C03 Korelační pole a graf regresní přímky

Naměříme-li nějakou lineární závislost pomocí dvojic dat x, y , můžeme potřebovat

1. zobrazit příslušné korelační pole (bodový graf)
2. proložit body regresní přímku, tj. vypočítat metodou nejmenších čtverců součinitele a, b regresní přímky

$$y = a + b \cdot x$$

3. doplnit výsledky součinitelem korelace, který ukáže těsnost vazby, zatím co regresní součinitel b ukázal strmost této souvislosti.

```
DATA 100,110,120,107,140,115,160,125,180,132,200,138
DATA 220,147,240,152,260,154,280,159,300,165,320,167
DATA 340,173,360,175,380,179,400,182
CLS: INPUT „xmin,xmax=„; x1, x2
INPUT „ymin,ymax=„; y1, y2
CLS: SCREEN 10: KEY OFF
LINE (50, 10)-(50, 300): LINE -(640, 300)
FOR x = x1 TO x2 STEP (x2 - x1) / 10
v = 50 + (x - x1) / (x2 - x1) * 500
LINE (v, 300)-(v, 305)
LOCATE 23, v / 8 - 1: PRINT x;: NEXT x
FOR y = y1 TO y2 STEP (y2 - y1) / 10
s = 300 - (y - y1) / (y2 - y1) * 280
LINE (50, s)-(52, s)
LOCATE s / 14 + 1, 2: PRINT y: NEXT y
p:
READ x, y: ON ERROR GOTO q
CIRCLE (50 + (x - x1) / (x2 - x1) * 500, 300 - (y - y1) / (y2 - y1) * 280), 3
sx = sx + x: kx = kx + x * x: sy = sy + y: ky = ky + y * y
xy = xy + x * y: n = n + 1: GOTO p
q:
s1 = kx - sx * sx / n: s2 = ky - sy * sy / n
c = xy - sx * sy / n: b = c / s1: a = (sy - b * sx) / n
y3 = a + b * x1: y4 = a + b * x2
LINE (50, 300 - (y3 - y1) / (y2 - y1) * 280)-(550, 300 - (y4 - y1) / (y2 - y1)
* 280)
LOCATE 20, 30: PRINT „a,b=„; a; b
r = c / SQR(s1 * s2): LOCATE 21, 30: PRINT „r=„; r
END
```

Příklad: z dat v řádcích DATA dostaneme $a = 83,93382$ (úsek na ose y)
 $b = .2592647$ (strmost regresní přímky)
 $r = .9869513$
 a na obrazovce bude následující graf. Ten vytiskneme klávesou PrtSc.

C04 Aproximace empirické funkce polynomem druhého stupně

Máme-li empirická data o vztahu $y = f(x)$, který je kvadratický, (např. odpor vody nebo vzduchu v závislosti na rychlosti), můžeme použít k aproximaci kvadratický polynom

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

Součinitele a , b , c lze určit metodou nejmenších čtverců, která vychází z podmínky minimalizace výrazu

$$\sum_1^n (y - (a + b \cdot x + c \cdot x^2))^2 = \text{minimum}$$

n ... počet párů dat (x, y)

Algebraickými operacemi a parciální derivací výrazu podle a , b , c dostaneme charakteristické rovnice

$$\begin{aligned} c \cdot \sum x^4 + b \cdot \sum x^3 + a \cdot \sum x^2 &= \sum xy^2 \\ c \cdot \sum x^3 + b \cdot \sum x^2 + a \cdot \sum x &= \sum xy \\ c \cdot \sum x^2 + b \cdot \sum x + a \cdot n &= \sum x \end{aligned}$$

Tyto rovnice vyřešíme pomocí uvedených sumací metodou determinantů následujícím programem, který vypočítá i potřebné sumace.

```
DATA 1,68,2,59.6,3,56.9
s:
READ x, y: ON ERROR GOTO t
d = d + x: k = x * x
e = e + k: f = f + k * x
g = g + k * k: h = h + y
i = i + x * y: j = j + k * y
n = n + 1: GOTO s
t:
l = e - d * d / n
m = i - d * h / n
c = f - d * e / n
p = j - e * h / n
q = g - e * e / n
r = l * q - o * o
a = (p * l - m * o) / r
b = (m * q - p * o) / r
c = (h - b * d - a * e) / n
PRINT "a,b,c="; a; " "; b; " "; c
u:
INPUT "x="; x
y = (a * x + b) * x + c
PRINT "y="; y
INPUT "dalsi y ? a/n"; z$
IF z$ = "a" THEN GOTO u
END
```

Příklad: z dat v řádku DATA dostaneme

a=	2,850031
b=	-16,95013
c=	82,10011

a můžeme počítat regresně.

C05 Aproximace empirické funkce polynomem zvoleného stupně

Má-li empirická funkce složitější průběh, nelze ji uspokojivě aproximovat jednoduchými dvouparametrovými funkcemi ani polynomem druhého stupně. Použijeme-li aproximaci polynomem vyššího stupně, vznikne problém s volbou tohoto stupně. Příliš vysoký stupeň polynomu vede k oscilacím regresních hodnot mezi vloženými body empirické funkce. Proto je nutné vyzkoušet několik stupňů a vybrat regresními výpočty nejlepší.

Při metodě nejmenších čtverců najdeme součinitele polynomu řešením charakteristických rovnic, obsahujících sumace až do x^{2n}

$$\begin{aligned} a \cdot \Sigma x^{2n} + b \cdot \Sigma x^{2n-1} + c \cdot \Sigma x^{2n-2} \dots &= \Sigma x^n \cdot y \\ a \cdot \Sigma x^{2n-1} + b \cdot \Sigma x^{2n-2} + c \cdot \Sigma x^{2n-3} \dots &= \Sigma x^{n-1} \cdot y \\ &\dots \\ a \cdot \Sigma x^n + b \cdot \Sigma x^{n-1} + c \cdot \Sigma x^{n-2} \dots + j \cdot n &= \Sigma y \end{aligned}$$

Následující program provede všechny potřebné sumace, vyřeší charakteristické rovnice podle a, b, c, ... maticovou metodou a nakonec umožní regresní výpočty podle výsledného polynomu.

```
DATA 40,4.79,60,6.48,80,8.18,100,9.92
INPUT „pocet dvojic, stupen polynomu=„; m, n
DIM a(n + 1, n + 2), m(2 * n), p(n)
FOR i = 0 TO n: FOR j = 1 TO m
READ x, y: IF x = 0 THEN x = .000001
m(i) = m(i) + x ^ i: p(i) = p(i) + y * x ^ i: NEXT j
RESTORE: NEXT i: RESTORE
FOR i = n + 1 TO 2 * n: FOR j = 1 TO m
READ x, y: m(i) = m(i) + x ^ i: NEXT j: RESTORE: NEXT i
FOR r = 1 TO n + 1: FOR s = 1 TO n + 1
a(r, s) = m(r + s - 2): NEXT s: NEXT r
FOR r = 1 TO n + 1: a(r, n + 2) = p(r - 1): NEXT r
FOR s = 1 TO n + 1: FOR r = 1 TO n + 1
IF r = s OR a(r, s) = 0 THEN GOTO a
p = a(s, s) / a(r, s)
FOR t = 1 TO n + 2: a(r, t) = p * a(r, t) - a(s, t): NEXT t
a:
NEXT r: NEXT s
FOR r = 1 TO n + 1: a(r, n + 2) = a(r, n + 2) / a(r, r): NEXT r
FOR r = 0 TO n
PRINT „a“; r; „=„; a(r + 1, n + 2): NEXT r
b:
INPUT „x=„; x: p = a(n + 1, n + 2)
FOR i = n TO 1 STEP -1
p = p * x + a(i, n + 2): NEXT i
PRINT „p=„; p
INPUT „dalsi x? a/n“; c$
IF c$ = „a“ THEN GOTO b
END
```

Příklad: data v programu jsou mezičasy C.Lewise na 100m na OH 1988. Zvolíme-li stupeň polynomu a = 3, dostaneme

```
a0 = 1,3199971
a1 = 0,089750244
a2 = 1,0000377E-4
```

$$a_3 = 6,2501783E-7$$

Tato aproximace vyhovuje, protože vrací vložená data a neosciluje mezi nimi. Pro $n = 4$ je výsledná aproximace nevyhovující. a_0 je časová ztráta startem a rozběhem, a_1 je převratná hodnota rychlosti $v=11,142$ m/s, další součinitele polynomu jsou korekční na nerovnoměrnost rychlosti.

C06 Aproximace empirické závislosti 16 funkcemi

Je-li dána empirická závislost dvou veličin řadou dvojic souřadnic x , y nebo křivkou $y = f(x)$, na které lze tyto souřadnice stanovit, může být výhodné nahradit tyto formy dat aproximační funkcí typu

$$y = f(x, a, b)$$

např. funkcí $y = a + b \cdot x$, nebo některou funkcí, kterou lze vhodnou transformací (linearizací) na tuto funkci převést:

$$y = a + b \cdot x^2, y = a + b / x, y = a \cdot x^b \text{ apod.}$$

Následující program zpracuje data ve formě dvojic x , y výpočtem a , b pro 16 funkcí a k tomu součinitelů nelineární korelace, pomocí nichž můžeme vybrat funkci, nejlépe aproximující vstupní data. Přirozeně nemůže dvouparametrová funkce dobře aproximovat složité průběhy, v takovém případě musíme použít aproximaci polynomem, splinem nebo jinou metodou.

Literatura:

24. Kočí V.: Několik programů pro kalkulátor Sharp PC-1211. Elektrotechnický Obzor 75, 1985, č. 5-6, s. 301-310
25. Djakonov V. P.: Spravočnik po algebram i programam na jazyke Bejsik dlja personalnych EVM. 1987, Moskva, Nauka, s. 229

```
DATA 1,1,2,8,3,27,4,64
CLS: DIM m(88): n = 0
za:
z = -4
READ x, y: ON ERROR GOTO v
e = x: f = y: GOTO b
a:
z = z + 5
m(z) = m(z) + x: m(z + 1) = m(z + 1) + y: m(z + 2) = m(z + 2) + x * y
m(z + 3) = m(z + 3) + x * x: m(z + 4) = m(z + 4) + y * y: RETURN
b:
GOSUB a
x = 1 / e: GOSUB a
x = e * e: GOSUB a
x = e: y = 1 / f: GOSUB a
GOSUB a
x = 1 / e: GOSUB a
x = e: y = e / f: GOSUB a
x = e * e: GOSUB a
x = LOG(e): y = LOG(f): GOSUB a
x = e: GOSUB a
GOSUB a
x = 1 / e: GOSUB a
x = e * e: GOSUB a
x = e: y = LOG(f / e): GOSUB a
x = EXP(-e): y = 1 / f: GOSUB a
x = LOG(e): y = f: GOSUB a
n = n + 1: GOTO za
v:
px = m(1) / n: py = m(2) / n
sx = SQR((m(4) - m(1) * m(1) / n) / (n - 1))
```



```

sy = SQR((m(5) - m(2) * m(2) / n) / (n - 1))
PRINT „px,py=„; TAB(12); px; TAB(28); py
PRINT „sx,sy=„; TAB(12); sx; TAB(28); sy
PRINT
z = -4: w = 0
c:
z = z + 5: w = w + 1: IF w > 16 THEN PRINT „KONEC“: END
j = m(z + 3) - m(z) * m(z) / n
k = m(z + 4) - m(z + 1) * m(z + 1) / n
c = m(z + 2) - m(z) * m(z + 1) / n
a = (m(z + 1) - c / j * m(z)) / n
b = c / j: r = c / SQR(j * k)
ON w GOTO 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
1 PRINT „y=a+bx“;: GOTO vy
2 PRINT „y=a+b/x“;: GOTO vy
3 PRINT „y=a+bx^2“;: GOTO vy
4 PRINT „y=1/(a+bx)“;: GOTO vy
5 d = a: a = 1 / b: b = a * d: PRINT „y=a/(b+x)“;: GOTO vy
6 a = 1 / a: b = a * b: PRINT „y=ax/(b+x)“;: GOTO vy
7 PRINT „y=x/(a+bx)“;: GOTO vy
8 PRINT „y=x/(a+bx^2)“;: GOTO vy
9 a = EXP(a): PRINT „y=a*x^b“;: GOTO vy
10 a = EXP(a): b = EXP(b): PRINT „y=a.b^x“;: GOTO vy
11 a = EXP(a): PRINT „y=a.exp(bx)“;: GOTO vy
12 a = EXP(a): PRINT „y=a.exp(b/x)“;: GOTO vy
13 a = EXP(a): PRINT „y=a.exp(bx^2)“;: GOTO vy
14 a = EXP(a): PRINT „y=ax.exp(bx)“;: GOTO vy
15 PRINT „y=1/(a+b.exp(-x))“;: GOTO vy
16 PRINT „y=a+b.ln(x)“;
vy:
PRINT TAB(20); „a,b,r=„; TAB(30); a; TAB(45); b; TAB(60); r
GOTO c
END

```

Příklad: z dat na řádku DATA dostaneme:

px,py = 2,5 25

sx,sy = 1,290994 28,22528

y=a+bx	a,b,r=	-27	20.8	.9513699
y=a+b/x	a,b,r=	58.97438	-65.2308	-.776354
y=a+bx^2	a,b,r=	-6.976744	4.263566	.9905329
y=1/(a+bx)	a,b,r=	1.054687	-.3041088	-.8304403
y=a/(b+x)	a,b,r=	-3.288297	-3.468126	-.8304403
y=ax/(b+x)	a,b,r=	-2.372121	-3.260907	.9767918
y=x/(a+bx)	a,b,r=	1.09375	-.2951389	-.8725318
y=x/(a+bx^2)	a,b,r=	.7441053	-5.17603e-02	-.7772519
y=a.x^b	a,b,r=	1	3	1
y=a.b^x	a,b,r=	.3535533	3.932615	.9801841
y=a.exp(bx)	a,b,r=	.3535533	1.369305	.9801841
y=a.exp(b/x)	a,b,r=	169.6574	-5.280461	-.9835591
y=a.exp(bx^2)	a,b,r=	1.590411	.2559397	.9305829
y=ax.exp(bx)	a,b,r=	.5000002	.9128695	.9801837
y=1/(a+b.exp(-x))	a,b,r=	-.1228715	2.921578	.9762235
y=a+b.ln(x)	a,b,r=	-7.594613	41.02462	.8737795

KONEC

C07 Lineární aproximace funkce dvou nezávislých proměnných $f(x, y)$

Je-li závislost $z = f(x, y)$ popsána alespoň čtyřmi trojicemi x, y, z , můžeme těmito body v prostoru proložit rovinu, jejíž rovnice je $z = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y$. Použijeme-li metodu nejmenších čtverců, musí být splněna podmínka

$$\sum_1^n (z - (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y))^2 = \text{minimum}$$

Umocněním, úpravami a parciální derivací podle a_0, a_1, a_2 dostaneme charakteristické rovnice

$$a_2 \cdot \Sigma y^2 + a_1 \cdot \Sigma xy + a_0 \cdot \Sigma y = \Sigma yz$$

$$a_2 \cdot \Sigma xy + a_1 \cdot \Sigma y + a_0 \cdot \Sigma x = \Sigma xz$$

$$a_2 \cdot \Sigma y + a_1 \cdot \Sigma x + a_0 \cdot n = \Sigma z$$

Tyto rovnice řešíme podle a_0, a_1, a_2 pomocí determinantů, což provede následující program, který připraví potřebné sumace a dovoluje i regresní výpočty.

Literatura:

26. c/s: Slaboproudý Obzor 42, 1981, č. 1, str. 41-42.

27. Storm Regina: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Statistische Qualitätskontrolle. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1976, 6.vyd., str. 236-237

```
DATA 1,3,24,2,8,62,4,6,54,5,12,99
s:
READ x, y, z: ON ERROR GOTO v
sx = sx + x: kx = kx + x * x
sy = sy + y: ky = ky + y * y
sz = sz + z: kz = kz + z * z
xy = xy + x * y: xz = xz + x * z: yz = yz + y * z
n = n + 1: GOTO s
v:
px = sx / n: py = sy / n: pz = sz / n
LPRINT „px,py,pz=„; px, py, pz
s1 = SQR((kx - sx * sx / n) / (n - 1))
s2 = SQR((ky - sy * sy / n) / (n - 1))
s3 = SQR((kz - sz * sz / n) / (n - 1))
LPRINT „sx,sy,sz=„; s1, s2, s3
a = n * kx - sx * sx: d = n * xy - sx * sy
b = n * ky - sy * sy: e = n * xz - sx * sz
c = n * kz - sz * sz: f = n * yz - sy * sz
a2 = (a * f - d * e) / (a * b - d * d)
a1 = (e - a2 * d) / a
a0 = (sz - a1 * sx - a2 * sy) / n
LPRINT „a0,a1,a2=„; a0, a1, a2
r1 = SQR(d * d / (a * b)): r2 = SQR(e * e / (a * c))
r3 = SQR(f * f / (b * c))
LPRINT „rxy,rxz,ryz=„; r1, r2, r3
r:
INPUT „x,y=„; x, y: LPRINT „x,y=„; x, y
z = a0 + a1 * x + a2 * y
LPRINT „z=„; z
GOTO r
LPRINT
END
```

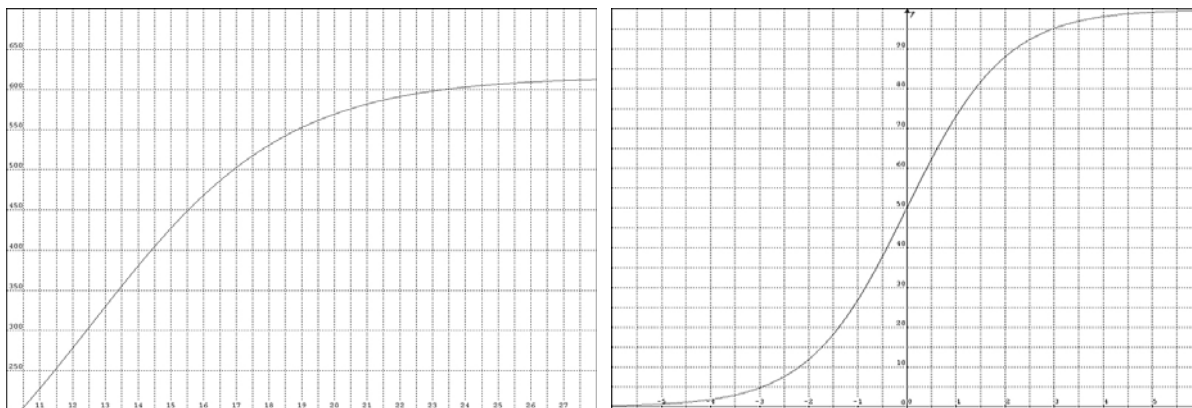
Příklad: z dat v řádku DATA dostaneme:

```
px,py,pz = 3      7.25      59.75
sx,sy,sz = 1.825742  3.774917  30.85855
a0,a1,a2 = 0      3      7
rxy,rxz,xyz = .7738413  .8401411  .9936606
x,y=
```

C08 Aproximace vývojové křivky sportovního výkonu

Vývoj biologických objektů nejlépe popisuje Robertsonův zákon růstu, který je popsán vzorcem $y = \frac{Y_{\max}}{1 + a \cdot e^{-b \cdot x}}$

Křivka, zobrazující tento zákon, má tvar podle obr. 1



Ve sportu musíme rozlišovat vývoj, v němž výsledky rostou (atletické skoky, hody a vrhy, vzpírání, u lokomočních sportů hodinovky a časově omezené výkony), klesají jako časy ve všech lokomočních sportech (běhy, chůze, cyklistika, rychlobruslení, plavání, veslování a vodácké sporty)

U první skupiny můžeme tabulku věk-výkon aproximovat uvedenou funkcí, kdy a , b vypočítáme prvním programem, u druhé skupiny musíme tabulku věk-čas přepočítat na věk-rychlost, provést aproximaci druhým programem, který vypočítá a , b pro závislost

$$t = t_{\max} \cdot (1 + a \cdot e^{-b \cdot \text{věk}})$$

Oba programy pak dovolují regresní výpočty pro zvolený věk.

Literatura:

28. Technický průvodce Matematika, Praha, ČMT, 1944, str. 318
29. Návod k počítači SHARP PC-1500, str. 47

Program 1:

```
Data v1, L1, v2, L2, . . . vn, Ln
input „Lmax=„; k
a:
read v, L: on error goto b
y=log(k/L-1)
e=e+v
f=f+v*v
g=g+y
h=h+y*y: n=n+1
goto a
b:
b=n*f-e*e
a=(f*g-e*h)/b
```

```

b=(n*h-e*g)/b
a=exp(a): b=-b
print „a,b=„;a,b
c:
input „vek“;x
y=k/(1+a*exp(-b*x))
print „výkon=„;y
goto c: end

```

Příklad: S.Bubka se vyvíjel ke světovému rekordu ve skoku o tyči podle této tabulky:

věk	výkon	Zvolíme-li $H_{\max} = 616$ cm, dostaneme programem aproximační funkci
12	270	
14	360	
16	480	$H = 616 / (1 + 69.7286 \cdot \exp(-0.3374459617))$
18	540	
20	572	a regresními výpočty tabulku:
22	600	věk výkon
24	603	12 278
26	600	14 380
28	612	16 460
30	615	18 530
		20 569
		22 591
		24 603
		26 609
		28 612
		30 614

Samozřejmě nemůže tato aproximace brát v úvahu nepravidelnosti vývoje, způsobené onemocněním či zraněním, olympijskými hrami nebo mistrovstvím světa apod.

```

Program 2:
Data  $v_1, t_1, v_2, t_2, \dots, v_n, t_n$ 
input „trat,nejl.čas=„;L,k
w=L/k
a:
read v,t: on error goto b
y=log(w*t/L-1)
e=e+v
f=f+v*v
g=g+y
h=h+y*y: n=n+1
goto a
b:
b=n*f-e*e
a=(f*g-e*h)/b
b=(n*h-e*g)/b
a=exp(a): b=-b
print „a,b=„;a,b
c:
input „věk=„;x
t=k*(1+a*exp(-b*x))
print „čas=„;t
goto c
end

```

Příklad: britský sprinter L.Christie se vyvíjel podle této tabulky:

věk	čas(100m)	rychlost(m/s)
17	10,9	9.174
20	10.73	9.319
22	10.5	9.524
24	10.44	9.5765
26	10.04	9.96
28	9.97	10.03
30	10.02	9.98
33	9.87	10.13

Z těchto dat dá program pro $t_{\max}=9.85$
 $t = 9.85 \cdot (1 + 9.221385 \cdot \exp(-0.232872))$
a tabulku regresních časů:

věk	čas
17	11.58
20	10.71
22	10.39
24	10.19
26	10.06
28	9.98
30	9.93
33	9.89

Regresní výpočty neuvažují nepravidelnost vývoje a dávají hladkou křivku.

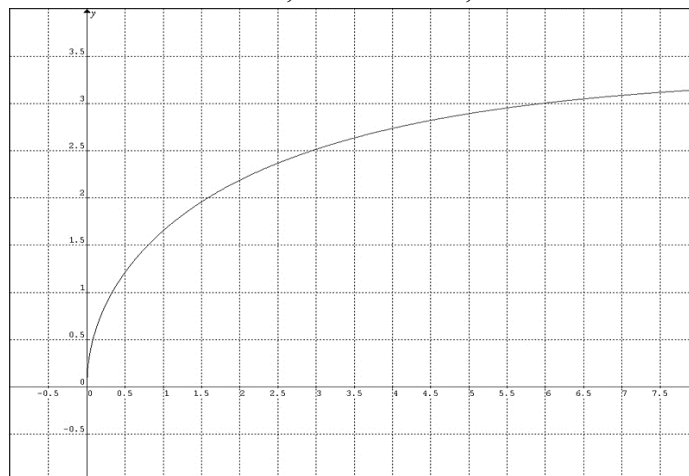
C09 Graf funkce

Známe-li rovnici nějaké křivky $y = f(x)$, můžeme potřebovat pro názornost nakreslit průběh této funkce v určitém intervalu hodnot nezávislé proměnné x . Následující program provede tuto úlohu, vložíme-li za label g rovnici funkce, po spuštění pak vložíme rozsah x , program stanoví rozsah y , který můžeme změnit a nakonec se objeví průběh funkce s popisem rozsahů.

```
INPUT „xmin,xmax=„; x1, x2
y1 = 1000000!: y2 = -1000000!
FOR x = x1 TO x2 STEP (x2 - x1) / 100
GOSUB g: IF y < y1 THEN y1 = y
IF y > y2 THEN y2 = y
NEXT x
PRINT „ymin,ymax=„; y1, y2
INPUT „zmena ymin,ymax ? a/n„; a$: IF a$ <> „a“ THEN GOTO b
INPUT „ymin,ymax=„; y1, y2
b:
SCREEN 10: CLS: KEY OFF
PRINT „xmin,xmax=„; x1, x2
PRINT „ymin,ymax=„; y1, y2
x = x1 / (x1 - x2) * 640
IF x1 * x2 <= 0 THEN LINE (x, 50)-(x, 320)
y = 320 - y1 / (y1 - y2) * 260
IF y1 * y2 <= 0 THEN LINE (0, y)-(640, y)
x = x1: GOSUB g: PSET (x, 320 - (y - y1) / (y2 - y1) * 260)
FOR x = x1 TO x2 STEP (x2 - x1) / 100
GOSUB g
LINE -((x - x1) / (x2 - x1) * 640, 320 - (y - y1) / (y2 - y1) * 260), 12
NEXT x
END
g:
y = SQR(x) / (.0042095 * x + .562045)
RETURN
```

Příklad:

funkci $y = \text{sqr}(x) / (.042095 \cdot x + 0.562045)$, připsanou za label g zobrazí program grafem, který následuje. $y = \frac{\sqrt{x}}{0,042095 \cdot x + 0,562045}$



C10 Graf funkce a její derivace

Máme-li dānu funkci analytickým vřazem $y = f(x)$ a m─li derivace t─to funkce vřznam - derivace dr─hy dle řasu je rychlost, derivace rychlosti podle řasu je zrychlen─ - m─že b─t zajímav─ graf funkce a její derivace. Takov─ graf m─žeme zřskat n─sleduj─c─m programem, kter─ mus─me doplnit za labelem g podprogramem, definuj─c─m funkci ve form─ $y = f(x)$.

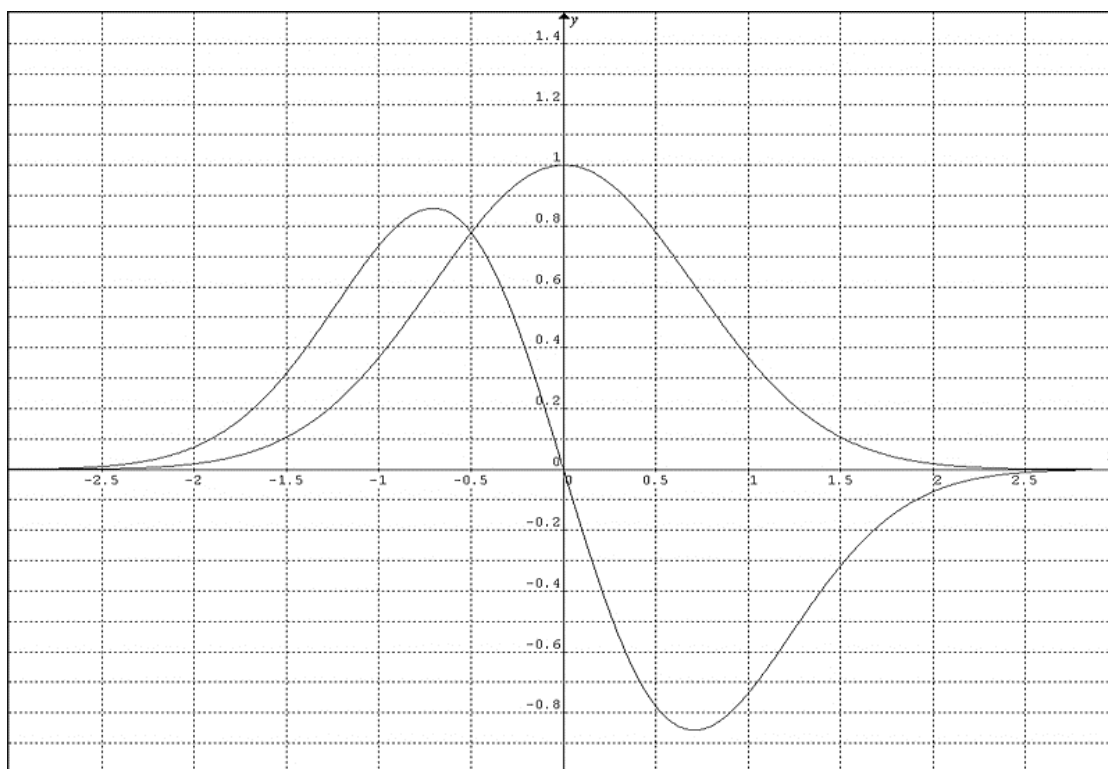
Program vřz─d─ rozsah nezávisle prom─nn─ x, zjist─ rozsah závisle prom─nn─ y a zept─ se, zda tento rozsah chceme zm─nit. Souhlas se zm─nou vřj─dř─me p─smenem a, vlo─me jin─ meze y a program zobraz─ pr─b─h funkce a její derivace, kter─ se po─t─ numericky vztahem

$$y' = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

bod za bodem. Funkce a její derivace jsou odli─eny barevn─, funkce je nakreslena řervenou řarou, derivace modrou.

```
INPUT „xmin,xmax=„; x1, x2
y1 = 1000000!: y2 = -1000000!
FOR x = x1 TO x2 STEP (x2 - x1) / 100
GOSUB g: IF y < y1 THEN y1 = y
IF y > y2 THEN y2 = y
NEXT x
PRINT „ymin,ymax=„; y1, y2
INPUT „zmena ymin,ymax? a/n„; a$
IF a$ <> „a“ THEN GOTO a
INPUT „ymin,ymax=„; y1, y2
a:
SCREEN 9: CLS: KEY OFF
PRINT „xmin,xmax=„; x1, x2
PRINT „ymin,ymax=„; y1, y2
PRINT „funkce cervena,derivace modra“
x = x1 / (x1 - x2) * 640
IF x1 * x2 <= 0 THEN LINE (x, 50)-(x, 320)
y = 320 - y1 / (y1 - y2) * 260
IF y1 * y2 <= 0 THEN LINE (0, y)-(640, y)
x = x1: GOSUB g: PSET (x, 320 - (y - y1) / (y2 - y1) * 260), 4
d = (x2 - x1) / 300: x0 = x: y0 = y
FOR x = x1 + d TO x2 STEP d: GOSUB g
CIRCLE ((x - x1) / (x2 - x1) * 640, 320 - (y - y1) / (y2 - y1) * 260), 2, 12
de = (y - y0) / d
CIRCLE ((x - x1) / (x2 - x1) * 640, 320 - (de - y1) / (y2 - y1) * 260), 2, 9
y0 = y: NEXT x
END
g:
y = EXP(-x * x)
RETURN
```

Př─klad: zap─me-li za label g funkci $y = \exp(-x*x)$, dostaneme pro rozsah x od -3 do 3 n─sleduj─c─ graf.



Graf funkcí: $y = e^{-x^2}$; $y' = -2x \cdot e^{-x^2}$

C11 Funkce hustoty a Abbottova křivka empirické funkce

Má-li empirická funkce $y = f(x)$ omezený rozsah funkčních hodnot, takže $y_{\min} < y < y_{\max}$, je možné sestavit funkci hustoty hodnot y a Abbottovu křivku této funkce následujícím způsobem:

1. rozdělíme interval y na n částí o šířce $d = (y_{\max} - y_{\min}) / n$
2. osu nezávislé proměnné x nebo t rozdělíme na dostatečně malé intervaly dx (dt)
3. spočítáme, v kolika intervalech dx nebo dt je hodnota y v určitém intervalu y . Četnosti v těchto intervalech tvoří funkci hustoty. Pozn.: tzv. úroňové čítače mohou stanovit tyto četnosti během měření.
4. postupným sčítáním četností od nejvyšší úroňe dolů dostaneme souřadnice Abbottovy křivky.

Všechny tyto operace a grafické zobrazení výsledků provede následující program.

Literatura:

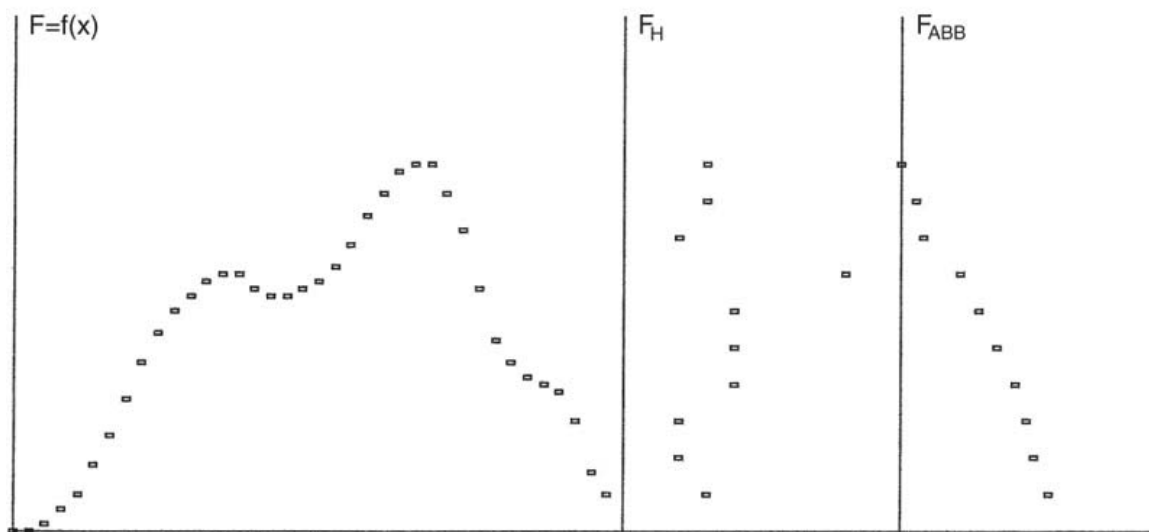
30. Abbott F. J. - Firestone F. A.: Specifying surface quality. Mechanical Engineering 55, 1933, str. 569-572
31. Technisches Messen 1980, č. 10, str. 361-368

```
DATA 5,5,6,8,10,14,18,23,28,32,35,37,39,40,40,38,37,37,38,39,41
DATA 44,48,51,54,55,55,51,46,38,31,28,26,25,24,20,13,10
ma = 0: mi = 100000!: CLS
a:
READ y: ON ERROR GOTO v
IF y > ma THEN LET ma = y
IF y < mi THEN LET mi = y
n = n + 1: GOTO a
v:
INPUT „počet úrovní „; m
RESTORE: DIM u(m), s(m): d = (ma - mi) / m
FOR i = 1 TO n
READ y: a = (y - mi) / d
u(a) = u(a) + 1: NEXT i
FOR i = m - 1 TO 0 STEP -1
s = s + u(i): s(i) = s
LPRINT i, u(i), s(i): NEXT i
SCREEN 10: CLS: KEY OFF
LINE (20, 20)-(20, 300)
LINE (350, 20)-(350, 300)
LINE (500, 20)-(500, 300)
LINE (20, 300)-(640, 300)
RESTORE
dx = 330 / n: du = 15: su = 2.5
my = 200 / (ma - mi): mh = my * ma / (m + 1)
FOR i = 0 TO n - 1
READ y: CIRCLE (20 + i * dx, 300 - (y - mi) * my), 2
NEXT i:
FOR i = 1 TO m
CIRCLE (350 + u(i) * du, 300 - i * mh), 2, 9
CIRCLE (500 + s(i) * su, 300 - i * mh), 2, 12
NEXT i
END
```

Příklad: z dat v prvních dvou řádcích programu dostaneme:

úroveň	čet	součet
9	3	3
8	2	5
7	8	13
6	4	17
5	4	21
4	4	25
3	2	27
2	2	29
1	3	32
0	3	35

a následující graf.



C12 Harmonická analýza empirické křivky

V cyklických sportech existuje řada veličin (síla, rychlost, rychlení atd.), jejichž časový průběh je téměř periodický a lze jej změřit. Získaná křivka je téměř periodická, protože se opakuje s periodou T a její tvar se opakuje s pravidelností, úměrnou výkonnosti sportovce. Proto je cennou informací o sportovní technice, a výsledky analýzy takové křivky dovolují srovnávat techniku sportovců exaktním způsobem.

Analýzou periodických křivek se zabýval francouzský matematik Fourier (1786-1830), který zjistil, že libovolný periodický průběh lze popsat trigonometrickou řadou

$$y = a_0 + a_1 \cdot \sin(\omega t + f_1) + a_2 \cdot \sin(\omega t + f_2) + \dots + a_n \cdot \sin(n\omega t + f_n)$$

kde

- a_0 stálá složka y (aritmetický průměr všech hodnot y)
- $\omega = 2\pi/T$ základní úhlová rychlost
- T trvání jedné periody
- $a_1 \dots a_n$ amplitudy jednotlivých harmonických složek
- $f_1 \dots f_n$ fázové úhly jednotlivých harmonických složek

Tzv. Fourierova analýza je vlastně výpočet amplitud a fázových úhlů ze souřadnic y , získaných vzorkováním křivky v dostatečně malých pravidelných odstupech. Tento výpočet provedeme následujícím programem, který fázové úhly normuje tak, aby $f_1 = 0$.

Nakonec program nakreslí vektorový diagram harmonických složek který dovoluje snadnější srovnávání jednotlivých sportovců. Diagram můžeme vytisknout klávesou PrtSc.

```
DATA .25,1.4,2,3,3.3,3,2.4,2.1,2.2,2.8,3.4,4.05,3.8,3.3
DATA 2.7,2.6,2.65,2.85,3,2.6,2,1.5,1.2,1.15
INPUT „jméno,datum,disciplina „; n$, d$, c$: LPRINT n$, d$, c$: LPRINT
DIM y(50), c(25), f(25): s = 0: n = 1: pi = 3.14159265#
a:
READ y(n): ON ERROR GOTO b
s = s + y(n): n = n + 1: GOTO a
b:
n = n - 1: c0 = s / n
LPRINT „c0=„; c0: LPRINT
d = 2 * pi / n: h = 0
c:
a = 0: b = 0: e = 0: h = h + 1
FOR i = 1 TO n
a = a + y(i) * COS(h * e)
b = b + y(i) * SIN(h * e)
e = e + d: NEXT i
v = SQR(a * a + b * b)
IF b = 0 THEN LET u = pi / 2 * SGN(a): GOTO d
u = ATN(a / b) - pi * (b < 0)
d:
c(h) = 2 * v / n: f(h) = u
LPRINT „c,f„; h; „=„; c(h), f(h) * 180 / pi
IF h < n / 2 - 1 THEN GOTO c
LPRINT: LPRINT „redukce fází na f(1)=0“
FOR h = 2 TO n / 2
f(h) = f(h) - h * f(1)
e:
IF f(h) < 0 THEN f(h) = f(h) + 2 * pi: GOTO e
```

```

f(h) = f(h) - 2 * pi * INT(f(h) / (2 * pi))
LPRINT „f(„; h; „)=„; f(h) * 180 / pi
NEXT h: f(1) = 0: LPRINT
LPRINT „modrá = 1“
LPRINT „zelená = 2“
LPRINT „tyrkys = 3“
LPRINT „červená = 4“
LPRINT „fialová = 5“
LPRINT „hnědá = 6“
LPRINT „bílá = 7“
LPRINT „šedá = 8“
SCREEN 9: CLS
FOR h = 1 TO n / 2
LINE (100, 160)-(100 + c(h) * 400 * COS(f(h)), 160 - c(h) * 400 * SIN(f(h))),
h
NEXT h
END

```

Příklad: z dat v prvním řádku programu dostaneme:

c0= 2.510417

c, f 1 =	.8451707	-78.57519
c, f 2 =	.2911244	-22.51807
c, f 3 =	.627077	-55.60263
c, f 4 =	.257225	159.8265
c, f 5 =	7.802891E-02	167.1409
c, f 6 =	6.833781E-02	142.4315
c, f 7 =	2.559826E-02	32.39182
c, f 8 =	3.333294E-02	90.00003
c, f 9 =	0.0187169	75.38255
c, f 10=	1.777586E-02	-83.84866
c, f 11=	2.980548E-02	48.56192

redukce fází pro f(1)=0

```

f(2) = 134.6323
f(3) = 180.1229
f(4) = 114.1272
f(5) = 200.0169
f(6) = 253.8827
f(7) = 222.4181
f(8) = 358.6016
f(9) = 62.55928
f(10)= 341.9032
f(11)= 192.889

```

C13 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

V předchozí kapitole jsme popsali harmonickou analýzu křivky, dané libovolným počtem vzorků pro jednu periodu. Pro velký počet vzorků by trvala harmonická analýza dlouho, a proto byla objevena tzv. rychlá Fourierova transformace (FFT – Fast Fourier Transform). Na rozdíl od předchozí analýzy vyžaduje, aby počet vzorků byl 2^n , kde n je celé číslo, tedy $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ atd. Splňuje-li počet vzorků tuto podmínku, je možno použít rychlou Fourierovu transformaci k výpočtu harmonických složek původní periodické funkce. Existují dvě možnosti:

A. vědecké kalkulátory Hewlett Packard HP-48, HP-49 mají FFT vestavěnu (MTH – NEXT). Data vepíšeme do tabulkového procesoru MATRIX a stiskneme FFT. Dostaneme výsledky v komplexních číslech, které snadno převedeme do POLAR, případně změníme radiány na stupně (RAD).

B. tabulkový procesor Microsoft EXCEL obsahuje FFT v oddíle NÁSTROJE. Použití je následující:

1. spustíme EXCEL myší na ikoně EXCEL
2. do sloupce tabulky vepíšeme analyzované vzorky y_1, y_2, \dots, y_n , na příklad pro 16 vzorků použijeme B2:B17.
3. myší volíme NÁSTROJE - ANALÝZA DAT – HARMONICKÁ ANALÝZA, ENTER
4. vepíšeme vstupní oblast B2:B17, výstupní oblast C2:C17 OK
5. FFT je hotova, výsledky jsou v komplexních číslech $x + iy$.
6. převod do polárního tvaru: myší označíme D2:D17
7. do D2 vepíšeme fx: Inženýrská analýza: =ImAbs(C2) ENTER
8. myší volíme ÚPRAVY – VYPLNIT – DOLU, ENTER převede zbytek sloupce
9. myší označíme E2:E17
10. do E2 vepíšeme fx: =ImArgument(D2), ENTER
11. myší volíme ÚPRAVY – VYPLNIT – DOLU, ENTER převede zbytek sloupce
12. myší označíme F2:F17
13. do F2 vepíšeme =E2/16, ENTER přepočítá na skutečnou hodnotu amplitudy, které byly 2^n – krát větší
14. myší volíme ÚPRAVY – VYPLNIT – DOLU, ENTER přepočítá zbytek sloupce
15. myší označíme G2:G17
16. do G2 vepíšeme fx: Matematické funkce: =DEGREES(F2), ENTER
17. myší volíme ÚPRAVY – VYPLNIT – DOLU, ENTER přepočítá zbytek sloupce z radiánů na stupně
18. tabulku doplníme hlavičkami v řádce 1:
nad sloupec B vepíšeme y
nad sloupec C vepíšeme FFT
nad sloupec D vepíšeme ABS
nad sloupec E vepíšeme ARG(RAD)
nad sloupec F vepíšeme ABS/16
nad sloupec G vepíšeme ARG(DEG)
19. myší volíme písmo, velikost písma, potvrdíme OK
20. myší volíme ikonu tiskárny, tabulka se vytiskne.

C14 Použití matic ve sportu

Způsob, kterým se zpracují prvky matic při jejich násobení dovoluje použít součin dvou matic k rychlému výpočtu bodů z tabulky vítězství, remíz a porážek na příklad v kopané a hokeji. První matici tvoří tabulka vítězství, remíz a porážek, která má proto rozměr $n \times 3$ pro n mužstev. Druhou matici tvoří jednosloupcový vektor 3×1 , v němž jsou body za vítězství, remízu a porážku: 2, 1, 0.

Příklad: výsledek soutěže je zapsán tabulkou:

vítězství	remízy	porážky		body
17	3	5		37
11	11	3		33
13	5	7		31
12	6	7		30
13	4	8	2	30
9	10	6		28
11	6	8	1	28
9	5	11		23
6	5	11	0	21
8	5	12		21
9	3	13		21
6	8	11		20
3	8	14		14
3	7	15		13

Po výpočtu bodů je nutno použít další pravidla pro stanovení pořadí družstev se stejným počtem bodů.

Pozn.: počet sloupců první matice se musí rovnat počtu řádků druhé matice.

Literatura:

32. Jelínek M.: Matice. SPN, Praha, 1976, str. 39-40

```
DATA 17,3,5
DATA 11,11,3
DATA 13,5,7
DATA 12,6,7
DATA 13,4,8
DATA 9,10,6
DATA 11,6,8
DATA 9,5,11
DATA 6,5,11
DATA 8,5,12
DATA 9,3,13
DATA 6,8,11
DATA 3,8,14
DATA 3,7,15
DATA 2,1,0
INPUT „r1,s1=r2,s2 „; m, n, l
```

```

DIM a(m, n), b(n, 1), c(m, 1)
FOR i = 1 TO m: FOR j = 1 TO n
READ a(i, j): NEXT j: NEXT i
FOR i = 1 TO n: FOR j = 1 TO 1
READ b(i, j): NEXT j: NEXT i
FOR k = 1 TO m: FOR j = 1 TO 1: s = 0
FOR i = 1 TO n: s = s + a(k, i) * b(i, j): NEXT i
c(k, j) = s: NEXT j: NEXT k
FOR k = 1 TO m: FOR j = 1 TO 1
PRINT c(k, j);: NEXT j: PRINT: NEXT k
END

```

Vidíme, že za matici vítězství, remíz a porážek je připsán vektor bodů 2,1,0. Po spuštění programu vložíme r1,s1=r2,s2 14,3,1 a ENTER dá výsledek.

C15 Numerické řešení diferenciální rovnice

Biomechanická analýza sportovního pohybu může vést ke vzniku matematického modelu a ten může dát tzv. pohybovou rovnici.

Pokud taková rovnice obsahuje dráhu, rychlost, zrychlení nebo síly či jiné mechanické veličiny, jde o diferenciální rovnici, protože jmenované veličiny jsou k sobě ve vztahu proměnné a některých jejích derivací. Řešením takové rovnice není kořen, ale funkce, která dosazena do této rovnice spolu s příslušnými derivacemi tuto rovnici splňuje.

Řešení diferenciálních rovnic může být někdy snadné, jindy obtížné nebo dokonce nemožné, snažíme-li se rovnici řešit analyticky, obecně, ve tvaru funkce. Existuje ale ještě další metoda řešení, které nazýváme číselné (numerické), protože dává číselné tabulky hodnot proměnných nezávislých i závislých. Existuje řada metod numerického řešení diferenciálních rovnic, z nichž asi nejznámější a nejpracovanější jsou metody dvou německých matematiků Rungeho (1895) a Kuty (1901). Ti navrhli různě komplikované a přesné metody pro různé typy rovnic. Jejich výhodou je, že mohou vyřešit i rovnice, analyticky neřešitelné.

Ukážeme si na příkladu splývání plavce po obrátce vznik, řešení a výsledky diferenciální rovnice analytické, pak uvedeme program pro numerickou integraci diferenciální rovnice II. řádu (s druhou derivací) metodou Runge - Kutta 4. řádu (se 4 korekcemi). Srovnáním obou řešení uvidíme, že numerické řešení dosahuje velmi vysoké přesnosti.

Příklad: plavec po obrátce se odrazí a vzdaluje se od stěny počáteční rychlostí v_0 . Ještě než začne aktivně plavat, překonává odpor $F_o = k \cdot v^2$, a zpomaluje se se zpomalením a . Proto vzniká setrvačná síla $F_s = m \cdot a$. Podle principu akce a reakce musí být tyto vodorovné síly v rovnováze, takže platí pohybová rovnice sil

$$F_o + F_s = 0 \quad (1)$$

Dosazením

$$k \cdot v^2 + m \cdot a = 0 \quad (2)$$

Odvodíme-li rychlost v a zpomalení a od dráhy y jako derivace podle času, bude rovnice

$$k \cdot y'^2 + m \cdot y'' = 0 \quad (3)$$

To je diferenciální rovnice 2. řádu, protože obsahuje druhou derivaci dráhy podle času:

$$y'' = -k / m \cdot y'^2 \quad (4)$$

Dosazením

$$dv / dt = -k / m \cdot v^2 \quad (5)$$

Můžeme separovat proměnné na obě strany rovnítko

$$dv / v^2 = -k / m \cdot dt$$

integrací

$$1 / v = k / m \cdot t + c \quad (6)$$

Pro $t = 0$ je $v = v_0$, takže integrační konstanta $c = 1 / v_0$, a rovnice bude

$$1 / v = k / m \cdot t + 1 / v_0 = (k \cdot v_0 \cdot t + m) / m \cdot v_0$$

a rychlost

$$v = m \cdot v_0 / (k \cdot v_0 \cdot t + m) \quad (7)$$

S tímto vzorcem můžeme počítat časový průběh rychlosti $v(t)$, známe-li odpor vody F_o při některé rychlosti v , protože z nich můžeme stanovit $k = F_o / v^2$. Z rovnice (7) bude

$$dy / dt = m \cdot v_0 / (k \cdot v_0 \cdot t + m)$$

dostaneme po separaci proměnných další integraci

$$y = m / k \cdot \ln(1 + k / m \cdot v_0 \cdot t) \quad (8)$$

Tento výraz dovoluje počítat usplývanou dráhu. Obě veličiny, dráhu a rychlost, analyticky vyjádřené jako funkce času můžeme srovnat s výsledky numerického řešení rovnice (4), provedeného následujícím programem pro metodu Runge - Kutta.

Literatura:

- 33. Rychnovský R.: Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení. Praha, SNTL - Práce, 1972
- 34. Abramowitz M. - Irene A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, NDS, 1964, vzorec 25.5.20

```

INPUT „x0,y0,y!0,h=„; x0, y0, z0, h
INPUT „xmax=„; xm
a:
x = x0: y = y0: z = z0
GOSUB fun: k1 = h * f: PRINT x, y, z, f
x = x0 + h / 2
y = y0 + z0 * h / 2 + k1 * h / 8
z = z0 + k1 / 2
GOSUB fun: k2 = h * f
z = z0 + k2 / 2
GOSUB fun: k3 = h * f
x = x0 + h
y = y0 + z0 * h + k3 * h / 2
y = y0 + k3
GOSUB fun: k4 = h * f
x0 = x
y0 = y0 + h * (z0 + (k1 + k2 + k3) / 6)
z0 = z0 + (k1 + 2 * (k2 + k3) + k4) / 6
IF x < xm THEN GOTO a
END
fun:f = -z * z / 3
RETURN
END

```

Před spuštěním programu vepíšeme za label fun: upravený výraz pro $x'' = -k/m \cdot x'^2$ ve zkrácené formě: $f = -z \cdot z / 3$
 Po spuštění programu vložíme $x0 (= t0)' = 0$ (s)

$$\begin{aligned}
 y0 (= L0) &= 0 \text{ (m)} \\
 y'0 (= v0) &= 4 \text{ (m/s)} \\
 h (= dt) &= 0,1 \text{ (s)}
 \end{aligned}$$

a dostaneme numerické řešení. K uvedeným dobám $x (=t)$ počítáme podle vzorců, získaných analytickým řešením dráhy a rychlosti, připišeme je na shodné řádky a můžeme porovnávat přesnost numerického řešení:

t	x(anal]	x(numer]	v(anal)	v(numer)	a(anal)	a(numer)
0	0	0	4	4	-5,333333	-5,333333
0,1	0,3754894	0,3754815	3,529412	3,529416	-4,152248	-4,152258
0,2	0,7091662	0,709154	3,157895	3,157900	-3,324100	-3,324111
0,3	1,009417	1,009403	2,857143	2,857148	-2,721088	-2,721099
0,4	1,282332	1,282317	2,608696	2,608701	-2,268432	-2,268440
0,5	1,532477	1,532461	2,4	2,400000	-1,92	-1,920008
0,6	1,763336	1,763344	2,222222	2,222226	-1,646090	-1,646096
0,7	1,977737	1,977721	2,068965	2,068969	-1,426872	-1,426878
0,8	2,177811	2,177795	1,935484	1,935487	-1,248699	-1,248704
0,9	2,365372	2,365356	1,818182	1,818185	-1,101929	-1,101932
1,0	2,541893	2,541878	1,714286	1,714289	-0,979592	-0,979595

C16 Diferenční rovnice v mechanice

Působí-li na volné těleso o hmotnosti m proměnlivá síla F stálého směru, a můžeme-li tuto sílu zapsat ve stejně dlouhých intervalech času, dostatečně krátkých, můžeme přibližně řešit průběh zrychlení, rychlosti a dráhy pomocí jednoduchých diferenčních rovnic:

pomocí druhého Newtonova principu počítáme zrychlení $a = F / m$

pomocí zrychlení změněnou rychlost $v_{i+1} = v_i + a \cdot \Delta t$

pomocí rychlosti změněnou dráhu $s_{i+1} = s_i + v \cdot \Delta t$

Abychom dosáhli dostatečnou přesnost, měl by interval mezi sousedními silami, rychlostmi i drahami být kratší nežli 0,05 sek.

Všechny tyto výpočty provede program:

```
data F1,F2,F3,... FN
input „hmotnost (kg) , počát. rychlost (m/s) , krok času (s) = „ ; m, v, d
lprint m, v, d: lprint
lprint tab(7) "T"; tab(16) "F"; tab(25) "A"; tab(34) "V"; tab(43) "S": lprint
V:
read f: on error goto K
a=f/m: v=v+a*d: s=s*d: lprint using „#####.###“; t; f; a; v; s
t=t+d: goto V
K:
end
```

Do řádku „data“ vepíšeme ekvidistantní hodnoty sil F v newtonech,

program spustíme a vložíme hmotnost objektu v kg, jeho počáteční rychlost v m/s a krok času v s. Vytiskne se tabulka vypočítaných hodnot. Použijeme-li příkaz „print“ místo „lprint“ v řádku mezi labely V a K, dostaneme tabulku na obrazovce monitoru.

D ANTROPOMETRIE, SOMATOMETRIE

D01 Relativní hmotnost částí lidského těla

Při biomechanické analýze některých sportů potřebujeme znát hmotnosti hlavních částí lidského těla. Měřením těchto hmotností různými metodami se zabývala řada autorů, v [36] je přehled jejich výsledků v procentech hmotnosti celého těla. Vážené průměry s ohledem na počet změřených osob jsou v následující tabulce:

část těla	muži	ženy
hlava	7,14	7,14
trup+hlava	+45,59 = 52,73	52,64
paže	$2 \times 2,856 = 5,712$	$2 \times 2,825 = 5,65$
předloktí	$2 \times 1,733 = 3,466$	$2 \times 1,653 = 3,305$
ruka	$2 \times 0,655 = 1,310$	$2 \times 0,502 = 1,004$
stehno	$2 \times 12,556 = 25,112$	$2 \times 12,26 = 24,52$
bérec	$2 \times 4,476 = 8,952$	$2 \times 5,059 = 10,118$
noha	$2 \times 1,437 = 2,974$	$2 \times 1,256 = 2,513$
	S = 100,16 %	S = 99,97 %

Těmito procenty počítáme hmotnost částí těla z hmotnosti celého těla. Jestliže současně s hmotností částí těla byla měřena nejen hmotnost celého těla M, ale i jeho výška H, můžeme získat (programem pro lineární aproximaci funkce dvou nezávislých proměnných $z=f(x,y)$) C07 rovnice pro dvojnásobnou regresi:

$$m_i = a_i \cdot M + b_i \cdot H + c_i$$

V uvedené literatuře jsou tyto rovnice:

hlava	$m_1 = 0,0171 \cdot M + 0,0143 \cdot H + 1,296$
trup	$m_2 = 0,5072 \cdot M - 0,07574 \cdot H + 7,8974$
paže	$m_3 = 0,0312 \cdot M - 0,0027 \cdot H + 0,25$
předloktí	$m_4 = 0,01445 \cdot M - 0,00114 \cdot H + 0,3185$
ruka	$m_5 = 0,0036 \cdot M + 0,00175 \cdot H - 0,1165$
stehno	$m_6 = 0,1463 \cdot M + 0,0137 \cdot H - 2,649$
bérec	$m_7 = 0,03616 \cdot M + 0,0121 \cdot H - 1,592$
noha	$m_8 = 0,0077 \cdot M + 0,0073 \cdot H - 0,829$
horní končetina	$m_h = 0,04925 \cdot M - 0,00209 \cdot H + 0,452$
dolní končetina	$m_d = 0,19016 \cdot M + 0,0331 \cdot H - 5,067$

Má-li součinitel b u tělesné výšky H kladné znaménko, pak hmotnost této části těla roste s rostoucí výškou (hlava, ruka, všechny části dolní končetiny), při záporném znaménku hmotnost klesá s rostoucí tělesnou výškou (trup, nadloktí, předloktí a celá horní končetina).

Příklad: muž s M = 75 kg a H = 175 cm bude mít

hmotnost hlavy	$m_1 = 5,081$ kg	6,77 %
hmotnost trupu	$m_2 = 32,6829$ kg	43,58 %
hmotnost paží	$m_h = 7,56$ kg	10,06 %
hmotnost paží a nohou	$m_d = 29,975$ kg	39,97 %
celkem	75,2689 kg	100,38 %

Literatura:

35. Hay J. G.: The biomechanics of sports techniques. 1985, Prentice Hall Intrnat. Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, str. 157
36. Zaciorskij V. M. - Aruin A. S. - Selujanov V. N.: Biomechanika dvigatělnogo apparata čeloveka. 1981, FiS, Moskva, str. 29, 38-39, 118
37. Donskoj D. D.- Zaciorskij V. M.: Biomechanika. 1979, FiS, Moskva, str. 61

D02 Těžiště a momenty setrvačnosti lidského těla

V biomechanice sportů je poloha těžiště sportovce významná v řadě sportů, např. skocích, gymnastice a akrobacii apod. Protože části těla mohou měnit svou relativní polohu ve velkém rozsahu, může se tak měnit i poloha těžiště vůči tělu. S rozvojem snímací a výpočetní techniky již není problém analyzovat 3D model pohybu [39].

Stanovíme ji pomocí jejích souřadnic v prostoru:

$$x_T = \sum x_i \cdot m_i / \sum m_i = \sum x_i \cdot p_i / 100$$

$$y_T = \sum y_i \cdot m_i / \sum m_i = \sum y_i \cdot p_i / 100$$

$$z_T = \sum z_i \cdot m_i / \sum m_i = \sum z_i \cdot p_i / 100$$

kde x_i, y_i, z_i jsou prostorové souřadnice těžiště částí těla

m_i ... hmotnosti částí těla

p_i ... procentní hmotnosti částí těla (předchozí kapitola)

Pozn.: zpravidla je zobrazení sportovce rovinné (film, fotografie, videozáznam) a počítáme jen x_T, y_T .

Chyby stanovení souřadnic těžiště jsou způsobeny odchylkami procentního rozdělení hmotností u daného sportovce od uvedených středních hodnot, nepřesností zobrazení a stanovení polohy těžišť jednotlivých částí těla.

Při rotačních pohybech (překotech a vrutech) je setrvačnost těla jako odpor proti změně rotací závislá na momentu setrvačnosti, nikoliv na hmotě těla. Momenty setrvačnosti počítáme vzorci

$$I_x = \sum y_i^2 \cdot m_i = \sum y_i^2 \cdot p_i / k$$

$$I_y = \sum x_i^2 \cdot m_i = \sum x_i^2 \cdot p_i / k$$

kde x_i, y_i ... vzdálenosti těžiště od osy y, x

m_i ... hmotnosti částí těla

p_i ... procentní hmotnosti částí těla

s ... měřítko zobrazení (např. 1:20 = 0.05)

$k = 100 \cdot s^2 / M$... konstanta, vyjadřující vliv měřítka zobrazení s a hmotnosti celého těla M

Moment setrvačnosti k ose z , (procházející kolmo na osy x, y jejich průsečíkem) je $I_z = I_x + I_y$.

Poloměr setrvačnosti je odmocnina momentu setrvačnosti k těžištní ose, děleného hmotností těla. Je to míra setrvačnosti těla při rotačních zrychleních.

Následující program provede všechny potřebné výpočty (sumace) jestliže vkládáme podle obrazovky žádané souřadnice x, y , nakonec hmotnost těla (kg) a měřítko zobrazení jako desetinný zlomek.

Literatura:

38. Hay James G.: The Biomechanics of Sports Technique. 1985, 3. vyd. Prentice-Hall International Inc., Englewood Cliffs, N. J., USA
39. Zvonař, Martin, Sebera, Martin. Simi motion 3D biomechanická analýza. Studia sportiva, Brno, FSpS MU Brno. ISSN 1802-7679, 2007, vol. 2/1, no. 1, 116 s.

```

INPUT „jméno,datum=„; n$, d$
PRINT „hlava „;: p = 7.14: GOSUB g
PRINT „trup „;: p = 45.59: GOSUB g
PRINT „pravá paže „;: p = 2.856: GOSUB g
PRINT „levá paže „;: GOSUB g
PRINT „pravé předloktí „;: p = 1.733: GOSUB g
PRINT „levé předloktí „;: GOSUB g
PRINT „pravá ruka „;: p = .655: GOSUB g
PRINT „levá ruka „;: GOSUB g
PRINT „pravé stehno „;: p = 12.556: GOSUB g
PRINT „levé stehno „;: GOSUB g
PRINT „pravý bérec „;: p = 4.476: GOSUB g
PRINT „levý bérec „;: GOSUB g
PRINT „pravá noha „;: p = 1.437: GOSUB g
PRINT „levá noha „;: GOSUB g
xt = sx / 100: yt = sy / 100
PRINT „souřadnice těžiště x,y „; xt, yt
INPUT „hmotnost těla „; m
INPUT „měřítka délek „; s
k = 1E+08*s*s/ m
ix = ky / k: iy = kx / k
PRINT „Ix,Iy „; ix, iy
i = ix + iy
it = i - 100 * (xt * xt + yt * yt) / k
PRINT „It=„; it
r = SQR(it / m)
PRINT „poloměr setrvačnosti „; r
END
g:
INPUT „xt,yt „; x, y
sx = sx + p * x: kx = kx + p * x * x
sy = sy + p * y: ky = ky + p * y * y
RETURN

```

Příklad: v knize J.G.Haye je na str. 136 obrázek skokana do dálky. Odměříme-li souřadnice těžišť částí těla, dostaneme

část těla	x	y
hlava	3	23
trup	3	3
pravá paže	10	17.5
levá paže	-2.5	18
pravé předloktí	12	25
levé předloktí	-12	26.5
pravá ruka	16	36
levá ruka	-21	36
pravé stehno	-11	-11.5
levé stehno	4	-20.5
pravý bérec	-31,5	-9.5
levý bérec	12.5	-30
pravá noha	-49	-10.5
levá noha	22	-20.5

souřadnice těžiště $x = -0.043$ $y = 0.008$

Protože počátek souřadnic je v průsečíku os x, z , mají být tyto souřadnice $0, 0$. Vidíme, že chyba je malá.

Hmotnost těla: 75	Měřítka délek 0.0543	I_x, I_y 5.623 3.406
It 9.028	Poloměr setrv. 0.347	

D03 Starší antropometrické indexy

Chceme-li popsat tělesný typ sportovce bez měření mnoha parametrů a výpočtu somatotypu Heathové a Cartera, můžeme někdy použít starší antropometrické indexy, navržené slavnými antropology. Ty také umožňují srovnání dřívějších sportovců, u nichž jsou tyto indexy známé, s dnešními.

Starší indexy vycházejí z hmotnosti M (kg), tělesné výšky H (cm, dm), obvodu hrudníku O (cm) a vitální kapacity VK (litrů).

Bouchardův index	$BC = M / H$	(kg/dm)
Brockův index	$BR = M / (H-100)$	(kg/cm)
Brugschův index	$BG = OH \cdot 100 / H$	(bez rozměrů)
Erismannův index	$E = OH - H / 2$	(cm)
Pignet-Pinnierův index	$PP = M + OH - H$	
Šulcův typový součinitel	$T = M / H^{2,5} \cdot 105$	(kg/cm ^{2,5})
povrch těla podle Du-Bois Reymonda	$PO = 7,148 \cdot M^{0,425} \cdot H^{0,725}$	
vitální kapacita na 1 m ² povrchu těla	$V = VK / PO$	

Povrch těla lze určit nomogramem, nahrazujícím uvedený vzorec

Nomogram najdeme v knihách:

40. Drastich L.: Tělověda. 1948, Praha-Brno, Komenium, str. 151

41. Sobolová V.- Zelenka V.: Fysiologie tělesných cvičení a sportu 1973, Praha, Olympia, obr.37

Normy pro antropometrické indexy:

index	muži				ženy			
	pyknik	atlet	leptosom	průměr	pyknička	atletka	leptosomka	průměr
bc	4.05	4.14	3.96	4.08	3.93	3.8	3.5	3.74
br	1.1	1	0.8	1				
bg	55.7	54.8	53	54.6	53.8	53	51	52.6
e	9.9	7.7	5.3	8	6	5.2	1.6	4.3
pp	-6.2	-6.2	-12.9	9	-10.5	-14.4	-23	-16
vk/po	2.78	2.77	2.7	2.74	1.9	2.12	2.13	2.07

Program pro výpočet indexů:

```
input „hmotnost (kg), výška (cm)=„; m,h
input „obvod hrudníku (cm), vitální kapacita (litřů) =„; o,v
bc=10*m/h: print „Bouchardův index=„;bc
br=m/(h-100): print „Brocův index=„;br
t=m/h^2.5*10e05:print „Šolcův typový součinitel=„;t
po=7.148E-03*m^.425*h^.725:print „povrch těla=„;po
v=vk/po:print „vitální kapacita na 1 m^2=„;v
if o=0 then goto k
bg=o*100/h:print „Brugschův index=„;bg
e=o-h/2:print„Erismannův index=„;e
pp=m+o-h:print „Pignet-Pinnierův index=„;pp
k:
end
```

Příklad: muž s $m=75$ kg, $h=175$ cm, $o=100$ cm, $vk=7$ litřů:

$bc= 4.29$, $br=1$, $bg= 57.1$, $e=12.5$, $pp= 0$, $t= 18.51$, $po= 1.8935$ m²
 $vk/po= 3.697$ litřů/m²

D04 Typový součinitel podle Šolce a Lochmana

Není-li možné změřit všechna data, potřebná k výpočtu složek somatotypu, nebo chceme-li jednoduše hodnotit typ lidského těla, můžeme použít typový součinitel, založený jen na hmotnosti m a výšce těla h pomocí vzorce

$$t = m / h^{2,5} \text{ (kg, m)}$$

Příklady:	m(kg)	h(m)	t	typ
gymnastka	42	1,592	14,3	velmi štíhlá
gymnasta	51	1,626	15,4	štíhlý
basketbalista	75,5	1,885	16,8	štíhlý
volejbalistka	73,3	1,834	16,1	štíhlá
fotbalista	71	1,735	17,9	průměrný
vzpěrač	100	1,80	23	velmi robustní
nesportovec	130	1,80	29,9	velmi obézní

Následující nomogram usnadňuje určení typového součinitele a srovnávání různých skupin sportovců podobně, jako somatotyp.

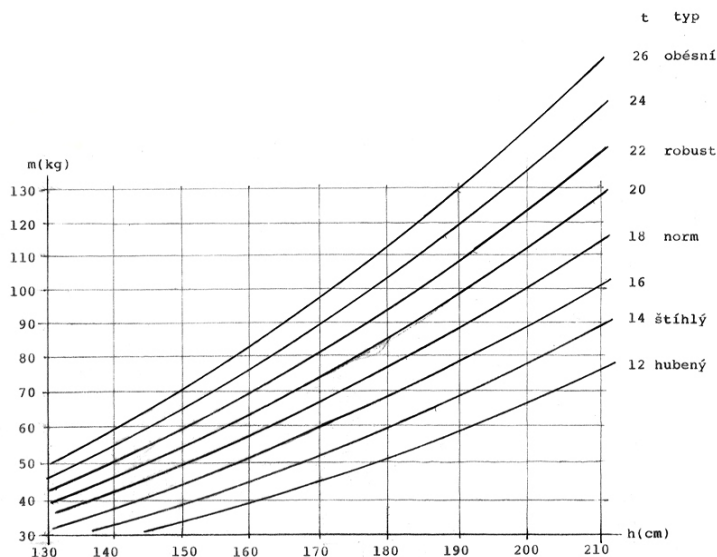
Literatura:

42. Šolc I. - Lochman J.: Kvantitativní vztahy v typologii člověka. Vesmír 61, 1982, č. 3, str. 71-74

```

cls: screen 10: key off
pset (0,0)
draw „d320;r640“
for h=130 to 210 step 10
y=320-(h-130)*4
line (0,y)-(5,y)
next h
for m=30 to 130 step 10
x=(m-30)*6
line (x,320)-(x,325)
next m
for k=13 to 25 step 2:
pset (0,320)
for m=30 to 130 step 30
m=(m*100000/k)^.4
line-((m-30)*6,320-(h,130)*4)
next m: next k
end

```



D05 Výpočet složek somatotypu podle Heathové a Cartera

V roce 1967 publikovali B. H. Heathová a J. E. Carter metodu, jak stanovit složky somatotypu. Musíme změřit tyto parametry: tělesnou výšku v cm, tloušťky tří kožních řas v mm, šířky epikondylů kosti pažní a stehenní a obvody bicepsu paže a lýtka v cm a tělesnou hmotnost. Pak můžeme vypočítat složky somatotypu následujícím programem.

Literatura:

43. Heath B. H. - Carter J. E.: A modified somatotype method. Amer. J. Phys. Anthrop. 27, 1967, p. 57-74
44. Kopřiva J. - Čechovský K.: Determination of Heath-Carter somatotype and somatotype dispersion index using a computer. Anthropologie 28, 1990, p. 31-33

```
input „součet tří kožních řas(mm)=„;s
if s<31.3 mm then en=.125*s-.625 else en=24.447*s/(195.207+s)
input „těles.výška(cm)=„;h
input „šířka pažního epikondylu=„;u
input „šířka stehenního epikondylu=„;f
input „obvod bicepsu paže=„;b
input „obvod lýtka=„;c
n1=(h-78.7)/3.81132
n2=(u-2.87)/.14566
n3=(f-4.09)/.207736
n4=(b-13.1)/.664151
n5=(c-15.3)/.771358
me=(n2+n3+n4+n5-4*n1)/8+4
input „těles.hmotnost (kg)=„;m
i=h/m^(1/3)
ek=.709671*i-27.434
print „somatotyp: en-me-ek „;sing „##.##“;en,me,ek
end
```

Příklad: s=35 mm, h=175 cm, šířka epik.p= 6 cm, šířka epik.s = 10 cm,
obvod bicepsu paže = 29 cm, obvod lýtka = 40 cm,
těles.hmotnost = 73 kg.
en - me - ek = 3.44 4.60 2.28

D06 Grafické vyjádření somatotypu Heathové a Cartera

Tři složky somatotypu Heathové a Cartera (endomorfie, mesomorfie a ektomorfie) lze zobrazit v rovinném grafu pomocí transformačních rovnic:

$$x = (ek - en) \cdot \cos 30^\circ = (ek - en) \cdot 0,866$$
$$y = me - (en + ek) \cdot \sin 30^\circ = me - (en + ek) \cdot 0,5$$

Pak můžeme somatotyp vyjádřit bodem v souřadnicích x,y uvnitř sférického trojúhelníka, jehož středy křivosti leží v jeho vrcholech. Kreslení několika somatotypů různě barevnými body provede následující program.

```
screen 9: cls: key off
locate 20,22: print „endo“
locate 1,50: print „meso“
locate 20,76: print „ekto“
circle(400,10),400,,4.189,5.236
circle(200,265),400,,0,1.047
circle(600,262),400,,2.094,3.1416: b=0
locate 1,1
a:
input „en,me,ec=„;en,me,ec: b=b+1
if b=1 then print „modrý“
if b=2 then print „zelený“
if b=3 then print „tyrkys“
if b=4 then print „červený“
if b=5 then print „purpur“
if b=6 then print „světle červený“
if b=7 then print „světlý purpur“
if b=8 then print „šedý“
if b=9 then print „světle modrý“
x=(ec-en)*.866
y=me-(en+ec)*.5
circle(400+x*38.5,178-y*28),3,b
goto a
end
```

Příklad: po spuštění programu se nakreslí sférický trojúhelník, vložíme vyžádané složky a somatotyp se zakreslí barevným kroužkem. Zapišeme si barvu ke jménu osoby a vkládáme další somatotyp. Skončíme kombinací CTRL+C.

D07 SDI - index rozptylu somatotypu

Používáme-li somatotyp podle Heathové a Cartera, můžeme někdy potřebovat popsat určitou skupinu sportovců

1. somatotypy jednotlivců
2. průměrným somatotypem celé skupiny
3. nějakým měřítkem rozptylu těchto somatotypů.

Pro toto použití navrhli Ross a Wilson SDI, tj. index rozptylu somatotypů, který lze vypočítat následujícím programem.

Literatura:

45. Ross W. D. - Wilson B. D.: A Somatotype Dispersion Index. Research Quarterly, 44, 1973, str. 372-374.

```
data en1,me1,ec1,en2,me2,ec2,... enp,mep,ecp
input „počet osob „;p: print
dim n(p),m(p),k(p),x(p),y(p)
for i=1 to p
read n(i),m(i),k(i)
a=a+n(i):b=b+m(i):c=c+k(i)
x(i)=k(i)-n(i)
y(i)=2*m(i)-k(i)-n(i)
next i
a=a/p:b=b/p:c=c/p
print „průměrný somatotyp =„;a,b,c: print
x=c-a:y=2*b-a-c
d=0:for i=1 to p
d=d+sqr((3*x(i)-x)^2+(y(i)-y)^2)
next i: d=d/p
print „SDI=„;d
end
```

Příklad:

```
som1 = 3 - 5 - 2
som2 = 2 - 6 - 3
som3 = 2 - 5 - 4
som4 = 3 - 4 - 4
som5 = 3 - 5 - 4
průměrný somatotyp 2,6 - 5,0 - 3,4
SDI 2,49
```

D08 Celkové procento tělesného tuku z tloušťky 4 kožních řas

V literatuře [46] jsou údaje a poměrně složité vzorce pro výpočet celkového procenta tělesného tuku ze 4 kožních řas

- s1 uprostřed nadloktí nad m.triceps brachii
- s2 na zádech na dolním konci lopatky
- s3 na hrudní axilární čáře ve výšce 7. žebra
- s4 na břicho v horní části mezi pupkem a crista illiaca

Ze součtu všech 4 řas $s = s1 + s2 + s3 + s4$ můžeme počítat velmi jednoduchým vzorcem procento tuku

$$\text{u mužů} \quad t \% = 11,8686 \cdot \ln(s) - 28,413 \quad r=0,9999920$$

$$\text{u žen} \quad t \% = 14,0123 \cdot \ln(s) - 32,774 \quad r=0,999994$$

Literatura:

46. Mohr M.: Methods of Epidemiological Nutritional Status Assessment of Adults. In: Methods of Functional Anthropology. Proc. Symposium, 5-8. 9. 1977 in Prague. Prague, 1979, str. 139-144

E. FYZIOLOGIE PRÁCE

E01 Změny srdeční frekvence při změně zatížení

1. stoupání srdeční frekvence na začátku zátěže

Člověk s klidovou srdeční frekvencí f_0 začne náhle pracovat s intenzitou, které odpovídá ustálená srdeční frekvence f_1 . Přejít srdeční frekvence z klidové hodnoty na pracovní není okamžitý, jeho průběh můžeme vyšetřit přibližně matematicky, předpokládáme-li, že rychlost stoupání je úměrná rozdílu mezi okamžitou hodnotou srdeční frekvence f a frekvencí, 0020 odpovídající zátěži f_1 :

$$f' = df / dt = k \cdot (f_1 - f)$$

Toto je diferenciální rovnice I. řádu, první derivace je funkcí téže proměnné. Řešíme ji separací proměnných:

$$df / (f - f_1) = -k \cdot dt$$

Integrací obou stran

$$\ln(f - f_1) = -k \cdot t + c$$

Odlogaritmováním

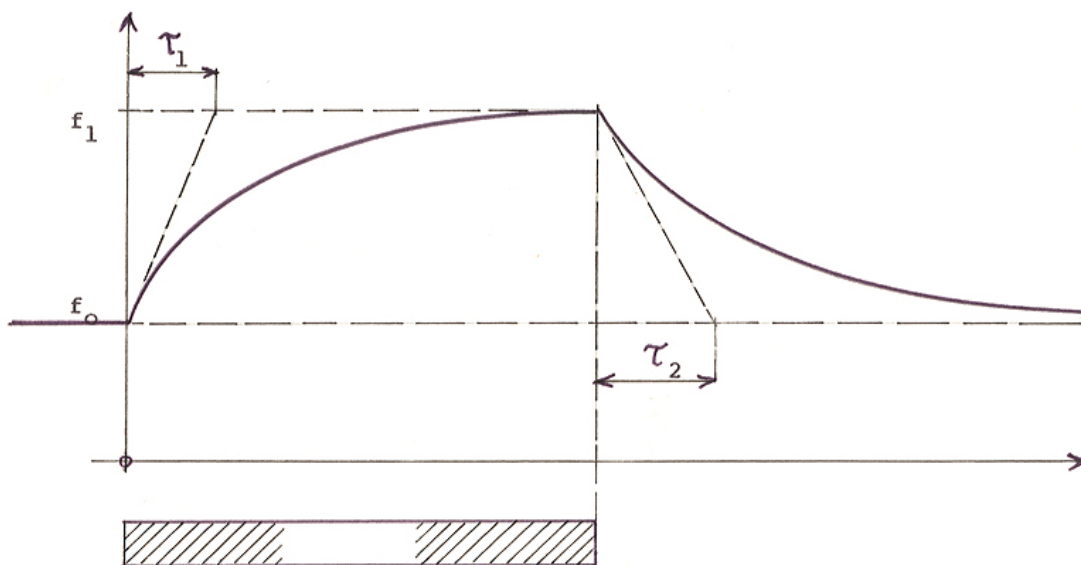
$$f - f_1 = e^{-k \cdot t} \cdot e^c$$

Člen s integrační konstantou určíme z podmínky $t = 0, f = f_0$,
 $e^{-k \cdot t} = 1$, pak $e^c = f_0 - f_1$ a dosazením zpět

$$f - f_1 = (f_0 - f_1) \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$f = f_1 - (f_1 - f_0) \cdot e^{-k \cdot t}$$

Průběh okamžité srdeční frekvence je exponenciální a je na první části



2. klesání srdeční frekvence po ukončení zátěže

Zde předpokládáme, že rychlost klesání srdeční frekvence je úměrná rozdílu mezi okamžitou frekvencí a konečnou (klidovou) srdeční frekvencí. Diferenciální rovnice bude podobná:

$$f' = df / dt = -k \cdot (f - f_0)$$

Separací proměnných

$$df / (f - f_1) = -k \cdot dt$$

integrací obou stran

$$\ln(f - f_1) = -k \cdot t + c$$

odlogaritmováním

$$f - f_1 = e^{-k \cdot t} \cdot e^c$$

Stanovením e^c podobným způsobem jako v předchozím případě dostaneme průběh frekvence

$$f = f_0 + (f_1 - f_0) \cdot e^{-k \cdot t}$$

Obě řešení jsou si podobná a byla popsána v [47]. Nahradíme-li $k = 1 / t$, kde t = časová konstanta, dostaneme tyto dvě rovnice:

$$\begin{aligned} \text{pro stoupání} \quad f &= f_1 - (f_1 - f_0) \cdot e^{-t/t_1} \\ \text{pro klesání} \quad f &= f_0 + (f_1 - f_0) \cdot e^{-t/t_2} \end{aligned}$$

Časové konstanty t_1 , t_2 nejsou obecně shodné, a s trénovaností sportovce klesají, takže srdeční frekvence se rychleji přizpůsobují změně zátěže. Proto jsou cennou informací o trénovanosti sportovce. V [48] uvádí Suggs tyto rovnice:

$$\text{pro začátek zátěže} \quad f = 144 - 51,5 \cdot e^{-t/1,183} \text{ (min)}$$

$$\text{pro uklidňování} \quad f = 83 + 49 \cdot e^{-t/2,053} \text{ (min)}$$

Literatura:

47. Schilpp R. W.: A mathematical description of the heart rate curve of response to exercise. Research Quarterly 22, 1951, str. 437-445.
48. Suggs C. W.: An analysis of heart rate response to exercise. Research Quarterly 39, 1968, str. 195-205
49. Seliger V. - Vinařický R. - Trefný Z.: Fysiologie tělesných cvičení. Avicenum, Praha, 1980, str. 94, obr. 39

Příklad: v lit.[48] najdeme data, z nichž aproximační metodou dostaneme následující rovnici:

t(min) f-f₀ Aproximací dostaneme

0 80

2 49 $f = 65 + 71,2 \cdot e^{-t/4,825} \text{ (min)}$ $r = -0,985$

3 35 Časová konstanta $t = 4,825$ minuty znamená, že

5 23 měřená osoba má nízkou trénovanost.

6 19

9 13

E02 Stanovení laktátového prahu při stupňované zátěži

Křivka koncentrace laktátů v krvi při stupňované zátěži má dvě části: ze začátku pomalu stoupající, pak rychleji stoupající. Budeme-li považovat tyto dvě části za přímky, pak v jejich průsečíku leží bod, zvaný laktátový práh, od něhož roste rychleji koncentrace laktátů v krvi a který je cennou informací o trénovanosti sportovce.

Matematicky nalezneme práh lineární aproximací obou částí křivky regresními přímkami (např. metodou nejmenších čtverců) a pak vyřešením společného kořene obou rovnic přímek. Tím dostaneme souřadnice bodu, určujícího laktátový práh
Dvě rovnice regresních přímek jsou

$$y_1 = a_1 + b_1 \cdot x_1$$

$$y_2 = a_2 + b_2 \cdot x_2$$

Řešíme-li tuto soustavu determinanty, bude determinant soustavy

$$D = b_2 - b_1$$

a kořeny

$$x = Dx / D = (a_1 - a_2) / D$$

$$y = Dy / D = (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) / D$$

jsou souřadnicemi laktátového prahu.

Literatura:

50. Placheta Z.: Submaximal exercise testing. 1988, Brno, J. E. Purkyně University, str. 116, obr. II - 22.

Příklad: data pro pomalu stoupající část křivky v grafu II-22 a regresní rovnice:

N(W) LA(mmol/l) LA = 0,4686 + 6,2143.10⁻³. N

80 1

160 1,4

200 1,7

240 2

Pro rychleji stoupající část:

N(W) LA(mmol/l) LA = -14,833 + 0,0625. N

280 3

320 4,5

350 8

Řešením soustavy dostaneme souřadnice laktátového prahu:

$$N = 271,8 \text{ W, LA} = 2,158 \text{ mmol/l.}$$

Tento bod můžeme zakreslit do původního grafu.

E03 Kriterium síly svalové skupiny

Změříme-li sílu některé svalové skupiny dynamometrem, výsledek bude záviset na velikosti měřené osoby. Svalová síla roste s průřezem svalu, který je úměrný druhé mocnině rozměrů těla, na příklad výšky:

$$F_m = k_1 \cdot H^2$$

Hmotnost těla je úměrná třetí mocnině výšky:

$$m = k_2 \cdot H^3$$

Pak

$$H = k_3 \cdot m^{1/3}$$

a

$$F_m = k \cdot m^{2/3}$$

Tento vztah poprvé uvedl Lietzke v [50].

Kriteriem síly svalové skupiny, dovolujícím srovnávat jednotlivce různých tělesných hmotností je konstanta úměrnosti

$$k = F_m / m^{2/3}$$

Literatura:

51. Lietzke M. H.: Science 124, 1956, č. 3213, str. 486

```
input „svalová skupina „; m$
b:
input „jméno, hmotnost, síla „; n$, m, f
k=f/m^(2/3)
print „m=„; m; “ f=„; f; “ k=„; k
print: goto b
end
```

Příklad: m=70 kg, F=120 N, k= 7,065 N/kg^{2/3}

E04 Opakovací maximum síly

U silových cviků klesá počet možných opakování s rostoucím procentem zatížení. Za 100 % považujeme takové zatížení, při němž je možné jen jediné provedení cviku.

V [53] se uvádí tabulka závislosti procent zatížení na počtu opakování:

opakování	% zatížení
1	100
3	94
5	86
10	70

Budeme-li tuto závislost aproximovat, musíme některé funkce vyloučit, protože pro velký počet opakování dají negativní %.

Vhodná se ukázala hyperbolická funkce

$$p\% = 2053,7 / (19,15 + n) \quad r = -0,996$$

Pro velký počet opakování uvedeme jiný soubor dat a funkci.

Příklad: při shybech zanedbáme setrvačnou sílu (poměrně velká chyba). Procento tíhy z maximální síly je $p\% = G / F_{\max} \cdot 100$, a položíme-li tento výraz jako rovný předchozímu, dostaneme počet opakování $n = 20,537 \cdot F_{\max} / G - 19,15$. Roste tedy počet opakování shybů s maximální silou cvičence. Naopak z počtu shybů můžeme stanovit maximální sílu jako násobek tíhy:

$$F_{\max} = G \cdot (n + 19,15) / 20,537$$

Platí tabulka:

shyby	F_{\max} / G	p%
1	0,98	98
2	1,03	103
3	1,08	108
5	1,18	118
10	1,42	142
20	1,90	190
30	2,39	239

Vzorce by bylo možno využít ve vzpěračském tréninku ke stanovení počtu opakování při různém naložení činky.

Zaciorskij uveřejnil v [55] data pro velký počet opakování.

opakování	% z F_{\max}
1	100
10	80
17	70
27	60
36	50
58	40
110	25
666	15
1507	7

Pro $n \rightarrow 10$ bude vhodná aproximace

$$p\% = 264,13 \cdot A^{-0,47455} \quad r = -0,989$$

Tohoto vzorce lze použít k výpočtu přibližné teoretické síly pro posilování v disciplínách s velkým počtem pohybů (plavání, veslování apod.)

Příklad: plavec-krauler na 100 m potřebuje 48 temp, t j. 96 záběrů paží. Ze vzorce vyjde $p\% = 30,3$ z F_{\max} , kterou musíme změřit pro paži v poloze záběrové. Krauler potřebuje na 1500 m kraul 700 temp, 1400 záběrů a měl by tedy posilovat silou 8,5 % z F_{\max} . Podobně počítáme v jiných sportech, problém je jen ve stanovení F_{\max} bez poškození svalů, kloubů nebo šlach.

Literatura:

52. Měkota K. - Blahuš P.: Motorické testy v tělesné výchově. 1983, Praha, SPN, str. 122
53. Berger R. A.: Determination of method to predict 1-RM chin and dip from repetitive chins and dips. Research Quarterly, 8, 1967, str. 330-335
54. Beránková, L. Možnosti objektivizace diagnostiky úrovně svalové síly při posuzování funkčního stavu svalového systému pohybového aparátu. Ternčianské teplice: Slovenská spoločnosť telovýchovného lekárstva, 2004. s. 16-17. 11.9.2004, Trenčianské Teplice, Slovenská republika.
55. Zaciorskij V. M. - Godik N. G. - Smirnov J. I.: Issledovanije vzaimo svjazi meždu fizičeskimi kačestvami. TPFK 1969, č.1, str. 2, obr. 12
56. Feser R.: Die Entwicklung der motorischen Kraft qualifizierter Gewichtheber. Leistungssport 7, 1977, č. 4, str. 251-256.

E05 Závislost mechanického výkonu člověka na trvání zatížení

Největší mechanický výkon může člověk podat v explozivních činnostech jako jsou skoky, vrhy a hody. S rostoucím trváním práce klesá průměrný výkon, kterého je člověk schopen. Následující data byla naměřena na různě zdatných osobách za různých okolností různými metodami, přístroji nebo ergometry. Tím lze vysvětlit velké rozdíly mezi autory dat.

Jedno z nejstarších měření provedl Blix, kterého cituje Boruttau (1916), Bělehrádek (1942) a Černoch (1947):

t(sek)	N(W)	$N(W) = 1730 \cdot t(\text{sek}) - 0,3564$
3	1569	
4	992,4	$= 402 \cdot t(\text{min}) - 0,3564$
30	598,2	
48	294,2	$= 93,45 \cdot t(\text{hod}) - 0,3564$
420	183,4	
1080	133,4	$r = -0,982$
36000	49	

Nověji (1939) byla při výstavě v Zurychu naměřena na netrénované veřejnosti tato data (E. O. 1941):

t(sek)	N(W)	$N(W) = 953,9 \cdot t(\text{sek}) - 0,2435$
60	350	
120	300	$= 351,98 \cdot t(\text{min}) - 0,2435$
600	200	$r = -0,9998$
1200	170	$= 129,88 \cdot t(\text{hod}) - 0,2435$

Nejnižší výkonnost měla skupina, kterou měřil Williams (1956)

t(sek)	N(W)	$N(W) = 314,85 \cdot t(\text{sek}) - 0,17905$
600	116	
3600	65	$= 151,26 \cdot t(\text{min}) - 0,17905$
36000	40	$r = -0,944$
360000	37	$= 72,67 \cdot t(\text{hod}) - 0,17905$

Nejvyšší výkonnost měla skupina, jejíž data uvedl Scientific American 1985:

t(sek)	N(W)	$N = 1332 \cdot t(\text{sek}) - 0,18033$
12	1060	
30	720	$= 636,6 \cdot t(\text{min}) - 0,18033$
60	575	
120	495	$= 304 \cdot t(\text{hod}) - 0,18033$
300	420	
600	390	$r = -0,939$
1800	370	
3600	350	

Zde byl uveden také výkon belgického cyklisty Eddy Merckxe na ergometru po dobu 1 hodiny: 430 W.

Literatura:

57. Boruttau H.: Die Arbeitsleistungen des Menschen. 1916, B. G. Teubner, Leipzig-Berlin
58. Bělehrádek J.: Člověk v číslech. 1942, Borový, Praha
59. Černoch S.: Strojně technická příručka I. 1947, Práce, Praha
60. Elektrotechnický Obzor 1941, str. 145
61. Williams: Man powered flight. Science Journal (GB), 2, 1966, č. 3, str. 74-79
62. Scientific American 253, 1985, č. 5, str. 122-129

F. PSYCHOLOGIE, NERVOVÁ ČINNOST

F01 Jednoduchá metoda měření reakční doby

Délka pádu v gravitačním poli je dána vzorcem

$$L = 0,5 \cdot t_2$$

v metrech a sekundách = $4,9033 \cdot t_2$

v cm a sekundách = $490,33 \cdot t_2$

v palcích a tisícinách = $193,044 \cdot t_2$

Tyto vzorce můžeme použít k nakreslení časové stupnice na plochem pravítku délky okolo 0,5 m. Časové značky nakreslíme v následujících vzdálenostech od nulového bodu stupnice:

t (sec)	L (cm)	L (in.mil)	L (inches)
0	0	0	0
0,10	4,9	1,93	1 15/16
0,12	7,06	2,78	2 25/32
0,14	9,61	3,784	3 25/32
0,16	12,55	4,94	4 15/16
0,18	15,89	6,255	6 1/4
0,20	19,61	7,72	7 23/32
0,22	23,73	9,343	9 11/32
0,24	28,24	11,12	11 1/8
0,26	33,15	13,05	13 1/16
0,28	38,44	15,135	15 1/8
0,30	44,13	17,374	17 3/8

Měření provedeme takto:

1. experimentátor drží pravítko ve svislé poloze za horní konec s nulou stupnice dole
2. měřená osoba má 0 stupnice v mezeře mezi palcem a ukazováčkem
3. v neočekávaném okamžiku pustí experimentátor pravítko
4. měřená osoba se snaží zachytit padající pravítko co nejdříve
5. reakční doba je u prstů měřené osoby.

F02 Zkrácení reakční doby tréninkem

Reakční doba je významná při startu sprinterů, v šermu a boxu, ve stolním tenise, míčových hrách, motorismu atd. Závisí na typu a stavu nervové soustavy, na typu a intenzitě impulsu, na který se má reagovat, na typu a složitosti reakce a na dalších činitelích.

V literatuře jsou data o zkrácení reakční doby opakovaným cvičením. Nepříliš podstatné zkrácení nastane teprve po velkém počtu opakování reakce. Trénink reakční doby musí být časově koncentrovaný, bez delších přestávek, stabilita jeho účinku bude záviset na řadě činitelů.

počet opakování	reakční doba
25	195
50	176
75	180
100	170
125	166
150	158
200	157
225	158
250	157
275	156
300	156
325	157
350	154

Tuto závislost lze nejlépe aproximovat hyperbolickou funkcí

$$t = n / (0,0066 \cdot n - 0,0585)$$

s korelací $r = 0,99977$. Inverzní závislost pro potřebný počet opakování platí jen v omezeném rozsahu:

$$n = 0,00228 \cdot \exp(1818 / t(\text{ms})) \quad r = 0,965$$

Literatura:

63. Zelený: Acta Univ.Carol., Suppl. IV, 1957, str. 55-59

64. Rujbr Z.: Doba reakce. TPTV 15, 1967, str. 92-105.

F03 Měření frekvence ťukání

V jazyce TurboBasic (Borland International) existuje pozoruhodná funkce MTIMER, dovolující měřit čas na mikrosekundy. Tuto funkci můžeme použít k měření rovnoměrnosti a frekvence ťukání na klávesu. Lze vypočítat průměr, směrodatnou odchylku a variační součinitel a nakreslit graf naměřených časů následujícím programem (v TurboBasicu). Jako vstup musíme vložit jméno, datum narození a datum testu s požadovaným počtem úderů. Po vyčkání ťukáme na klávesu ENTER požadovanou maximální nebo optimální frekvencí až se ozve akustický signál. Tiskárna vytiskne všechny výsledky, klávesa PrtSc vytiskne graf časů. Pak můžeme měřit další osobu.

```
TURBOBASIC !!!
input „jméno,datum naroz,,datum měření „;j$,b$,d$
lprint j$,b$,d$
input „n=„;n: dim t(n)
mtimer
for i=0 to n
input a$: if a$=„„ then let t(i)=mtimer
mtimer: next i
beep: delay 2
for i=1 to n: t=t(i)/1E6: lprint using „###.#####“;t;
s=s+t: k=k+t*t: next i
lprint
p=s/n:sx=sqr((k-s*s/n)/(n-1)):f=1/p
lprint „ p s v% f“
lprint using „###.###“;m,sx,sx/p*100,f
delay 3: screen 9
for i=1 to n
line (0,i*3)-(t(i)/5E3,i*3+3),,B
next i
end
```

Příklad:

```
jméno naroz měřeno
0.242898 0.228034 0.220598 0.205663 0.205685 0.213144 0.220610
0.213108 0.220608 0.220634 0.213091 0.220613 0.205639 0.213137
m s v% f
0.2171 0.0097 4.4707 4.6061
```

Voprsalek	1950	1998					
0.205695	0.213132	0.205685	0.198249	0.205701	0.198228	0.213159	0.198223
0.213146	0.205694	0.190795	0.205703	0.190801	0.205689	0.198239	0.190817
0.183350	0.220604	0.190776	0.205700				
p	s	v%	f				
0.2020	0.0095	4.7120	4.9512				



G. MECHANIKA

G01 Parabolická dráha ve sportu

Parabolická dráha je nejčastějším případem dráhy těžiště buď sportovcova těla nebo letícího předmětu, je-li možno zanedbat odpor vzduchu (viz kapitola I01 – Mezní rychlost pádu). Jsou to tyto případy:

- běžec nebo skokan ve fázi letu (ničeho se nedotýká)
- koule v lehké atletice (ostatní nářadí nikoliv)
- míče s velkou mezní rychlostí na krátké dráze.

V ostatních případech, kdy odporem vzduchu rychle klesá rychlost, (stolní tenis, badminton) se musí počítat dráha jako balistická.

Nejsložitější případy, kdy pohyb ovlivňuje i vztlak vzduchu (hod diskem, skok na lyžích), nedovolují přesnější výpočet dráhy vůbec.

Rovnici dráhy pro vztah mezi souřadnicemi $y = f(x)$ odvodíme nejsnadněji z parametrických rovnic, v nichž parametrem je čas t :

vodorovná souřadnice

$$x = v \cdot \cos \alpha \cdot t$$

svislá souřadnice

$$y = h + v \cdot \sin \alpha \cdot t - 0,5 \cdot g \cdot t^2$$

kde

- v ... počáteční rychlost (m/s)
- α ... počáteční úhel dráhy
- h ... výška počátečního bodu dráhy (m)
- t ... čas (s)
- g ... gravitační zrychlení (9,80665 m²/s)

Čas z první rovnice

$$t = x / v \cdot \cos \alpha$$

dosadíme do druhé a tím jej vyloučíme:

$$\begin{aligned} y &= h + v \cdot \sin \alpha \cdot x / v \cdot \cos \alpha - 4,9033 \cdot x^2 / (v \cdot \cos \alpha)^2 \\ &= h + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - 4,9033 \cdot x^2 / (v \cdot \cos \alpha)^2 \\ &= c + b \cdot x + a \cdot x^2 \end{aligned}$$

Porovnáním posledních dvou rovnic bude

$$\begin{aligned} c &= h \\ b &= \operatorname{tg} \alpha \\ a &= -4,9033 / (v \cdot \cos \alpha)^2 \end{aligned}$$

Pro určitou parabolickou dráhu známe většinou tři dvojice souřadnic těžiště těla nebo míče x , y : pro začátek dráhy, pro místo, blízké středu dráhy a pro konec dráhy (většinou dopad). Z těchto dvojic je snadné vypočítat činitele a , b , c metodou nejmenších čtverců a posledními vzorci vypočítat

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} b \\ v &= (-4,9033 / a \cdot \cos^2 \alpha)^{1/2} \end{aligned}$$

Zajímá-li nás vrchol dráhy, dané rovnicí $y = ax^2 + bx + c$, použijeme derivaci, kterou položíme rovnu 0:

$$y' = 2 \cdot a \cdot x + b = 0$$

Odtud pak

$$x_m = -b / 2a$$

$$y_m = a \cdot x_m^2 + b \cdot x_m + c.$$

Známe-li počáteční rychlost v , jejíž směr je dán úhlem α , pak vodorovná rychlost je $v_x = v \cdot \cos \alpha$, a z vodorovné délky dráhy x_3 můžeme počítat dobu letu: $T = x_3 / v_x$. Pro basketbal je zajímavý i směr dráhy při dopadu. Určíme jej ze složek rychlosti v_y, v_x kde $v_y = v \cdot \sin \alpha - 9,80665 \cdot T$, a vodorovná rychlost $v_x = v \cdot \cos \alpha$ se prakticky nemění. Pak úhel dopadu

$$\text{tg } \alpha = v_y / v_x = (v \cdot \sin \alpha - 9,80665 \cdot T) / v \cdot \cos \alpha$$

Program, který ze tří vložených dvojic souřadnic vypočítá všechny zde uvedené veličiny je tento:

```

PRINT: PRINT
DATA 0,2.2,1.7,5,3.225,3.05
FOR w = 1 TO 3: READ x, y: PRINT x, y: NEXT w
RESTORE
a:
READ x, y: ON ERROR GOTO b
d = d + x: k = x * x: e = e + k: f = f + x * k: g = g + k * k
h = h + y: i = i + x * y: j = j + y * k: n = n + 1: GOTO a
b:
l = e - d * d / n: m = i - d * h / n: o = f - d * e / n: p = j - e * h / n
q = g - e * e / n: r = l * q - o * o: a = (p * l - m * o) / r
b = (m * q - p * o) / r: c = (h - b * d - a * e) / n
PRINT „a,b,c=“; a; „ “; b; „ “; c
u = ATN(b): v = SQR(-4.905 / (a * COS(u) * COS(u)))
PRINT „alfa,v0=“; u * 57.29578; „ “; v
xm = -b / (2 * a): ym = (a * xm + b) * xm + c
PRINT „xm,ym=“; xm; „ “; ym
RESTORE: FOR w = 1 TO 5: READ x: NEXT w
t = x / (v * COS(u)): PRINT „T=“; t
be = ATN((v * SIN(u) - 9.81 * t) / (v * COS(u)))
PRINT „uhel dopadu=“; be * 57.29578
c:
INPUT „x=“; x: y = (a * x + b) * x + c: PRINT „y=“; y: GOTO c
END

```

Poslední část od labelu c dovoluje regresní výpočty bodů trajektorie.

Příklad: skok vysoký přes laťku ve výšce 2.35 bude mít DATA:

x	y	Dostaneme: a,b,c=	-0.406954	1.33827	1.3
0	1.3	alfa,v0 =	53.339032°	5.800937	m/s
1.6	2.4	xm,ym =	1.644688 m,	2.400812 m,	T=1.008141 s,
3.5	1.0				beta= -59.71058°

Příklad: skok daleký 7.8 m může mít DATA:

x	y	Výsledky: a,b,c =	-0.061572	0.371288	1.3
0	1.3	alfa,v0 =	20.369397°	9.520739	m/s
4	1.8	xm,ym =	3.015069 m,	1.859730 m,	T=0.873911 s,
7.8	0.45				beta= -42.035856°

Příklad: vrh koule 20 m:

x	y	Výsledky: a,b,c = -0.049 0.87 2.2
0	2.2	alfa,v0 = 41.023° 13.26 m/s
10	6	xm,ym= 8.877 m, 6.06 m, T= 1.999 s, beta = -55.9°
20	0	

Příklad: trestný hod v basketbalu:

x	y	Výsledky: a,b,c=-0.331228 1.647960 2.0
0	2	alfa,v0= 58.75° 7.418 m/s
2.1	4	
4.225	3.05	xm,ym = 2.48765 m, 4.05 m, T = 1.0979 s, beta= -55,55°

G02 Optimální počáteční úhel parabolické dráhy

Z parametrických rovnic parabolické dráhy

$$x = v \cdot t \cdot \cos \alpha$$

$$y = h + v \cdot t \cdot \sin \alpha - g \cdot t^2 / 2$$

můžeme eliminovat čas $t = x / (v \cdot \cos \alpha)$ a dostaneme vztah mezi x, y :

$$y = h + x \cdot \sin \alpha / \cos \alpha - g \cdot x^2 / (2 \cdot v^2 \cdot \cos^2 \alpha)$$

V místě dopadu $x = L, y = 0$:

$$0 = h + L \cdot \sin \alpha / \cos \alpha - g \cdot L^2 / (2 \cdot v^2 \cdot \cos^2 \alpha)$$

Násobením $2 \cdot v^2 \cdot \cos^2 \alpha$ dostaneme

$$2 \cdot h \cdot v^2 \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot L \cdot v^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = g \cdot L^2$$

S trigonometrickou identitou $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$

$$2 \cdot h \cdot v^2 \cdot \cos^2 \alpha + L \cdot v^2 \cdot \sin 2\alpha = g \cdot L^2$$

Maximum délky L je funkcí počátečního úhlu α a najdeme je derivováním poslední rovnice podle α :

$$-4 \cdot h \cdot v^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2 \cdot L \cdot v^2 \cdot \cos 2\alpha = 0$$

$$h \cdot \sin 2\alpha = L \cdot \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = L / h$$

Optimální úhel

$$\alpha = 0,5 \cdot \operatorname{arctg}(L / h)$$

Tento vzorec byl použit k výpočtu následující tabulky pro vrh koulí:

h(m)	L(m)							
	10	12	14	16	18	20	22	24
2	39,3	40,3	40,9	41,4	41,8	42,1	42,4	42,6
2,1	39,1	40	40,7	41,3	41,7	42	42,3	42,5
2,2	38,8	39,8	40,5	41,1	41,5	41,9	42,1	42,4
2,3	38,5	39,6	40,3	40,9	41,4	41,7	42	42,3
2,4	38,3	39,3	40,1	40,7	41,2	41,6	41,9	42,1

Z tabulky vyplývá pravidlo:

Čím větší délka vrhu a menší výška počátečního bodu, tím více se optimální úhel blíží 45° .

V literatuře najdeme vzorce pro výpočet optimálního úhlu, je-li známa počáteční rychlost v , kterou ale nutno měřit.

Lampe uvádí vzorec
$$\alpha_{\text{opt}} = \arcsin \frac{v}{\sqrt{2 \cdot (v^2 + g \cdot h)}}$$

Townend
$$\alpha_{\text{opt}} = 0,5 \cdot \arccos \frac{g \cdot h}{v^2 + g \cdot h}$$

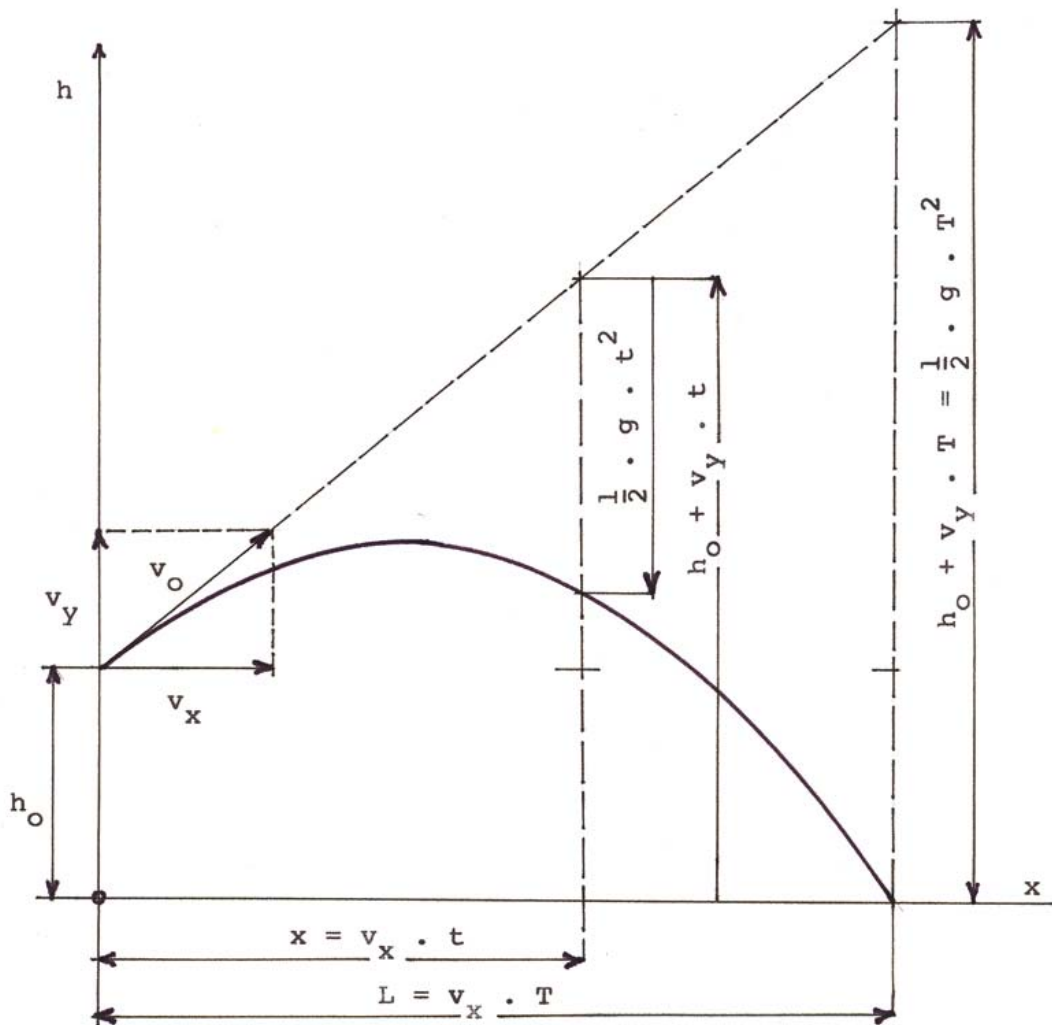
Závěrem je nutné poznamenat, že jediný případ parabolické dráhy je vrh koulí, protože u něj můžeme zanedbat odpor vzduchu. U ostatních hodů je rychlost příliš vysoká a dráha příliš dlouhá, takže je balistická, tzn. vlivem odporu vzduchu o něco zkrácená oproti parabolické.

Literatura:

65. Kopřiva J.: Optimální úhel hodů a vrhů. TPTV 16, 1968, 4, s. 251
66. Lampe E.: Mathematik und Sport. 1956, B. G. Teubner, Leipzig, s. 16
67. Townend M. S.: Mathematics in sport. 1984, Ellis Horwood, Chichester, s. 45.

G03 Parabolická dráha a měření času

V kapitole G01 jsme stanovili parametry parabolické dráhy ze souřadnic 3 bodů této dráhy. Při televizních přenosech nebývá možné stanovit souřadnice druhého bodu někde uprostřed dráhy, zato je snadné změřit dobu letu koule nebo dálkaře. Pokud je dosažena přesnost kolem 0,01 sek, můžeme použít následující metodu. Potřebujeme znát vodorovnou délku parabolické dráhy (měřený výsledek u koule, výsledek dálkaře, korigovaný na sklon při odrazu a dopadu), pokles těžiště během letu H_0 a trvání letu. Pak plyne z Pythagorovy věty



$$(v \cdot T)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2 - H_0 \right)^2 + L^2$$

Odtud počáteční rychlost $v^2 = \frac{\sqrt{(4.905 \cdot T^2 - H_0)^2 + L^2}}{T}$

vodorovná složka rychlosti $v_x = L / T$

počáteční úhel dráhy $a = \arccos(v_x / v)$

Pro počítače bez arc cos $p = (v_x / v)$

a počáteční úhel $a = \arctan \frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$

Použijeme program v Qbasicu:

```
input „H0=„;H
a:
input „L,T=„; L,T
vx=L/T
v=sqr((4.905*T*T-H0)^2+L*L)/T
p=vx/v
a=atn(sqr(1-p*p)/p)*57.296
print „v,alfa=„;v,a
goto a
```

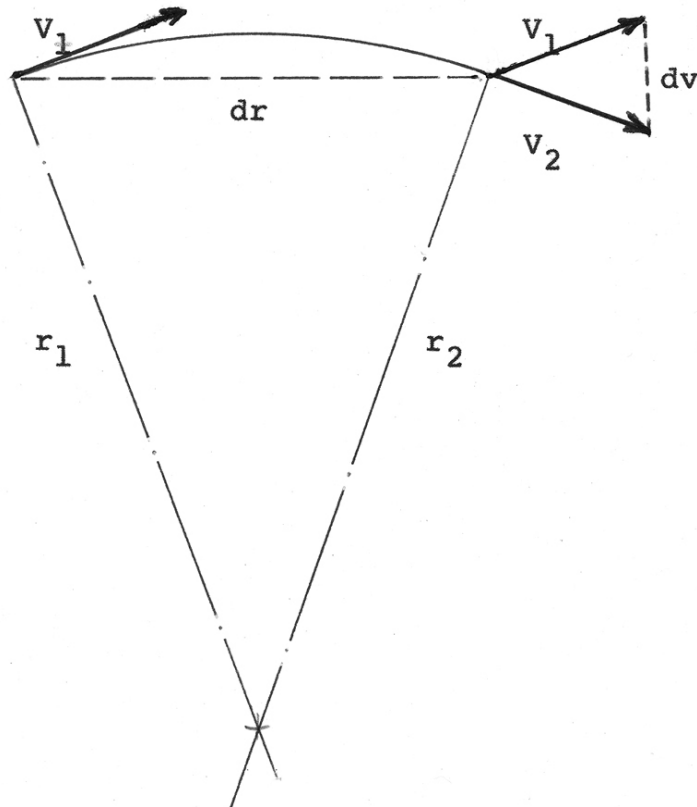
Příklad 1: vítěz ve vrhu koulí na OH 1988 Ulf Timmerman (NDR) měl při vrhu délky $L=22,02$ m naměřen čas $T=1,97$ s. Pro výšku počátečního bodu $H_0 = 2,3$ m dostaneme $v = 14,04$ m/s a úhel $37,24^\circ$. Optimální úhel podle G02 je $42,02^\circ$ a pro něj by byl vrh dlouhý $L = 22,276$ m, tedy o $0,25$ m delší.

Příklad 2: na mistrovství světa 1987 v Římě skočili do dálky Carl Lewis (USA) $L=8,67$ m, $T=0,89$ s, $v=10,418$ m/s, $a=20,75^\circ$ Robert Emmjan (SSSR) $L=8,49$ m, $T=0,97$ s, $v=8,934$ m/s, $a=27,57^\circ$ (před výpočtem byla délka korigována na vodorovnou dráhu těžiště o $dL=0,8$ m, pokles těžiště odhadnut na $0,7$ m)

Ze srovnání rychlostí a úhlů vyplývá známá skutečnost, že Lewis byl sprinterský skokan do dálky, a Emmjan odrazový.

G04 Dostředivá a odstředivá síla

V případě rychlého křivočarého pohybu (běh, rychlobruslení, cyklistika a motocyklové závody, lyžování, hod diskem nebo kladivem apod.) musí existovat dostředivá síla, protože jinak by pohyb byl lineární (Newtonův I. zákon). Avšak Newtonův III. zákon říká, že musí ke každé akci existovat reakce, a tou je odstředivá síla. Výpočet obou těchto sil je poměrně jednoduchý. Z obrázku lze odvodit následující vztahy:



$$\begin{aligned}v_2 &= v_1 + dv \\ r_2 &= r_1 + dr \\ dv/v &= dr/r\end{aligned}$$

Pak

$$dv = v/r \cdot dr$$

a dělením dt

$$a_r = dv/dt = v \cdot dr/r \cdot dt = v^2/r$$

Je-li radiální zrychlení a_r , pak dostředivá síla je

$$F_r = m \cdot a_r = m \cdot v^2/r = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

kde úhlová rychlost

$$\omega = v/r$$

Odstředivá síla je

$$F_c = -F_r$$

Příklad:

běžec s rychlostí $v = 10 \text{ m/s}$ v zatáčce s $r = 31,8 \text{ m}$ a hmotností $m = 75 \text{ kg}$ musí vytvořit dostředivou sílu $F = 75 \cdot 10^2 / 31,8 = 235,8 \text{ newtonů}$ a musí se naklonit směrem do středu zatáčky s úhlem $\alpha = \arctan(F / m \cdot g) = 17,77^\circ$ ke svislé rovině.

Mimořádně velké úhly musí mít motocyklový závodník v zatáčce malého poloměru při vysoké rychlosti:

v	v	poloměr (m)				
km/h	m/s	50	75	100	150	200
100	27,77	57,57	46,37	38,18	27,7	21,4
120	33,33	66,19	56,5	48,57	37,06	29,5
140	38,89	72,04	64,06	57,04	45,8	37,6
160	44,44	75,06	69,6	63,6	53,3	45,2
180	50	78,9	73,6	68,58	59,5	51,9
200	55,56	81	76,6	72,37	64,5	57,5

Tyto úhly musí být vzaty v úvahu při konstrukci pneumatik, stupaček a obrysu motocyklu.

G05 Záznam časového průběhu svalové síly

V řadě explozivních sportovních disciplin urychluje sportovec buď své tělo (skoky) nebo nářadí (vrhy a hody). Používá k tomu výbušné síly, která v krátkém okamžiku vzroste z nuly na maximum a pak klesá zpět na nulu. Bude-li impuls síly

$$I = F(t) \cdot dt$$

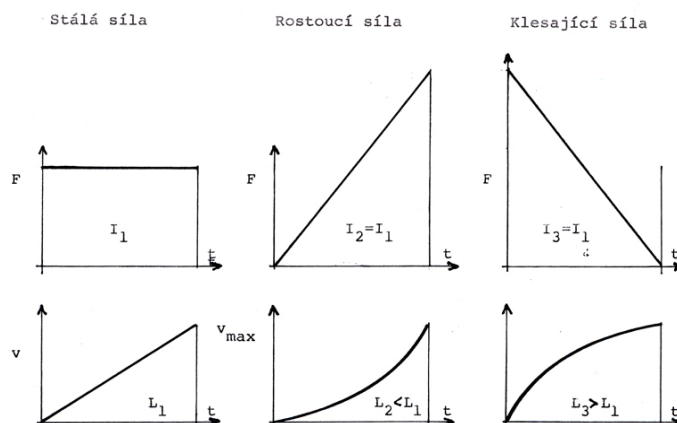
konstantní, pak při jakémkoliv časovém průběhu síly bude konečná rychlost stejná, protože je $v = I / m$. Časový průběh má ale vliv na jinou významnou veličinu - dráhu. Průběh může být

1. časově souměrný
2. s časným maximem
3. s pozdním maximem

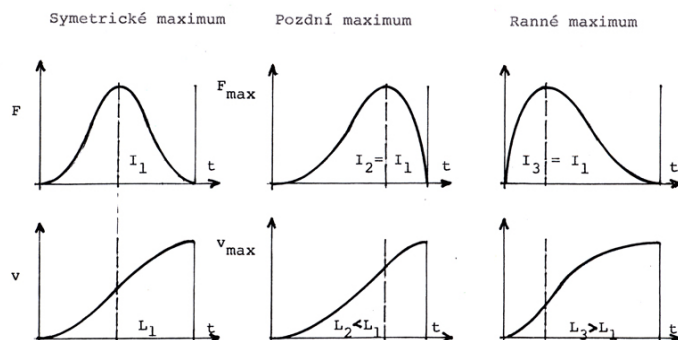
Z grafů vyplývá tento závěr:

čím později dosáhne urychlující síla svého maxima (při stejném impulsu), tím kratší je dráha, potřebná k dosažení stejné maximální rychlosti. Protože v praxi je tato dráha vždy omezená, je pro sportovce výhodné používat sílu tak, aby její maximum bylo dosaženo co nejpozději, tedy explozivně vystupňované. K tomu musí být zaměřen také posilovací trénink.

TEORETICKÉ MODELY



REÁLNÉ MODELY



G06 Moment setrvačnosti

Tento moment, významný pro mechaniku otáčivého pohybu si vysvětlíme analogií mezi pohybem posuvným a otáčivým (translačním a rotačním).

Při posuvném pohybu jsou dráhy všech bodů tělesa stejné, ať přímkové nebo křivkové. Příklady: jízda na saních po přímé dráze, sjezd lyžaře ve stálé poloze.

Při otáčivém pohybu jsou dráhy všech bodů tělesa kružnice se středy na ose otáčení. Příklady: pirueta krasobruslaře ve stálé poloze těla, veletoč gymnasty při stálém držení těla.

Naprostá většina sportovních pohybů jsou pohyby složené z posuvných a otáčivých. Příklady: noha cyklisty se otáčí okolo osy pedálů a posouvá s bicyklem, (výsledná dráha je zkrácená cykloida), tělo skokana do vody se může otáčet okolo podélné osy (vruty) i příčné osy (překoty) a při tom posuvným pohybem padá po parabolické dráze, diskař nebo kladivář provádí otočky kolem své osy a při tom se posouvá k bodu odhodu.

Moment setrvačnosti při otáčivém zrychlování nebo zpomalování má obdobný vliv jako hmotnost při pohybu posuvném:

Posuv		Otáčení	
Síla	$F = m \cdot a$	moment síly	$M = I \cdot \varepsilon$
Zrychlení	$a = F / m$	úhlové zrychlení	$\varepsilon = M / I$

Při posuvném pohybu brání zrychlování hmotnost tělesa m ,
při otáčivém pohybu brání zrychlování moment setrvačnosti I .

Pro těleso, skládající se z jednoduchých částí o hmotě m_i které mají těžiště na poloměru r_i od osy otáčení je moment setrvačnosti dán součtem $I = \sum m_i \cdot r_i^2$

Při tvaru daném nějakou závislostí musíme integrovat:

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

Momenty setrvačnosti lidského těla pro průměrnou velikost těla jsou v tabulce:

Poloha těla	osa	prochází	moment setrvačnosti (kg · m ²)
vzpřímená připažená	svislá	těžištěm	1 – 1,5
vzpřímená upažená	svislá	těžištěm	2 – 2,5
dřep	svislá	těžištěm	2,3
dřep	příčná	těžištěm	4,5 – 6
vzpřímená připažená	příčná	těžištěm	10,5 – 13
vzpřímená připažená	předozad.	těžištěm	12 – 15
vzpřímená vzpažená	příčná	těžištěm	15 – 18
vzpřímená vzpažená	příčná	dlaněmi	85 – 90

Známe-li moment setrvačnosti v nějaké poloze, pak k ose posunutou o vzdálenost d bude moment setrvačnosti $I_d = I + m \cdot d^2$. Tento vzorec vyjadřuje tzv. Steinerovu větu. Tento vztah platí pro poslední dva případy v tabulce, kdy osa byla přemístěna z těžiště do dlaní.

Zatím co hmotnost tělesa sportovec změnit nemůže, moment setrvačnosti změnit lze, jak vidíme z tabulky. Protože platí zákon o zachování energie $E_{kin} = 0,5 \cdot m \cdot v^2$ pro pohyb posuvný, pro pohyb otáčivý platí $E_{kin} = 0,5 \cdot I \cdot \omega^2$

Změní-li se moment setrvačnosti z I_1 na I_2 , změní se úhlová rychlost z ω_1 na ω_2 a protože energie zůstane nezměněna, bude poměr úhlových rychlostí $\omega_1 / \omega_2 = (I_2 / I_1)^{0,5}$.

Tak si lze vysvětlit zrychlení piruety krasobruslaře, který přitáhne paže k tělu a zmenší tak moment setrvačnosti. Podobně může měnit rychlost otáčení skokan do vody: připažením zrychlí vruty, polohou skrčeně pak překoty.

Moment setrvačnosti tedy potřebujeme k vysvětlení některých změn otáčivých pohybů v krasobruslení, gymnastice, skocích do vody a podobných sportech.

G07 Analogie mezi translačním a rotačním pohybem

translace	rotace
a) ustálený stav ($d / dt=0$)	
dráha $s = v \cdot t$	otočení (úhel) $a = w \cdot t$
rychlost $v = s / t$	úhlová rychlost $w = a / t$
zrychlení $a = v / t$	úhlové zrychlení $e = w / t$
setrvačná hmota m	moment setrvačnosti $I = r_2 \cdot dm$
II. Newtonův zákon	
síla setrvačnosti $F = m \cdot a$	moment síly $M = I \cdot e = F \cdot r$
zrychlení $a = F / m$	úhlové zrychlení $e = M / I$
hybnost $H = m \cdot v$	rotační hybnost $H = I \cdot w$
impuls síly $I = F \cdot t$	rotační impuls $R = M \cdot t$
rovnost impulsu a změny hybnosti	
$I = H_2 - H_1 = m \cdot (v_2 - v_1)$	$R = H_2 - H_1 = I \cdot (w_2 - w_1)$
práce síly $A = F \cdot s$	práce momentu $A = M \cdot a$
pohybová (kinetická) energie	
$E = m \cdot v_2 / 2$	$E = I \cdot w_2 / 2$
rovnost práce síly a změny kinetické energie	
$A = E_2 - E_1 = m \cdot (v_{22} - v_{12})$	$A = I \cdot (w_{22} - w_{12})$
výkon síly $N = A / t = F \cdot v$	$N = A / t = M \cdot w$
b) neustálený stav ($d / dt \neq 0$)	
dráha $ds = v(t) \cdot dt$	otočení $da = w(t) \cdot dt$
rychlost $v(t) = ds / dt$	úhlová rychlost $w(t) = da / dt$
zrychlení $a(t) = dv / dt$	úhlové zrychlení $e(t) = dw / dt$
impuls proměnlivé síly $dI = F(t) \cdot dt$	proměnlivého momentu $dI = M(t) \cdot dt$
práce proměnlivé síly $dA = F(t) \cdot ds = F(t) \cdot v(t) \cdot dt$	proměnlivého momentu $dA = M(t) \cdot da = M(t) \cdot w(t) \cdot dt$
výkon $N(t) = dA / dt = F(t) \cdot v(t)$	$N(t) = dA / dt = M(t) \cdot w(t)$

Pozn: d / dt je symbol derivace podle času, d diferenciál, veličiny se závorkou (t) jsou veličiny časově proměnlivé, a proto je nutno jejich součin s jinou veličinou, také proměnlivou integrovat v čase. Součin těchto veličin dává okamžitou hodnotu, také proměnlivou v čase.

G08 Vztah mezi hmotností a svalovou silou sportovce

Tělesná hmotnost při stálé průměrné hustotě těla je úměrná objemu těla

$$m \sim V$$

Objem těla je při stálém tvaru těla úměrný třetí mocnině tělesné výšky

$$V \sim h^3$$

a tedy i hmotnost

$$m \sim h^3$$

Inversně

$$h \sim m^{1/3}$$

Svalová síla při stálém svalovém napětí je úměrná průřezu svalu

$$F \sim A$$

Průřez svalu jako plocha je úměrný druhé mocnině tělesné výšky

$$A \sim h^2$$

a tedy i síla

$$F \sim h^2$$

dosazením

$$F \sim m^{2/3} = m^{0,666666}$$

Úměrnost můžeme nahradit konstantou úměrnosti

$$F = c \cdot m^{0,666666}$$

Konstanta úměrnosti

$$c = F / m^{0,666666}$$

závisí na kvalitě a trénovanosti svalu, věku, pohlaví, teplotě atd. Platnost tohoto vztahu můžeme ověřit na světových rekordech ve vzpírání pro různé váhové kategorie. Použit k tomu můžeme dvě tabulky světových rekordů: jednu k 31. 12. 1992, uzavřenou před změnami váhových kategorií, a druhou k 1. 8. 1998 s novými váhovými kategoriemi. Dostaneme tabulky, v nichž c_1 je konstanta úměrnosti pro trh, c_2 pro nadhoz a c_3 pro dvojboj. Ke dni 31. 12. 1992:

m(kg)	trh	c1	nadhoz	c2	dvojboj	c3
52	121	8,685	155	11,126	272,5	19,560
56	135	9,223	171	11,682	300	20,496
60	152,5	9,950	190	12,397	342,5	22,347
67,5	162,5	9,802	200,5	12,094	355	21,414
75	170	9,559	215,5	12,117	382,5	21,507
82,5	183	9,656	225	11,873	405	21,371
90	192,5	9,585	235	11,701	422,5	21,038
100	200,5	9,306	242,5	11,256	440	20,423
110	210	9,147	250,5	10,911	455	19,819
(135)	216	8,208	266	10,108	475	18,050

Ke dni 1.8.1998:

m(kg)	trh	c1	nadhoz	c2	dvojboj	c3
54	132,5	9,274	162,5	11,374	290	20,300
59	147,5	9,732	170	11,217	307,5	20,290
64	151,5	9,469	187,5	11,719	335	20,937
70	163	9,597	200,5	11,804	360	21,195
76	170	9,475	208	11,593	372,5	20,761
83	180	9,460	214	11,247	392,5	20,628
91	187,5	9,268	228,5	11,294	414	20,463
99	192,5	8,995	235	10,981	420	19,626
108	200	8,819	235,5	10,384	435	19,181
(135)	205,5	7,809	262	9,956	465	17,670

Pozn. nejtěžší váhy nad 110 a 108 kg byly odhadnuty číslem (135).

Z obou tabulek plyne, že:

1. staré a dnes neplatné rekordy k 31.12.1992 byly vyrovnanější, protože průběh hodnot c1, c2, c3 je plynulý. Ukazuje totiž delší historický vývoj, nežli nové rekordy, vyvíjející se teprve několik let (od 1. 1. 1993).

2. nejlepší ukazatele mají střední váhové kategorie mezi 60 - 70 kg, protože u nižších vah je konkurence (počet vzpěračů) statisticky menší, u nejtěžších vah má vliv tělesný tuk, který u středních kategorií neexistuje. Tento závěr potvrzuje i mocinná aproximace závislosti rekordu na hmotnosti. I zde je exponent menší, nežli očekávané 2/3, protože nejtěžší kategorie mají relativně nižší výkony. To platí i v říši zvířat: zatím co mravenec zvedne mnohonásobek své hmotnosti, slon jen zlomek. I tento jev souvisí s mocinnou závislostí

$$F = c \cdot m^{2/3}$$

kterou jako první popsal Lietzke.

Literatura:

68. Lietzke T. H.: Science 124, 1956, č. 3220

G09 Výdej energie při kolísavé rychlosti v lokomočních sportech

V lokomočních sportech (běh, chůze, plavání, lyžování, rychlobruslení, cyklistika, vodní sporty) je výsledkem čas T pro danou trať L , závisící na průměrné rychlosti v

$$T = L / v$$

Zvyšování rychlosti brání kromě vnitřních sil v těle také odpor prostředí, rostoucí s druhou mocninou rychlosti

$$R = k \cdot v^2$$

Práce pro celý závod o délce L je pak

$$A = R \cdot L = k \cdot L^3 / T^2$$

Jestliže na příklad plavec z závodeň na 100 m za 50 s uplave obě půlky stejně rychle (25 + 25 s) nebo s rostoucím rozdílem, musí při tom vykonat práci, úměrnou výrazu

$$A = 50^3 \cdot (1/t_1^2 + 1/t_2^2)$$

t_1+t_2 (s)	A	účinnost %
25+25	400	100
24+26	401,925	99,5
23+27	407,76	98,1
22+28	417,7	95,8

Z tabulky vyplývá pravidlo:

Čím větší jsou změny rychlosti, tím větší je výdej energie a tím nižší je účinnost lokomoce.

Důvodem je nelineární závislost odporu prostředí na rychlosti, která má za následek zvětšení výdeje při zvýšení rychlosti větší nežli je snížení výdeje při poklesu rychlosti.

Kolísání rychlosti během každého cyklu lokomoce (kroku, tempa, záběru vesla či pádla) bývá často mnohem větší nežli mezi jednotlivými úseky závodu. Změříme-li tachografem průběh okamžité rychlosti, můžeme vyvzorkovat časově ekvidistantní rychlosti a pomocí nich vypočítat výdej energie při této kolísavé rychlosti.

Výkon N při okamžité rychlosti v_i je

$$N = R_i \cdot v_i = k \cdot v_i^3$$

Element práce

$$dA = N \cdot dt = k \cdot v_i^3 \cdot dt$$

a pro celý cyklus, trvající dobu T je to součet

$$\sum_0^T A_n = k \cdot dt \cdot \sum v_i^3$$

Účinnost je pak poměr práce při rovnoměrné rychlosti a nerovnoměrné rychlosti

$$e = \frac{A}{A_n} = \frac{k \cdot T \cdot v^3}{k \cdot dt \cdot \sum v_i^3} = \frac{n \cdot v^3}{\sum v_i^3}$$

kde $n = T / dt$ je počet vzorků okamžité rychlosti v_i .

Příklad: americký zanař Templeton s nejlepřím výkonem na 100 m 57,60 s (1976) zaplavaval na tachografu 11.12.1976 trař 100 m za 1:01,4 s následujícím průběhem okamžitě rychlosti:

t(s)	v(m/s)
0,0	1,2
0,05	1,4
0,10	1,65
0,15	1,85
0,20	1,88
0,25	1,85
0,30	1,86
0,35	1,84
0,40	1,72
0,45	1,57
0,50	1,53
0,55	1,54
0,60	1,52
0,65	1,45
0,70	1,36

$$\begin{aligned} \text{průměrná rychlost } v &= 24,22 / 15 = \\ &= 1,6147 \text{ m/s} \\ \text{účinnost } e &= 15 \cdot 1,614733 / 66,204 = \\ &= 0,9536 = 95,36 \% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 15 \quad \Sigma v_i = 24,22 \text{ m/s} \\ \Sigma v_i^3 &= 66,204 \text{ (m/s)}^3 \end{aligned}$$

Vřechny potřebné sumace a výpočty provedeme snadno a rychle programem:

```
data 1.2,1.4,1.65,1.85,1.88,1.85,1.86,1.84,1.72,1.57,1.53
data 1.54,1.52,1.45,1.36
a:
read v: on error goto b
s=s+v:k=k+v*v*v
n=n+1:goto a
b:
vs=s/n
e=n*vs^3/k
print „prům. rychlost, účinnost=„;vs,e
end
```

Z dat v řádcích data dostaneme: prům. rychlost, účinnost = 1,614, 0,9534

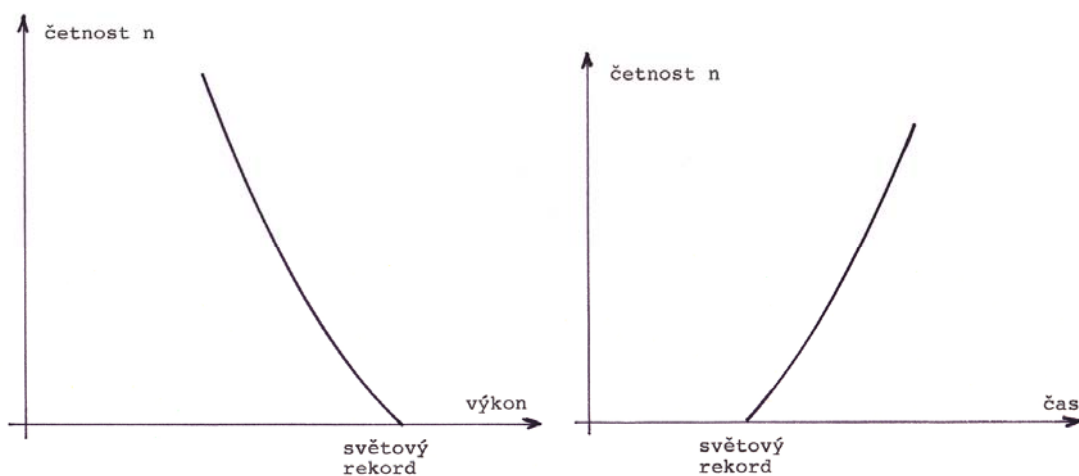
H. SPORTY OBECNĚ

H01 Kvalita a četnost sportovních výkonů

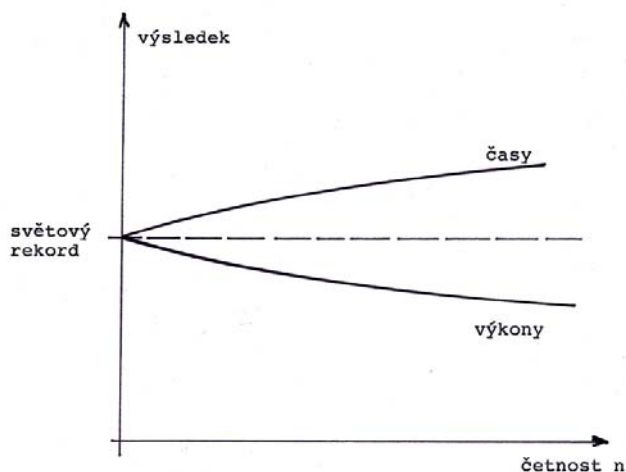
V disciplínách se světovými rekordy rozlišujeme dva případy:

1. disciplíny s maximálními výsledky jako rekordy (skoky, vrhy a hody, vzpírání, hodinovky a jiné časově omezené lokomoce)
2. disciplíny s minimálními časy jako rekordy (běhy, plavání, rychlobruslení, cyklistika)

Rekord je jediný, a s klesající hodnotou výkonů poroste jeho četnost, tj. počet sportovců, kteří výkon dosahují. To vyjádří dva grafy:



Inverzní závislost výsledku na jeho četnosti je na obrázku



Takový model popsali Karvonen a Kihlberg (literatura 69, 70), a odpovídá mu mocnná funkce jako model Parettova rozdělení

$$p = a \cdot n^b$$

kde

- a ... součinitel, blízký světovému rekordu
- b ... exponent blízký nule, kladný pro časy, záporný pro rostoucí výkony
- n ... četnost sportovců
- p ... výsledek (výkon)

Činitele a, b lze vypočítat metodou nejmenších čtverců, což jsme provedli pomocí světového rekordu a několika výkonů, jejichž četnost jsme zjistili pomocí tabulek lehkooatletických výkonů v roce 1989. Dostali jsme tyto výsledky:

běhy	muži	ženy
100m	$9,94 \cdot n^{0.00897}$	$10,74 \cdot n^{0.014605}$
200m	$19,96 \cdot n^{0.009473}$	$22,04 \cdot n^{0.013836}$
400m	$44,27 \cdot n^{0.009312}$	$50,01 \cdot n^{0.01183}$
800m	$103,16 \cdot n^{0.0082404}$	$114,4 \cdot n^{0.01513}$
1500m	$210,55 \cdot n^{0.009415}$	$239,23 \cdot n^{0.012444}$
1 míle	$229,9 \cdot n^{0.010308}$	$255,61 \cdot n^{0.02398}$
3 km	$449,45 \cdot n^{0.01106}$	$518,48 \cdot n^{0.01115}$
5 km	$784,24 \cdot n^{0.00878}$	$899,01 \cdot n^{0.01638}$
10 km	$1628,23 \cdot n^{0.01259}$	$1848,51 \cdot n^{0.017528}$
maratón	$7681,0 \cdot n^{0.009297}$	$8673,0 \cdot n^{0.018033}$
110m př.	$12,92 \cdot n^{0.016344}$	$12,60 \cdot n^{0.0145}$
400m př.	$47,86 \cdot n^{0.011874}$	$53,73 \cdot n^{0.01728}$
3km př.	$485,35 \cdot n^{0.013634}$	
skok vysoký	$244 \cdot n^{-0.01954}$	$204 \cdot n^{-0.018894}$
skok daleký	$870 \cdot n^{-0.020946}$	$730 \cdot n^{-0.02688}$
trojskok	$17,65 \cdot n^{-0.01397}$	$14,52 \cdot n^{-0.03246}$
skok o tyči	$603 \cdot n^{-0.019977}$	
koule	$22,66 \cdot n^{-0.038835}$	$20,78 \cdot n^{-0.05279}$
disk	$70,92 \cdot n^{-0.035875}$	$75,56 \cdot n^{-0.05984}$
oštěp	$87,60 \cdot n^{-0.028854}$	$76,88 \cdot n^{-0.065733}$
kladivo	$82,84 \cdot n^{-0.03142}$	
desetiboj	$8549 \cdot n^{-0.02707}$	sedmiboj: $7007 \cdot n^{-0.045}$
20km chůze	$4734 \cdot n^{-0.01557}$	$5km$ $1225 \cdot n^{-0.02495}$
50km chůze	$13061 \cdot n^{-0.0289}$	$0km$ $2536 \cdot n^{-0.023435}$
4x100m	$38,23 \cdot n^{0.008357}$	$41,87 \cdot n^{0.014494}$
4x400m	$180,99 \cdot n^{0.00731}$	$203,05 \cdot n^{0.013375}$

Pozn.: vzorce pro časy platí pro sekundy! V roce 1990 nebyly ještě běžné ženská tyč, kladivo a 3 km přek.

Souhrnně lze říci, že čím větší absolutní hodnota exponentu, tím rychleji klesá hodnota výkonu s četností výkonu. Nejrychlejší pokles je u ženských vrhů a hodů.

Literatura:

69. Kihlberg J.-Karvonen M. J. Comparison on statistical basis of achievement in track and field events. Research Quarterly, 28, 1957, 3, 244 - 256
70. Kihlberg J. - Karvonen M. J.: Statistical distribution and predictability of top class achievements in track and field sporting events. Wychowanie Fizyczne i Sport, 4, 1960, 145-56
71. Světové tabulky 1989, Praha, ASTAT, 1990

H02 Křivka světových rekordů

Někdy můžeme potřebovat světový rekord v lokomočních sportech na neobvyklé trati. Vypočítat jej ze známých světových rekordů můžeme pomocí aproximační funkce. Osvědčila se aproximace polynomem stupně o 1 nižším, nežli je počet vložených rekordů. Součinitele pro polynom typu

$$t = a_n \cdot L^n + a_{n-1} \cdot L^{n-1} + \dots + a_1 \cdot L + a_0$$

vypočítáme metodou nejmenších čtverců, uvedenou v kap. C05.

Pod tabulkami rekordů jsou uvedeny získané polynomy v Hornerově tvaru:

Atletické rekordy v běhu ke dni 1. 6. 2003

trať (m)	muži	ženy
400	43,18	47,60
800	101,11	113,28
1500	206	230,46
5000	759,36	868,09
10000	1582,75	1771,78

muži: $t = (((0,045261 \cdot L - 0,9127) \cdot L + 6,7922) \cdot L + 137,653) \cdot L - 12,91$
ženy: $t = (((-0,0557106 \cdot L + 0,56279) \cdot L + 1,67246) \cdot L + 161,62) \cdot L - 17,35$

Plavecké rekordy ke dni 1. 6. 2003

trať (m)	muži	ženy
100	47,84	53,77
200	104,06	116,64
400	220,08	243,85
800	459,16	496,22
1500	877,48	952,10

muži: $t = (((0,00150656 \cdot L - 0,06592) \cdot L + 1,00526) \cdot L + 53,63) \cdot L - 6,74$
ženy: $t = (((0,004857 \cdot L) - 0,12006) \cdot L + 0,9155) \cdot L + 60,891) \cdot L - 7,92$

Rychlobruslařské rekordy ke dni 1. 6. 2003

trať (m)	muži	ženy
500	34,32	37,29
1000	67,18	74,06
1500	103,95	114,02
3000	222,75	237,70
5000	374,66	406,91
10000	778,92	

Muži: $t = ((((-0,01062 \cdot L + 0,343936) \cdot L - 3,77254) \cdot L + 17,052) \cdot L + 46,154) \cdot L + 7,433$
Ženy: $t = (((0,411035 \cdot L - 4,5114) \cdot L + 17,345) \cdot L + 54,647) \cdot L + 6,168$

Cyklistické světové rekordy k 1. 6. 2003

trať (km)	muži	ženy
1	58,875	73,377
3		210,764
4	251,114	
10	647,102	731,99
44,767		3600
49,441	3600	

$$\text{Muži: } t = ((-0,000370372 \cdot L + 0,21871) \cdot L + 62,994) \cdot L - 4,337$$

$$\text{Ženy: } t = ((-0,0010248 \cdot L + 0,7843) \cdot L + 65,69) \cdot L + 6,9135$$

Pozn.: uvedené polynomy nepoužíváme mimo rozsah tratí, které byly vloženy. Rekordy byly postiženy zrušením výkonů na speciálních kolech. Přehled jiných aproximačních funkcí uvádí kniha

Literatura:

72. Zaciorskij V. M. Kibernetika, matematika, sport. Moskva, FiS, 1969, str. 94 - 95

H03 Relativní výkonnost žen vůči mužům podle světových rekordů (podle stavu k 15. 8. 2005)

Ženy dosahují nižších výkonů nežli muži z mnoha důvodů, mezi nimiž hlavní jsou menší průřez svalů, jiná stavba těla a hormonální funkce. Nejjednodušší srovnání dává poměr světových rekordů. U výkonů, rostoucích s číselným výsledkem (např. skok vysoký) použijeme poměr

$$r = \text{rekord žen} / \text{rekord mužů} \times 100 (\%)$$

u výkonů, klesajících s rostoucím číselným výsledkem (např. běh na 100 m) naopak

$$r = \text{rekord mužů} / \text{rekord žen} \times 100 (\%)$$

Teoretický přepočítání na jiné kritérium (fysiologický výdej, mechanický výkon nebo práce) by musel být dobře zdůvodněn, aby nebyl subjektivní.

Z poměrů pro jednotlivé rekordy lze vypočítat průměry pro jednotlivé sporty, které tvoří následující pořadí:

1. rychlobruslení	r = 91,67 %	(n = 6 tratí)
2. plavání	r = 90,01 %	(n = 17 disciplín)
3. atletika	r = 88,66 %	(n = 20 disciplín)
4. cyklistika	r = 87,82 %	(n = 9 tratí)
celkem všechny sporty	88,52 %	(n = 52 disciplín)

Vzpírání není možné porovnat pro rozdíly váhových kategorií

Jednotlivé disciplíny, trati nebo váhové kategorie ukazují následující tabulky:

1. rychlobruslení

500 m	34,22 / 37,29	92,0 %
1000 m	1:07,18 / 1:14,06	90,7 %
1500 m	1:46,43 / 1:58,95	91,0 %
3000 m	3:43,95 / 3:57,50	!max! 94,7 %
5000 m	6:14,66 / 6:46,91	92,1 %
10000 m	12:58,92 / 14:22,6	90,3 %
celkem		91,67 %

2. plavání

50 m kr	21,64 / 24,13	89,7 %
100 m kr	47,84 / 53,52	89,4 %
200 m kr	1:44,06 / 1:56,64	89,2 %
400 m kr	3:40,08 / 4:03,85	90,3 %
800 m kr	7:38,65 / 8:16,22	92,4 %
1500 m kr	14:37,89 / 15:52,10	92,2 %
		kraul 90,53 %
50 m df	22,96 / 25,57	89,8 %
100 m df	50,40 / 56,61	89,0 %
200 m df	1:55,22 / 2:05,96	90,7 %
		delfin 89,83 %
50 m zn	24,80 / 28,19	(88,0 %)
100 m zn	53,17 / 59,58	89,2 %

200 m zn	1:54,66 / 2:06,62	90,6 %
		znak 89,27 %
50 m pr	27,18 / 30,57	88,8 %
100 m pr	59,30 / 1:06,20	89,6 %
200 m pr	2:09,04 / 2:21,72	91,1 %
		prsa 90,1 %
100 m pol	53,10 / 1:00,6	87,6 %
200 m pol	1:55,94 / 2:09,72	89,4 %
400 m pol	4:08,26 / 4:33,59	90,7 %
		polohový 90,05 %
celkem		90,01 %

3. atletika

běhy:	60 m	6,39 / 6,92	92,3 %
	100 m	9,77 / 10,49	!max! 93,1 %
	200 m	19,32 / 21,34	90,5 %
	400 m	43,18 / 47,60	90,7 %
	800 m	1:41,11 / 1:53,28	89,3 %
	1000 m	2:11,96 / 2:28,98	88,6 %
	1500 m	3:26,00 / 3:50,46	89,4 %
	2000 m	4:44,79 / 5:25,36	87,5 %
	3000 m	7:20,64 / 8:06,13	90,6 %
	5000 m	12:37,35 / 14:24,68	87,6 %
	10000 m	26:20,31 / 29:31,78	89,2 %
	Hodina	21,101 km/ 18,340 km	86,1 %
	Maratón	2:04:55 / 2:15:25	92,2 %
			běhy 89,80 %
skoky:	vysoký	245 / 209	85,3 %
	daleký	895 / 752	84,0 %
	trojskok	18,29 / 15,50	84,9 %
	tyč	615 / 501	81,5 %
			skoky 84,70 %

vrhy, hody a překážkové běhy nelze srovnávat

chůze: 5 km	18:07,08 / 20:02,60	90,4 %
10 km	38:02,60 / 41:04,0	82,9 %
20 km	1:17:21 / 1:35:41	90,3 %
		chůze 87,87 %
celkem		88,49 %

4. cyklistika

200m let	9,865 / 10,831	91,1 %
500m let	26,325 / 29,655	88,8 %
1000m let	57,224 / 1:05,232	87,7 %
1 km pev	58,875 / 1:13,377	80,2 %
5 km pev	5:27,039 / 6:05,198	89,6 %
10 km	10:47,102 / 12:11,99	88,4 %

20 km	21:23,932 / 24:55,028	85,9 %
Hodina	49,700 km/ 44,767 km	90,1 %
100 km	2:10:08,29 / 2:28:26,26	87,7 %
celkem		87,72 %

Desítka nejlepších žen:

1. Niemannová	3 km rychlobruslení	94,7 %
2. Griffithová	100 m běh	93,1 %
3. Evansová	800 m kraul	92,4 %
4. Privalova	60 m běh	92,3 %
5. Redcliffe	maratón	92,2 %
6. Le Doan	500 m rychlobruslení	92,0 %
7. Jones	200 m prsa	91,1 %
8. Wittyová	1000 m rychlobruslení	90,7 %
9. Egerszegyi	200 m znak	90,7 %
10. Kločková	400 m polohový závod	90,7 %

V první desítce jsou 3 rychlobruslařky, 4 plavkyně a 3 atletky

Resumé:

1. Sporty, v nichž se ženy nejvíce blíží mužským výkonům jsou rychlobruslení, plavání a cyklistika (91 - téměř 94 %)
2. Nejméně se blíží ženy mužům ve vzpírání (65 - 73 %). Ženy nemají předpoklady pro silové sporty.
3. V běžích klesá relativní výkonnost žen s délkou trati (Redcliffová je výjimka), v plavání je tomu naopak. Plavání je výhodné pro vytrvalost díky vodnímu prostředí.
4. Srovnání bylo provedeno jen ve sportech s měřenými výsledky, v jiných sportech nelze podobné objektivní srovnání provést.

H04 Charakteristické rovnice vybraných sportovních disciplin

V mnoha sportovních disciplínách je možno nalézt matematické vztahy mezi výsledkem sportovce a několika hlavními činiteli, určujícími tento výsledek. Tyto rovnice, někdy jen symbolické můžeme nazvat charakteristickými, a v následujícím textu uvedeme některé příklady.

1. sprinterské běhy. Výsledný čas má tři části:

$$t = t_r + t_z + t_v = t_r + \sqrt{2 \frac{s}{a}} + \frac{L_v}{f_k \cdot L_k}$$

t_r ... reakční doba na startu, kterou nelze podstatně zkrátit

t_z ... doba zrychlování, závisí na zrychlování a proto na výbušné svalové síle nohou

t_v ... doba běhu poměrně stálou rychlostí, závisí na součinu délky kroku L_k a frekvence kroků f_k

Sprinter může zkrátit svůj čas, jestliže

a) zkrátí svou reakční dobu

b) zvýší výbušnou svalovou sílu nohou

c) prodlouží délku kroku nebo zvýší frekvenci kroků, nejlépe obojí současně

d) zvýší sprinterskou vytrvalost a udrží tak rychlost déle

2. střední a dlouhé běžecké tratě jsou problémem omezených fyziologických zdrojů energie a vytrvalosti. Běžec musí

a) urychlit na střední rychlost běhu a proto vykonat práci, úměrnou kinetické energii $E = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2$

b) překonávat odpor vzduchu F_o práci $A_o = k \cdot v_s^2 \cdot L$

c) vykonat práci na zvedání těžiště těla při každém kroku

$$A_z = n \cdot m \cdot g \cdot \Delta H$$

n ... počet kroků

m ... hmotnost těla

g ... gravitační zrychlení

ΔH ... zvednutí těžiště při každém kroku

d) vykonat práci na zvedání těžiště při běhu v zatáčce (viz. L06)

e) vykonat práci, spojenou se zrychlováním

Běžec na středních a dlouhých tratích musí

a) být štíhlý, aby zmenšil práci v gravitačním poli

b) optimalizovat délku a frekvenci kroku

c) udržovat stálou rychlost, aby zmenšil ztráty zrychlováním

3. skoky vysoký. Maximální výška laťky, kterou skokan překoná, je součet tří výšek: výšky těžiště těla nad zemí v odrazové poloze, zdvihu těžiště impulsem odrazové síly, a rozdílu mezi výškou laťky a těžiště v nejvyšším bodě $H = H_t + H_{odr} + \Delta H_i$

Skokan do výšky dosáhne velké výšky, jestliže bude mít

a) vysoko těžiště těla, tedy dlouhé nohy

b) nízkou hmotnost těla (štíhlost), aby lépe využil výbušné síly a impulsu této síly

c) dokonalou techniku přechodu nad laťkou

Podrobnější analýza by ukázala význam dalších činitelů (anatomie těla a odrazové nohy, orientace v prostoru při flopu, optimální rychlost rozběhu atd.)

4. skok o tyči. Zde skočená výška je součtem pěti výšek:

- a) výšky těžiště těla při odrazu
- b) zdvihu těžiště těla svislým odrazem
- c) zdvihu tyči, který závisí na rychlosti rozběhu a technice
- d) zdvihu pažemi před puštěním tyče
- e) rozdílu mezi laťkou a obrysem těla

Skokan o tyči musí mít vysoko těžiště těla, velkou svislou odrazovou sílu, co největší rychlost rozběhu a tím i kinetickou energii, kterou uloží do ohýbající se laminátové tyče, laminátovou tyč vysoké pružnosti, aby využil uloženou energii ke stoupání, velkou sílu paží při odrazu od tyče, a dokonalou techniku přechodu přes laťku.

5. vrhy a hody. Platí jednoduché pravidlo: největší vzdálenosti dosáhne vrhač maximální možnou počáteční rychlostí a optimálním počátečním úhlem dráhy náčiní. Pro parabolickou dráhu je optimální úhel (podle G02) $\alpha_{opt} = \frac{1}{2} \arctan(L / H_0)$

L ... vodorovná délka vrhu

H ... počáteční výška dráhy

U parabolických vrhů (koulí) bude výsledek nejlepší, bude-li mít vrhač maximální výbušnou sílu a optimální počáteční úhel dráhy, vždy menší nežli 45° , u ostatních vrhů s balistickou drahou (vlivem odporu vzduchu) musí vrhač natrénovat optimální počáteční úhel, jiný nežli u parabolické dráhy. Zkušenost a technika se silou je nepostradatelná.

6. Plavání a veslování mají společný odpor vody a setrvačnost, takže sportovec musí překonávat součet těchto dvou sil. Většinou bývá setrvačná síla, kterou je nutno překonávat větší, nežli odpor vody:

$$F = F_o + F_s = k \cdot v^2 + m \cdot a$$

Zrychlení a zpždění během každého tempa jsou závislé prakticky jen na plavecké technice, tj. provedení záběrových a přípravných pohybů, odpor vody a tedy i zpžďování závisí hlavně na poloze těla.

Úspěšný plavec musí zvládnout dva hlavní problémy své plavecké techniky: polohu těla s nejmenším možným odporem vody, a záběrové pohyby s maximální a maximálně rovnoměrnou silou a výslednou rychlostí.

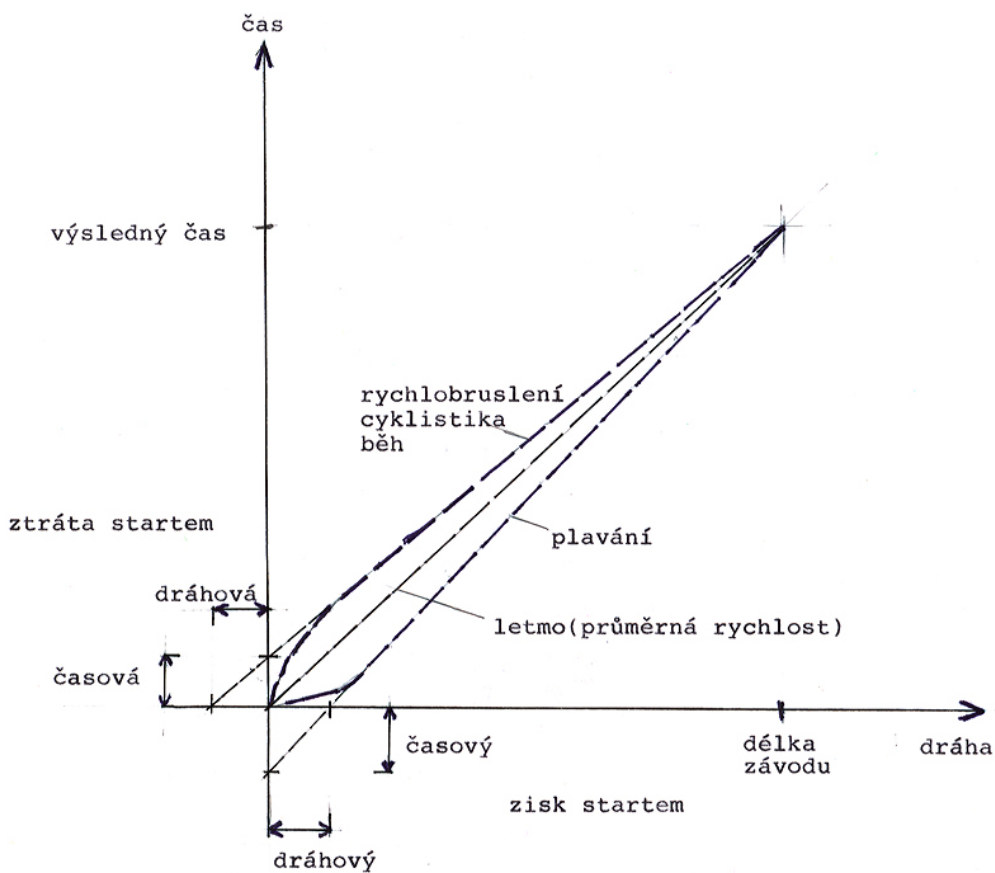
H05 Vliv startu v lokomočních sportech

Ve většině lokomočních sportů začíná závod pevným startem (z klidu), výjimkou jsou jen cyklistické sprinty letmo. U dlouhých tratí má start zanedbatelný vliv na celkový výsledek a proto se zde omezíme jen na krátké závody.

Podle vlivu startu na průběh okamžité rychlosti sportovce musíme rozlišovat

1. sporty, u nichž start a následující zrychlování je pomalejší, než zbytek závodu. Sem patří běh, cyklistika, rychlobruslení, lodní sporty apod.
2. sporty, u nichž start a bezprostředně následující část závodu je rychlejší, nežli zbytek závodu. Sem patří plavání se startovním skokem.

Obr. H05 ukazuje graficky rozdíl mezi těmito dvěma skupinami.



Vynecháme-li startovní reakční dobu, můžeme přibližně lineární částí grafu proložit dvě regresní přímky:

$$L = v_1 \cdot t - L_1 \qquad t = L / v_1 + t_1$$

$$L = v_2 \cdot t + L_2 \qquad t = L / v_2 - t_2$$

kde

- L_1 ... ztráta dráhy startem
- L_2 ... zisk dráhy startem
- t_1 ... ztráta času startem
- t_2 ... zisk času startem

Příklad: Carl Lewis měl na OH 1988 v Soulu na 100 m za 9,92 s následující mezičasy, časy úseků a rychlosti podle tabulky:

L(m)	t(s)	Δt(s)	v(m/s)
10	1,89	1,89	5,29
20	2,96	1,07	9,35
30	3,90	0,94	10,54
40	4,79	0,89	11,23
50	5,65	0,86	11,63
60	6,48	0,83	12,05
70	7,33	0,85	11,76
80	8,18	0,85	11,76
90	9,04	0,86	11,63
100	9,92	0,88	11,36

Z tabulky plyne, že rozběh byl další než 40 m. Proložíme-li úseky a časy od 50 do 100 m regresní přímkou, dostaneme

$$L = 11,3943 \cdot t - 13,53 \quad (\text{s})$$

$$t = L / 11,4045 + 1,1913 \quad (\text{m})$$

Pozn.: regresní činitele nejsou navzájem převrtné hodnoty, protože součinitel korelace není 1 (0,99955).

Ztratil tedy Lewis startem 1,19 s, což dává při průměrné rychlosti ztrátu dráhovou 13,53 m. Pro některé vrcholové sprintery dostaneme:

jméno	čas	čas regresně	dráha regresně
Lewis C.	9,92	$t = 0,087685 \cdot L + 1,1913$	$L = 11,3943 \cdot t - 13,53$
Christie L.	9,97	$t = 0,086 \cdot L + 1,355$	$L = 11,6272 \cdot t - 15,75$
Smith C.	9,99	$t = 0,0866 \cdot L + 1,312$	$L = 11,54 \cdot t - 15,138$
Ženy:			
Griffith-Joyner	10,54	$t = 0,0916 \cdot L + 1,383$	$L = 10,9169 \cdot t - 5,097$
Ashford E.	10,85	$t = 0,0956 \cdot L + 1,283$	$L = 10,46 \cdot t - 13,42$

S těmito údaji můžeme srovnávat kvalitu startu a rozběhu. Plavání se na rozdíl od ostatních sportů vyznačuje vyšší rychlostí po startovním skoku nežli ve zbývající části závodu: ve vzduchu letí plavec po odskoku vodorovnou rychlostí 4 - 6 m/s, zatím co rychlost plavání bývá pod 2 m/s.

Příklad: brazilská štafeta 4x100m kraul na mistrovství světa v krátkém bazéně v prosinci 1995 v Rio de Janeiro zaplavala mezičasy, z nichž můžeme vypočítat lineární regresní rovnice:

jméno	čas	čas regresně	délka regresně
Scherer	47,63	$t = 0,4825 \cdot L - 0,74$	$L = 2,07185 \cdot t + 1,538$
Masura	48,16	$t = 0,4984 \cdot L - 1,85$	$L = 2,00579 \cdot t + 2,006$
Cordera	49,16	$t = 0,51304 \cdot L - 2,205$	$L = 1,94894 \cdot t + 3,305$
Borges	47,47	$t = 0,4912 \cdot L - 1,725$	$L = 2,0359 \cdot t + 3,5146$

U prvního člena štafety se projevuje vliv reakční doby na startu, který z velké části odpadá u dalších, protože mohou startovat podle dohmatu předchozího, tedy s návěštím. Také zde nám absolutní členy rovnic vypovídají o kvalitě startu.

H06 Maximální rychlosti mužů a žen v lokomočních sportech (ke dni 1. 1. 2001)

trať	muži				ženy				
	čas	v (m/s)	v (km/h)	v (mph)	čas	v (m/s)	v (km/h)	v (mph)	r (%)
lyžování									
1 km letmo	14,510	68,92	248,105	154,17	15,35	65,15	234,528	145,73	94,5
cyklistika									
200m letmo	9,865	20,27	72,985	45,35	10,83	18,47	66,476	41,306	91,1
1 km pev.	1:00,148	16,626	59,852	37,19	1:13,38	13,63	49,06	30,484	82,0
10 km	10:47,102	15,454	55,633	34,539	12:11,99	13,66	49,18	30,56	88,4
56,376 km	1 hour	15,66	56,37	35,03	1 hour	13,378	48,159	29,925	85,4
rychl bruslení									
500m	34,76	14,38	51,78	32,18	37,40	13,37	48,13	29,91	92,9
1500 m	1:46,43	14,09	50,74	31,53	1:55,50	12,99	46,75	29,05	92,1
5000 m	6:18,72	13,20	47,53	29,53	6:55,34	12,04	43,34	26,93	91,2
10000 m	13:03,40	12,76	45,95	28,55	14:22,6	11,59	41,73	25,93	90,8
běh									
100 m	9,79	10,21	36,77	22,85	10,49	9,53	34,32	21,32	93,3
200 m	19,32	10,352	37,267	23,157	21,34	9,37	33,74	20,96	90,5
800 m	1:41,11	7,912	28,484	17,70	1:53,26	7,06	25,43	15,80	89,3
1500 m	3:26,00	7,28	26,214	16,289	3:50,46	6,51	23,43	14,56	89,4
5000 m	12:39,36	6,58	23,70	14,73	14:28,09	5,76	20,73	12,88	87,5
10000 m	26:22,75	6,318	22,745	14,133	29:31,78	5,64	20,32	12,62	89,3
42195 m	2:05:42	5,59	20,14	12,51	2:20:47	4,99	17,98	11,17	89,6
veslování									
2 km skif	6:38,97	5,013	18,046	11,216	7:17,09	4,567	16,473	10,23	91,3
2 km osma	5:18,8	6,274	22,585	14,034	5:59,26	5,567	20,04	12,45	88,7
plavání									
50 m	21,64	2,31	8,32	5,17	24,13	2,07	7,46	4,63	89,7
100 m	47,84	2,09	7,53	4,68	53,77	1,86	6,69	4,16	89,0
400 m	3:40,59	1,81	6,53	4,05	4:03,85	1,64	5,91	3,67	90,5
1500 m	14:41,66	1,70	6,125	3,81	15:52,1	1,57	5,67	3,52	92,6

H07 Zpracování mezičasů

V běhu, plavání, cyklistice, rychlobruslení a jiných sportech se měří mezičasy pro úseky stejné délky (kola, bazény, 100 m nebo 1 km). Protože rovnoměrná rychlost je velmi důležitá pro dosažení nejlepšího výkonu, můžeme ji kontrolovat pomocí

- nejlepšího, průměrného a nejhoršího času úseku
- výpočtem variačního součinitele časů úseků v %

Potřebné výpočty a operace provede následující program

```
DATA .553,1.5364,2.5261,3.5159,4.5059,5.4967,6.49,7.4827,8.4743
DATA 9.4691,10.4628,11.4586,12.4623,13.4597,14.4348
INPUT „jmeno,datum „; j$, d$
INPUT „trat(m), cas(m.s),počet mezicasu „; l, t, n
CLS: PRINT j$, d$, l, t: PRINT
mi = 1000000!: p = ma = 0: ll = l / n
FOR i = 1 TO n: READ t
s = 60 * INT(t) + 100 * (t - INT(t))
d = s - p: a = a + d: k = k + d * d
g = g + 1 / (d * d): r = ll / d
IF d < mi THEN LET mi = d
IF d > ma THEN LET ma = d
p = s: PRINT t, s, d, r: NEXT i: PRINT
m = a / n: sx = SQR((k - a * a / n) / (n - 1))
v = sx * 100 / m: e = n * n * n / (a * a) / g
PRINT „min,prum,max,sx „; mi, m, ma, sx
PRINT „var.koef.,ucinnost „; v; „%“; , e
END
```

Příklad: z mezičasů světového rekordu na 1500 m kraul muži (K. Perkins) v prvních řádcích programu dostaneme:

1	55.30
2	58.34
3	58.97
4	58.98
5	59.00
6	59.08
7	59.33
8	59.27
9	59.16
10	59.48
11	59.37
12	59.58
13	60.37
14	59.74
15	57.51
min	55.3
průměr	58.852
max	60.37
var %	3.13

Chceme-li názorně porovnat mezičasy z několika závodů, např. světových rekordů, použijeme k tomu trojrozměrný graf, který je schopen vytvořit systém MAPLE V. Postupujeme takto:

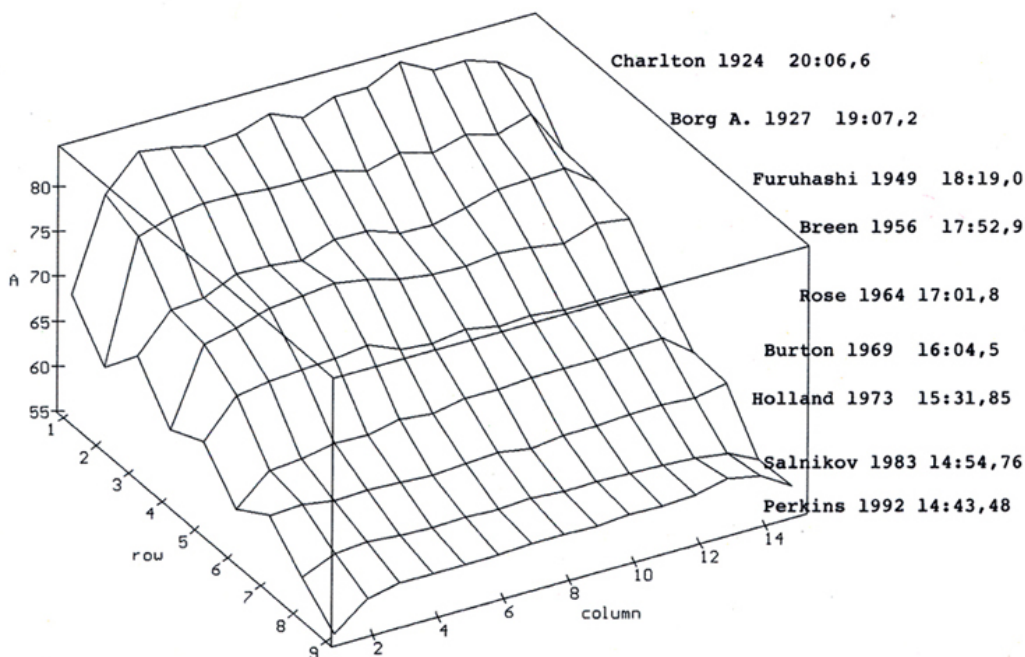
- do programu vepíšeme časy úseků, vypočítané jako v předešlém příkladu, jako jednotlivé vektory v_i
- z vektorů vytvoříme matici dat
- matici dat necháme nakreslit jako trojrozměrný graf na monitoru
- kurzorovými klávesami můžeme graf naklápět a natáčet, až je nejnázornější
- nakonec graf vytiskneme

Následují dva příklady:

- mezičasy světových rekordmanů na 200 m motýl muži, kde jsou uvedeny i příkazy MAPLE V a výsledný graf
- mezičasy na 1500 m kraul muži s výpočtem časů úseků a jejich poměru q_i k průměrnému času úseku a výsledný graf. Tyto poměrné součinitele lze použít k výpočtu analogických časů pro jiný výsledný a tedy i průměrný čas.

Jména plavců, rok a rekord nepíšeme do MAPLE V, ale až na vytisknutý graf psacím strojem.

Mezičasy po 100m při světových rekordech na 1500 m kraul muži

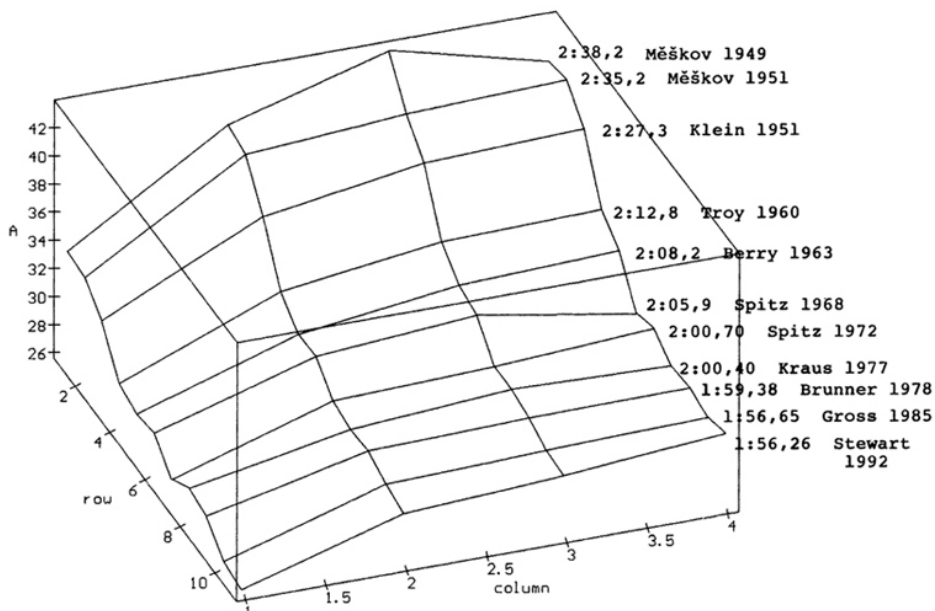


Mezičasy světových rekordů na 200 m motýlek muži (basény 25 i 50m)

V systému MAPLE V zapíšeme :

```
with(plots):
with(linalg):
v1:=[33.4,40.4,43.6,41.2]:      Meškov 1949 2:38,2
v2:=[33.2,40,40.8,41.2 ]:      Meškov 1951 2:35,2
v3:=[31.8,37.2,39,39.3]:      Klein 1951 2:27,3
v4:=[29,33.5,35,35.3]:        Troy 1960 2:12,8
v5:=[28.5,32.1,33.6,34]:      Berry 1963 2:08,2
v6:=[28.8,32.2,33.1,31.2]:    Spitz 1968 2:05,9
v7:=[27.12,30.67,31.11,31.8]: Spitz 1972 2:00,70
v8:=[28.18,30.28,31.14,30.8]: Kraus 1977 2:00,40
v9:=[27.26,30.46,30.80,30.86]: Brunner 1978 1:59,38
v10:=[26.33,29.74,30.15,30.43]: Gross 1985 1:56.65
v11:=[25.97,29.35,30,30.94]:  Steward 1992 1:56,26
m:=stack(v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7,v8,v9,v10,v11):
matrixplot(m);
```

Světové rekordy v plování 200 m motýlek - mezičasy po 50 m



A.Borg 2.9.1927				S.Holland 8.9.1973			K.Perkins 31.7.92			
i	l_i	t_i	q_i	l_i	t_i	q_i	l_i	t_i	q_i	i
1	1:03,2	1:03,2	0,8264	1:02,18	1:02,18	1,0009	55,30	55,30	0,9389	1
2	2:20,-	1:16,8	1,0042	2:04,66	1:02,48	1,0058	1:53,64	58,34	0,9905	2
3	3:38,-	1:18,-	1,0199	3:06,58	1:01,92	0,9967	2:52,61	58,97	1,0012	3
4	4:56,5	1:18,5	1,0264	4:08,49	1:01,91	0,9966	3:51,59	58,98	1,0014	4
5	6:15,-	1:18,5	1,0264	5:10,41	1:01,92	0,9967	4:50,59	59,00	1,0017	5
6	7:33,-	1:18,-	1,0199	6:12,15	1:01,74	0,9938	5:49,67	59,08	1,0031	6
7	8:51,-	1:18,-	1,0199	7:14,08	1:01,93	0,9969	6:49,00	59,33	1,0073	7
8	10:09,-	1:18,-	1,0199	8:16,27	1:02,19	1,0011	7:48,27	59,27	1,0063	8
9	11:26,-	1:17,-	1,0068	9:17,86	1:01,59	0,9994	8:47,43	59,16	1,0044	9
10	12:44,-	1:18,-	1,0199	10:19,94	1:02,08	0,9993	9:46,91	59,48	1,0099	10
11	14:01,-	1:17,-	1,0068	11:22,00	1:02,06	0,9990	10:46,28	59,37	1,0080	11
12	15:19,-	1:18,-	1,0199	12:24,43	1:02,43	1,0049	11:45,86	59,58	1,0116	12
13	16:36,-	1:17,-	1,0068	13:26,82	1:02,39	1,0043	12:46,23	60,37	1,0250	13
14	17:54,2	1:18,2	1,0225	14:29,06	1:02,24	1,0019	13:45,97	59,74	1,0143	14
15	19:07,2	1:13,-	0,9545	15:31,85	1:02,79	1,0107	14:43,48	57,51	0,9764	15
t_p	1:16,48			1:02,123			58,8987			
s	3,80			0,312			1,1813			
v%	4,96			0,503			2,0056			
t_{min}	1:03,2	0,8264		1:01,59	0,9913		55,30	0,9389		
t_{max}	1:18,5	1,0264		1:02,79	1,0107		60,37	1,0250		
Δ	15,3	0,2000		1,20	0,0194		5,07	0,0861		
		(20%)			(1,94%)			(8,61%)		

H08 Kvantitativní kritérium vytrvalosti

Vytrvalost je definována jako schopnost pracovat intenzivně po dlouhou dobu vzdor únavě. Je to tedy kombinovaná vlastnost fyziologicko - psychologická.

Stroj (automobil, motorový člun, letadlo, ...) může udržovat svou rychlost po dlouhou dobu, protože únava nehraje žádnou roli.

Člověk jako fyziologický „stroj“ musí překonávat únavu, která roste s intenzitou a trváním zátěže. Žádný sportovec není schopen udržet vysokou rychlost po neomezenou dobu, a časy pro delší trati porostou rychleji, nežli délka trati.

Na příklad světový rekordman etiopský běžec Haile Gebreselasie dosáhl těchto nejlepších časů:

trať (km)	čas (m:s)	čas (s)	rychlost (m/s)
0,8	1:50,39	110,39	7,25
1,5	3:31,76	211,76	7,08
2	4:52,86	292,86	6,83
3	7:25,09	445,09	6,74
5	12:39,36	759,36	6,58
10	26:22,75	1582,75	6,32

Jeho aproximační funkce, vhodná pro vztah mezi délkou trati a časem v sekundách se ukázala $t = t_1 \cdot L^n$

Vypočítáme-li metodou nejmenších čtverců čas t_1 pro jednotkovou trať 1 km a exponent n , dostaneme pro Gebreselasieho vztah

$$t = 139,54 \cdot L^{1,05469}$$

a součinitel korelace této funkce s tabulkou bude $r = 0,999974$. Součinitel t_1 je čas na 1 km v sekundách, tedy 2:19,54 v minutách a sekundách. To je vynikající ukazatel rychlosti tohoto vytrvalce.

Exponent $n = 1,05469$ ukazuje, jak rychle se zhoršují časy s délkou trati, a je to tedy ukazatel vytrvalosti. U stroje by bylo $n = 1$, u sportovců jsme vyhodnocením velkého množství běžců, plavců, cyklistů a rychlobruslařů našli tyto hodnoty:

n	vytrvalost
1 - 1,04	velmi vysoká
1,05-1,1	vysoká
1,2 -1,4	střední
1,5 -1,8	nízká
1,9 a více	velmi nízká

Nejvyšší vytrvalost, tedy nejnižší hodnotu exponentu n jsme našli v plavání u australského světového rekordmana Stephena Hollanda - $n = 1,013$. Vysvětlení podává fyziologie práce. V plavání je lidské tělo vodou chlazený „stroj“ a může se snadno zbavovat odpadového tepla, což jiné sporty nedovolují.

V cyklistice, kde závodník dosahuje velmi vysokých rychlostí po podstatně delším zrychlování nežli v jiných sportech, má exponent někdy překvapivě nízkou hodnotu, a také u rychlobruslení jsou časy na 1 km často lepší, nežli dvojnásobek času na 500m. Musíme tedy exponent interpretovat opatrně a hlavně srovnávat s jinými případy. Program pro výpočet t_1 , n pomocí aproximace mocninnou funkcí následuje.

Literatura:

73. Kopřiva J. Kvantitativní měřítko vytrvalosti. Teor. praxe. těl.vých.,35, 1987, č. 5, str. 271-274

74. Kopřiva J. Rychlostní a vytrvalostní složka výkonnosti v lokomočních sportech. Teor. praxe těl.vých. 38, 1990, č. 10, str. 603-

```
DATA .8,1.5039,1.5,3.3176,2,4.5286,3,7.2509,5,12.3936,10,16.2275
```

```
a:
READ x, t: ON ERROR GOTO v
y = 60 * INT(t) + 100 * (t - INT(t))
x = LOG(x): y = LOG(y)
sx = sx + x: kx = kx + x * x
sy = sy + y: ky = ky + y * y
xy = xy + x * y: n = n + 1: GOTO a
v:
j = kx - sx * sx / n
k = ky - sy * sy / n
c = xy - sx * sy / n
b = c / j
a = (sy - b * sx) / n: a = EXP(a)
r = c / SQR(j * k)
PRINT „t1,n,r=“; a; „ “; b; „ “; r
b:
INPUT „l=“; l
t = a * l ^ b
m = INT(t / 60)
s = t - 60 * m
PRINT „t=“; m; „:“; s
GOTO b
END
```

Z dat, uvedených v řádku DATA dostaneme výsledek, uvedený v textu. Pro některé další světové rekordmany uvádíme data a vyhodnocení:

Plavec Grant Hackett, Austrálie, světový rekordman na 1500 m kraul s osobními rekordy:				
200m	1:46,11	$t = 51,72 \cdot L^{1,048}$	regresní hodnoty:	1:46,94
400m	3:42,51		$r = 0,99993$	3:41,11
800m	7:42,51			7:37,18
1500m	14:34,56			14:43,48
Rychlobruslař Jochem Uytdehage, Holandsko				
1,5 km	1:44,57	$t = 68,10 \cdot L^{1,05864}$	regresní hodnoty	1:44,61
5 km	6:14,66		$r = 0,99999954$	6:14,22
10 km	12:58,92			12:59,14
Cyklista Chris Boardman, Velká Británie				
4 km	4:11,114	$t = 64,235 \cdot L^{0,99968}$	regresní hodnoty	4:16,82
5km	5:27,039		$r = 0,99990$	5:21,01
10km	10:47,102			10:41,87
20km	21:23,932			21:23,46
56,3759 km	1 hod.			1:00:16,69

V tomto případě jsou časy kromě 4 km z jediného závodu - hodinovky. Proto klesl exponent pod 1,00.

H09 Zlepšování sportovních výsledků v čase

Různé sportovní disciplíny se zlepšují různě rychle. Tato rychlost je dána povahou disciplíny. Na příklad skok o tyči se může zdokonalovat mnohem rychleji, nežli běh na 100 m. Rychlost zlepšování lze popsat relativním zlepšením v % za určitou dobu, na příklad rok.

Relativní zlepšení výsledku v_1 na v_2 je

$$z = 100 \cdot (v_2 - v_1) / r_1$$

Čas mezi dvěma daty v dd.mm.rrrr (den.měsíc.rok) přepočítáme na roky a jejich desetinné zlomky pomocí vzorce

$$t = r_2 - r_1 + (m_2 - m_1) / 12 + (d_2 - d_1) / 365$$

Malé chyby z výpočtu s měsíci stejné délky můžeme zanedbat. Procentní zlepšení za 1 rok je

$$P = z / t$$

Tyto výpočty lze provést následujícím programem:

```
a:
INPUT „dd.mmrrrrr 1“; a
INPUT „vysledek 1(sek nebo m) „; b
INPUT „dd.mmrrrrrr 2“; c
INPUT „vysledek 2(sek nebo m)“; d
d1 = INT(a): m = 100 * (a - d1)
m1 = INT(m): r1 = 10000 * (m - m1)
d2 = INT(c): m = 100 * (c - d2)
m2 = INT(m): r2 = 10000 * (m - m2)
t = r2 - r1 + (m2 - m1) / 12 + (d2 - d1) / 365
z = (d - b) / b
p = z / t * 100
PRINT „zmena % za rok „; p
PRINT: GOTO a
END
```

	muži		p	ženy		p
100 m	10,8	17.7.1900		13,4	1.9.1917	
	9,78	14.9.2002	-,0913% / r	10,49	16.7.1988	-,306% / r
200 m	21,6	31.8.1904		27,8	28.8.1922	
	19,32	2.9.1996	-,115% / r	21,34	29.9.1988	-,351% / r
400 m	50,4	7.6.1867		1:01,9	15.9.1945	
	43,18	26.8.1999	-,108% / r	47,60	6.10.1985	-,576% / r
800 m	1:56,0	1.9.1904		2:30,2	20.8.1922	
	1:41,11	24.8.1997	-,138% / r	1:53,28	26.7.1983	-,403% / r
1 km	2:32,3	22.6.1913		3:08,2	15. 8. 1926	
	2:11,96	5.9.1999	-,154% / r	2:28,98	25.8.1996	-,297% / r
1,5 km	4:16,8	20.5.1845		4:37,8	(1.7).1946	
	3:26,00	14.7.1998	-,130% / r	3:50,46	11.9.1993	-,361% / r
1 míle	4:56,0	(1.7).1864		4:59,6	(1.7).1954	
	3:43,13	7.7.1999	-,188% / r	4:12,56	14.8.1996	-,372% / r
2 km	5:30,4	16.6.1918		5:43,94	17.4.1976	
	4:44,79	7.9.1999	-,170% / r	5:25,36	9.7.1994	-,296% / r
3 km	8:36,8	12.7.1912		9:23,4	(1.7).1971	
	7:20,67	1.9.1996	-,175% / r	8:06,11	2.9.1993	-,618% / r
2 míle	9:09,6	11.6.1904				

	7:58,62	20.7.1997	-,139% / r			
5 km	14:36,7	10.7.1912		15:52,27	(15).4.1977	
	12:39,36	13.6.1998	-,155% / r	14:28,09	23.10.1997	-,436% / r
10 km	30:58,8	16.11.1911		34:01,4	(1.7).1975	
	26:22,75	1.6.1998	-,173% / r	29:31,78	8.9.1993	-,726% / r
1 hodina	18555	28.7.1884				
	21101	30.3.1991	+,128% / r			
Maratón	2:58:50	10.4.1896		3:15:22,8	15).5.1967	
	2:05:38	14.4.2002	-,281% / r	2:15:25	12.4.2003	-,854% / r
110m př.	14,4	29.5.1920		100m 13,2	(15).6.1965	
	12,91	20.8.1993	-,141% / r	12,21	20.8.1988	-,323% / r
400 m př.	55,0	22.7.1908		56,83	(1.7).1973	
	46,78	5.8.1992	-,178% / r	52,61	11.8.1994	-,351% / r
3 km př.	10:47,8	22.7.1908		9:48,88	31.7.1999	
	7:53,17	16.8.2002	-,287% / r	9:16,51	27.7.2002	-1,445% / r
Skok vysoký	197	(1.7).1895		155	2.8.1926	
	245	27.7.1993	+,248% / r	209	30.8.1987	+,570% / r
Skok daleký	761	5.8.1901		516	6.8.1922	
	895	30.8.1991	+,195% / r	752	11.6.1988	+,694% / r
Skok o tyči	330	10.4.1896		375	(15).7.1988	
	615	21.2.1993	+,891% / r	481	9.6.2001	+2,17% / r
Trojkok	15,39	31.7.1909		13,79	(1.7).1985	
	18,29	7.8.1995	+0,219% / r	15,50	10.8.1995	+1,226% / r
Koule	14,81	31.8.1904		10,84	28.5.1927	
	23,12	21.5.1990	+,654% / r	22,63	7.6.1987	+1,811% / r
Disk	34,04	12.9.1896		34,15	20.5.1926	
	74,08	6.6.1986	+1,310% / r	76,80	9.7.1988	+2,009% / r
Oštěp	54,82	17.7.1908		35,49	11.7.1926	
	98,48	25.5.1996	+,906% / r	80,00	9.9.1988	+2,016% / r
Kladivo	49,73	16.7.1900		48,06	27.4.1987	
	86,74	30.8.1986	+,864% / r	76,07	29.8.1999	+4.59% / r

H10 Dlouhodobé tabulky sportovních výkonů

Dlouhodobé tabulky deseti (nebo více) nejlepších výkonů všech dob obsahují nejlepší výkony bez ohledu na rok výkonu. Na příklad v roce 1968 skočil na OH v México City Bob Beamon světový rekord ve skoku dalekém výkonem 890 cm. Koncem tohoto roku platila tato dlouhodobá tabulka:

pořadí	invertované pořadí	jméno	výkon (cm)	rok
1	10	Beamon	890	1968
2	9	Boston	835	1965
3	8	Ovanesjan	836	1967
4	7	Davies	825	1968
5	6	Brown	821	1949
6	5	Beer	819	1968
7	4	Steele	818	1948
8	3	Ahey	817	1962
9	2	Hopkins	816	1964
10	1	Robinson	816	1965

Z této tabulky můžeme vypočítat řadu zajímavých ukazatelů:

1.aritmetický průměr $m = \Sigma x / 10 = 829,2$ cm ukazuje stav disciplíny a při srovnání s jinými roky její vývoj. Mohl by také sloužit jako základní údaj při návrhu bodovacích tabulek pro skok daleký.

2.směrodatná odchylka $s_x = 22,55$ cm je mírou rozptýlení výkonů, ale nehodí se ke srovnávání, protože má rozměr cm a závisí na zvolených jednotkách.

3.variační součinitel $v \% = 100 \cdot s_x / m = 2,72$ %. Jím můžeme srovnávat rozptýlení výkonů v různých disciplínách: u nových a mladých disciplin (skok o tyči žen) bývá větší (přes 2 %), u starých a přirozených disciplin (běh 100 m) bývá malý (i pod 0,5 %).

4.poslední výkon v tabulce je současně limitem dalších výkonů v dalších letech vývoje.

5.číselný histogram nahrazuje grafický, a říká, kolik výkonů spadá do 10 stejně širokých intervalů mezi nejlepším a nejhorším výkonem. V uvedené tabulce je rozpětí výkonů $890-816 = 74$ cm. 10 intervalů po 7,4 cm je pak obsazeno takto: 10000 000216.

první jednička	světový rekord (890 cm)
osmá dvojka	výkony 835,835 cm
devátá jednička	výkon 825 cm
desátá šestka	výkony 821-816 cm.

Rovnoměrně rozdělené výkony by měly histogram 11111 11111.

Největší odstup od ostatních: histogram 10000 00009

Nejmenší odstup od ostatních 90000 00001.

Kromě tohoto histogramu musíme vzít v úvahu i variační součinitel.

Beamon i Griffith-Joynerová (100m běh 10,43 s) mají stejný histogram, ale liší se podstatně variačním součinitelem: Beamonova tabulka má $v = 2,72 \%$, Griffith-Joynerové $v = 1,03 \%$. Proto je Beamonův výkon výjimečnější a byl také nazván „skokem do 21. století“.

6.index výjimečnosti přepočítává histogram na jediné číslo využitím pořadí v tabulce. Číslo pořadí násobíme stejnohlým číslem histogramu a součiny sečteme:

Beamon má $1 \times 1 + 2 \times 8 + 1 \times 9 + 6 \times 10 = 86$.

Histogram s rovnoměrným rozdělením 11111 11111 by dal 51, maximální 10000 00009 dá index 91, minimální 90000 00001 dává index 10.

7.ukazatel historického významu sportovce dostaneme pomocí inverzního pořadí (viz tab.). Sečteme inverzní pořadí sportovce za celou dobu, po kterou se vyskytoval v tabulkách. Na příklad Beamon se výkonem 890 cm zařadil na první místo, kde zůstal do roku 1990, tedy 23 let. Součin s 10 body za první místo dává 230 bodů

V letech 1991-2000 (10 let) byl druhý po 9 bodech, celkem 90 bodů

Celkový součet k 1. 1. 2001 je 320 bodů a ještě v budoucnosti poroste, dokud Beamon nevypadne z tabulky. Tento ukazatel pomáhá najít nejvýznamnějšího sportovce minulosti, neuvažujeme-li jeho úspěchy na olympijských hrách, mistrovství světa nebo Evropy či počet světových rekordů a jiné skutečnosti.

Literatura:

75. Kopřiva J.: Bodování a vývojová tabulka sportovních výsledků Teor. praxe těl. vých. 26, 1978, č.10, str.637-639

Popsané ukazatele snadno vypočítáme programem:

```
data x1,x2,.. x10
mi=1E6:ma=0:dim m(10),c(10)
for i=1 to 10
read m(i):s=s+m(i)
k=k+m(i)*m(i)
if m(i)<mi then mi=m(i)
if m(i)>ma then ma=m(i)
next i
m=s/10: w=(ma-mi)/9.999
for i=1 to 10
r=int((m(i)-mi)/w)+1
c(r)=c(r)+1: next i
sx=sqr((k-sx*sx/10)/9): v=100*sx/m
print „prům,sx,v%=",m,sx,v
if m(1)<m(10) the goto a
for i=10 to 1 step -1
print c(i);:next i:end
a:
for i=1 to 10
print c(i);:next i
end
```

H11 Zdánlivá velikost branek a terčů

Sportovec, střílející na branku nebo terč v míčových hrách nebo střeleckých disciplínách má větší naději na zásah, jestliže branka nebo terč jsou

1. velké
2. blízko
3. kolmo na směr míče nebo střely či šípu.

Při kolmém pohledu se jeví zdánlivá šířka branky úměrná úhlu $\alpha = \text{šířka} / \text{vzdálenost}$. Výška branky se analogicky jeví jako $\beta = \text{výška} / \text{vzdálenost}$. Plocha branky je jeví jako úměrná součinu

$$\gamma = \alpha \times \beta = \text{šířka} \times \text{výška} / \text{vzdálenost}^2$$

Tak je ale definován prostorový úhel, který měříme ve steradiánech (srad). Pro míčové hry můžeme počítat prostorové úhly branek z místa volných nebo trestných kopů či hodů, pro střelecké sporty prostorové úhly terčů ze známých vzdáleností. Zde jsou výsledky:

SPORT	branka	plocha	vzdálenost	prost. úhel (srad)
kopaná	7,32 × 2,44 m	17,84 m ²	11 m	0,147416
halový kop.	3 × 2 m	6 m ²	7 m	0,12245
házená	3 × 2 m	6 m ²	7 m	0,12245
hokej	1,83 × 1,22 m	2,2297 m ²	?	
pozemní hokej	3,66 × 2,14 m	7,8324 m ²	6,4 m	0,19122
kolová	2 × 2 m	4 m ²	4 m	0,25
vodní pólo	3 × 0,9 m	2,7 m ²	4 m	0,16875

Sřelecké sporty:	terč D(m)	desítka d(m)	vzdálenost L(m)	prost. úhel srad (x10 ⁴)	desítky srad (x10 ⁷)
lukostřelba	1,22	0,061	90	1,443	3,608
lukostřelba	1,22	0,061	70	2,386	5,964
ženy	1,22	0,061	60	3,247	8,118
krátké vzdál.	0,80	0,05	50	2,011	7,754
			30	5,585	21,82
libovolná pistole	0,5	0,05	50	0,7854	7,854
velkorážní pistole	0,5	0,05	25	3,142	31,42
standardní pistole	0,5	0,05	25	3,142	31,42
vzduchová pistole	0,156	0,012	10	1,911	11,31
malorážka	0,1624	0,0124	50	0,08268	0,4831
standardní puška	1	0,1	300	0,08727	0,8727
vzduchovka	0,046	0,001	10	0,1662	0,0077
skeet	0,11	19,2	0,2578		
baterie	0,11	15	0,4224		

Při šikmých úhlech je nutné násobit prostorový úhel kosinem úhlu, měřeného od kolmice. Volný hod v košíkové je analyzován v kapitole míčových her.

H12 Vyhodnocení intervalového tréninku v lokomočních sportech

Hledá-li trenér nebo sportovec souvislost mezi tréninkem a závodním výkonem, je na jedné straně poměrně složitý proces tréninkový, který lze popsat řadou parametrů, a na druhé straně poměrně jednoduchý výsledek závodu. Aby se složitost obou srovnávaných informací přiblížila, je nutné popsat tréninkovou jednotku zmenšeným počtem ukazatelů s vysokým informačním obsahem. Ty musí tréninkový proces vyhodnotit kvantitativně i kvalitativně.

Kvantitu intervalového tréninku lze popsat délkou úseků, jejich počtem a celkovou délkou nebo dobou trvání tréninku.

Kvalitu intervalového tréninku popisuje buď vynaložené úsilí nebo rychlost lokomoce. Protože zatím nebylo nalezeno žádné přijatelné stanovení nebo dokonce měření úsilí, zůstává měřítkem kvality nebo intenzity tréninku poměr rychlosti tréninkové k závodní. Intensitu závodu položíme rovnu jedničce (100 %). Abychom nemuseli rychlost počítat, použijeme přímo časů nebo průměrů časů v obráceném poměru:

$$i = \left(\frac{v_{tr}}{v_{zav}} \right)^3 = \left(\frac{t_{zav}}{t_{tr}} \right)^3$$

Třetí mocninu lze zdůvodnit fyziologicky, protože se stejnou mocninou rychlosti roste výdej energie. Plyne to z fyziologických měření, jejichž výsledky uvádějí knihy o fyziologii sportu. Např. [77] uvádí pro různé sporty tabulky dvojic rychlost-výdej, z nichž aproximací metodou nejmenších čtverců dostaneme řadu funkcí, které s vysokou korelací nahrazují experimentální data:

Běh	$N(\text{kW}) = 0,58 \cdot \exp(0,039 \cdot v^2)$	$r=0,996$
Chůze	$N(\text{kW}) = 0,105 \cdot \exp(0,853 \cdot v)$	$r=0,9983$
Plavání		
Kraul	$N(\text{kW}) = 0,439 \cdot v^{3,02}$	$r=0,9949$
Znak	$N(\text{kW}) = 0,385 \cdot v^{4,02}$	$r=0,9987$
Delfin	$N(\text{kW}) = 0,89 \cdot v^{2,27}$	$r=0,9995$
Prsa	$N(\text{kW}) = 1,184 \cdot v^{2,097}$	$r=0,999$
cyklistika	$N(\text{kW}) = 0,0103 \cdot v^{1,3557}$	$r=0,996$
rychlobruslení	$N(\text{kW}) = 0,00423 \cdot v^{1,6777}$	$r=0,994$

Práce, vykonaná v n-úsecích, trvajících t sekund je pak

$$A(\text{kJ}) = N(\text{kW}) \cdot t(\text{sek}) \cdot n$$

Ze známých osobních rekordů můžeme počítat intenzity podle (1) a pomocí intenzity roztřídíme práce na úsecích do intenzitních pásem 0,5 až 1 (po 0,1). Praxe ukázala, že trénink intenzity nižší nežli 0,5 nemá fyziologický účinek. Z tohoto rozdělení práce na různé intenzity můžeme počítat váženou průměrnou intenzitu

$$i_p = \frac{\sum A_i \cdot i_i}{\sum A_i}$$

a doplnit celkovou délkou tréninku

$$L_c = \sum L_i \cdot n_i$$

Literatura:

76. Seliger V., Vinařický R., Trefný Z.: Fysiologie tělesných cvičení 1980, Praha, Avicenum, str. 23, tab.1
77. Vinařický R. Výdej energie při sportovní činnosti. Tělovýchovný sborník 10, 1967, 77
78. Vinařický R., Kubalová S., Frank V., Vodička P. Výdej energie při lehkootletických bězích, vztah rychlosti běhu a výdeje energie, využití individuálních rozdílů v tréninkové praxi. Teor. praxe těl. vých.19, 1971, 722
79. Kopřiva J. Vyhodnocení tréninkového deníku v lokomočních sportech grafem nebo počítačem. Teor. praxe těl. vých, 37, 1989, 261

```
DIM V(20), W(20), A(20), I(20), S(20): J = 1: C = 0
LPRINT " rych "; " vykon "; " prace "; " intensita"
A:
INPUT "L,N,T,Tr="; L, N, T, TR
V(J) = L / T: W(J) = .58 * EXP(.039 * V(J) * V(J))
A(J) = W(J) * T * N: I(J) = (TR / T) ^ 3: C = C + L * N
LPRINT L; USING "#####.###"; V(J); W(J); A(J); I(J)
INPUT "dalsi trat ? a/n"; x$: IF x$ <> "a" THEN GOTO B
J = J + 1: GOTO A
B:
FOR K = 1 TO J
M = (I(K) - .5) * 10: S(M) = S(M) + A(K): NEXT K
LPRINT "intensita-prace"
FOR M = 1 TO 4: LPRINT M / 10 + .5; S(M)
NEXT M
FOR K = 1 TO J
SI = SI + A(K) * I(K): SA = SA + A(K): NEXT K
IP = SI / SA: LPRINT "prum.intensita="; IP
LPRINT "celk.delka="; C
LPRINT "celk.prace="; SA; "kJ": END
```

I. HRY, MÍČE

I01 Maximální rychlost pádu míče

Pohybuje-li se těleso tekutinou (kapalinou nebo plynem) o hustotě h rychlostí v , vznikne dynamický tlak

$$p = 1/2 \cdot h \cdot v^2$$

Z tohoto tlaku vznikne odpor prostředí proti pohybu tělesa. Ten roste s velikostí předmětu, tedy jeho průřezem S , a závisí na tvaru tělesa, jež vyjadřuje tvarový součinitel odporu c_x :

$$F_o = p \cdot S \cdot c_x = 1/2 \cdot c_x \cdot h \cdot S \cdot v^2$$

Sportovní míče mají kulový tvar, pro který $c_x = 0,3$ a

$$S = \pi \cdot d^2 / 4 = 0,7854 \cdot d^2. \text{ Ve vzduchu, kde } h = 1,25 \text{ kg} / \text{m}^3 \text{ bude odpor}$$

$$F = 1/2 \cdot 0,3 \cdot 1,25 \cdot 0,7854 \cdot d^2 \cdot v^2 = 0,014726 \cdot d^2 \cdot v^2 = k \cdot v^2$$

$$\text{kde } k = 0,014726 \cdot d^2$$

Gravitační zrychlení g bude zrychlovat padající míč až do okamžiku, kdy odpor vzduchu F se vyrovná s tíhou $G = m \cdot g$

$$k \cdot v^2 = m \cdot g$$

Rychlost pádu již neporoste a bude rovna

$$v = (m \cdot g / k)^{0,5}$$

Pro lehkootletickou kouli a různé míče dostaneme tabulku:

	d (m)	m (kg)	k	v (m/s)	v (km/h)
koule atletická	0,12	7,27	2,120544E-4	579,83	2087,4
míče:: kopaná	0,22	0,45	7,127384E-4	78,69	283,27
házená muži	0,188	0,45	5,204757E-4	92,08	331,49
házená ženy	0,175	0,352	4,5098375E-4	87,49	314,96
volejbal	0,2244	0,27	7,41533E-4	59,76	215,12
basketbal	0,2435	0,625	8,731376E-4	83,78	301,62
basebal	0,07	0,145	7,21574E-4	140,38	505,74
vodní pólo	0,22	0,425	7,127384E-4	76,47	275,20
pozemní hokej	0,0729	0,16	7,826E-5	141,60	509,74
kolová	0,17	0,55	4,255814E-4	112,58	405,28
tenis	0,066	0,0577	6,414646E-5	93,92	338,11
tenis stol.	0,0372	0,0025	2,0378428E-5	34,69	124,86
golf	0,042	0,045	2,5976664E-5	130,34	469,22

Význam mezní (maximální) rychlosti:

Dosahuje-li míč ve sportu jen zlomek mezní rychlosti a je-li dráha dostatečně krátká, lze dráhu míče považovat za parabolickou a lze zanedbat odpor vzduchu. Nejvíce se parabole blíží dráha lehkootletické koule, protože její mezní rychlost je nadzvuková (580 m/s). Při světovém rekordu má koule rychlost jen málo nad 14 m/s, a dráha je krátká. Opakem je míček při stolním tenisu, jehož mezní rychlost 34,7 m/s (125 km/hod) je překračována při podání a smečích. Dráha tohoto míčku je balistická, odpor vzduchu zanedbat nelze, rychlost míčku rychle klesá.

Zvláštním případem je pád parašutisty: podle polohy je mezní rychlost mezi 150 – 280 km/h, dolní mez je dosažena při vodorovné poloze těla při akrobacii a skupinových skocích.

102 Pružnost tenisových míčů

Tenisový míč, puštěný z výšky $H = 100$ palců (2,54 m) se má podle oficiálních pravidel odrazit do výšky minimálně 53 palců (1,3462 m) a maximálně 58 palců (1,4732 m). Pružnost popisující restituční součinitel má být tedy mezi dvěma hodnotami:

$$\text{minimem } r_1 = \sqrt{\frac{53}{100}} = 0,728$$
$$\text{a maximem } r_2 = \sqrt{\frac{58}{100}} = 0,7616$$

S takovým měřením narazíme na potíže: počáteční výška je velká, změřit výšku maxima po odraze není snadné. Proto navrhl Machalický [80] jinou metodu, založenou na měření času pro několik odrazů míče:

1. míč pustíme svisle z počáteční výšky H , kterou můžeme volit, např. 2 m
2. při prvním dopadu míče na zem spustíme stopky
3. při n -tém dopadu míče na zem stopky zastavíme na T_n
4. z počáteční výšky H a času T_n vypočítáme ukazatel

$$A_n = \frac{T_n}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{H}{g}}} = 1,01717 \cdot \frac{T_n}{\sqrt{H}}$$
$$g = 9,80665 \text{ m/s}^2$$

5. Tento ukazatel porovnáme s minimální hodnotou

$$A_{\min} = r_1 \cdot (1 - r_1^n) / (1 - r_1) = 2,67662 \cdot (1 - 0,728^n)$$

a maximální hodnotou

$$A_{\max} = r_2 \cdot (1 - r_2^n) / (1 - r_2) = 3,19423 \cdot (1 - 0,7616^n)$$

6. jestliže $A_n < A_{\min}$, míč není dost pružný a má být vyřazen
jestliže $A_{\min} < A_n < A_{\max}$, míč vyhovuje pravidlům
jestliže $A_n > A_{\max}$, míč je pružnější a hra s ním je prý zajímavá. Potřebné výpočty provede program v Qbasicu.

Literatura:

80. Machalický J.: Tenisové míče a pravidla. Teor. praxe těl. vých. 16, 1968, č. 3, str. 180-181

```
input „vyska H,počet odrazu n, cas T „;h,n,t
a=1.10717*t/sqr(h)
print „a=„;a
mi=2.67662*(1-.727^n)
ma=3.19423*(1-.7616^n)
if a>ma then print „mic je pruznejši“:goto e
if a<mi then print „mic nevyhovuje“:goto e
print „mic je v norme“
e:
end
```

I03 Úspěšnost střelby v košíkové

Roste-li vodorovná vzdálenost hráče košíkové od koše, klesá s touto vzdáleností procento úspěšnosti střelby. V jsou uvedena tato data:

vzdálenost		úspěšnost
stop	m	%
3	0,91	62
6	1,83	52
9	2,74	40
12	3,66	32
15	4,57	28
18	5,49	24
21	6,40	21
24	7,31	19,5
27	8,23	18
30	9,14	17
40	12,2	13

Závislost úspěšnosti v % na vzdálenosti koše můžeme aproximovat funkcí

$$ú \% = 183,77 / (L + 1,9977) \quad r = 0,993$$

Regresními výpočty pomocí této funkce dostaneme tabulku:

vzdálenost (m)	úspěšnost (%)
0,91	63,2
1,83	48,0
2,74	38,8
3,66	32,5
4,57	28,0
5,49	24,5
6,40	21,9
7,31	19,7
8,23	18,0
9,14	16,5
12,2	13,0

Shoda regresně vypočítaných a původních procent je dobrá, o čemž svědčí součinitel korelace $r = 0,993$.

Literatura:

81. Čelikovský a kol. Antropomotorika pro studující tělesné výchovy. SPN, Praha, 1979, s. 89, obr. 16

I04 Trestný hod při košíkové

Protože míč při trestném hodu má nízkou rychlost a let není dlouhý, můžeme dráhu míče považovat za parabolickou. Parabola je určena třemi body, použijeme-li metodu nejmenších čtverců, můžeme vložit bodů víc, metoda vypočítá parametry paraboly, procházející co nejlépe mezi nimi.

Rovnici odvodíme ze dvou parametrických rovnic

$$\text{pro } x \quad x = v \cdot \cos \alpha \cdot t \quad (1)$$

$$\text{pro } y \quad y = v \cdot \sin \alpha \cdot t - 0,5 \cdot g \cdot t^2 + H \quad (2)$$

$$\text{Eliminaci času } t = x / v \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

provedeme dosazením do (2)

$$y = v \cdot \sin \alpha \cdot x / v \cdot \cos \alpha - 4,905 \cdot x^2 / v^2 \cdot \cos^2 \alpha + H = \\ = (-4,905 / v^2 \cdot \cos^2 \alpha) \cdot x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x + H \quad (4)$$

Srovnáme-li tuto rovnici s obecnou rovnicí paraboly

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (5)$$

$$\text{bude} \quad a = -4,905 / (v \cdot \cos \alpha)^2 \quad (6)$$

$$b = \operatorname{tg} \alpha \quad (7)$$

$$c = H \quad (8)$$

Protože tyto parametry dostaneme aproximací polynomem 2 stupně – viz rovnici (5), jsou hledané veličiny

$$\text{počáteční úhel} \quad \alpha = \arctg a \quad (9)$$

$$\text{počáteční rychlost } v = \sqrt{\frac{-4,905}{a} \cdot \cos^2 \alpha} \quad (10)$$

(protože a je negativní !)

Nejvyšší bod paraboly najdeme jako extrém, položíme-li derivaci rovnice paraboly rovnu nule:

$$2 \cdot a \cdot x + b = 0 \quad (11)$$

souřadnice vrcholu jsou

$$x_m = -b / 2a \quad (12)$$

$$y_m = ax_m^2 + bx_m + c \quad (13)$$

trvání letu míče

$$T = x_3 / v \cdot \cos \alpha \quad (14)$$

úhel dopadu β je dán poměrem složek rychlosti:

$$\operatorname{tg} \beta = (v \cdot \sin \alpha - g \cdot T) / v \cdot \cos \alpha \quad (15)$$

$$\beta = \arctg((v \cdot \sin \alpha - g \cdot T) / v \cdot \cos \alpha) \quad (16)$$

Tento úhel ovlivňuje velikost, pod kterou se jeví koš pro dopadající míč. Tuto velikost ale ovlivňuje také délka dráhy míče, kterou počítáme integrací

$$L = \int \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (17)$$

$$\text{Dosazením bude } L = \int \sqrt{1 + (2ax + b)^2} dx \quad (18)$$

Prostorový úhel, vyjadřující velikost koše z místa, kde začíná dráha míče je zdánlivá plocha koše, dělená čtvercem vzdálenosti:

$$\gamma = P \cdot \sin \beta / L^2 \quad (19)$$

$$= \pi \cdot d^2 / 4 \cdot L^2 \cdot \sin \beta \quad (20)$$

protože $d = 0,45$ m (průměr koše)

$$= 0,159 \cdot \sin \beta / L^2 \quad (21)$$

Pozn.: metodu lze použít pro výpočty skoků a vrhu koulí, vynecháme-li poslední parametr – prostorový úhel koše.

Program pro výpočet uvedených parametrů se nejnadhěji realizuje v kalkulátorech CASIO CFX-9970 nebo CASIO Algebra FX 2.0, protože zde je možno snadno naprogramovat aproximaci paraboly kvadratickým polynomem i integraci délky paraboly. Program v QBasicu bez této integrace je následující:

```
DATA 0,2.2,1.7,5,3.225,3.05
FOR w = 1 TO 3: READ x, y: PRINT x, y: NEXT w
RESTORE
a:
READ x, y: ON ERROR GOTO b
d = d + x: k = x * x: e = e + k: f = f + x * k: g = g + k * k
h = h + y: i = i + x * y: j = j + y * k: n = n + 1: GOTO a
b:
l = e - d * d / n: m = i - d * h / n: o = f - d * e / n: p = j - e * h / n
q = g - e * e / n: r = l * q - o * o: a = (p * l - m * o) / r
b = (m * q - p * o) / r: c = (h - b * d - a * e) / n
PRINT „a,b,c=“; a; „ “; b; „ “; c
u = ATN(b): v = SQR(-4.905 / (a * COS(u) * COS(u)))
PRINT „alfa,v0=“; u * 57.29578; „ “; v
xm = -b / (2 * a): ym = (a * xm + b) * xm + c
PRINT „xm,ym=“; xm; „ “; ym
RESTORE: FOR w = 1 TO 5: READ x: NEXT w
t = x / (v * COS(u)): PRINT „T=“; t
be = ATN((v * SIN(u) - 9.81 * t) / (v * COS(u)))
PRINT „úhel dopadu=“; be * 57.29578
c:
INPUT „x=“; x: y = (a * x + b) * x + c: PRINT „y=“; y: GOTO c
END
```

Příklad: počáteční bod trestného hodu má souřadnice $x_1 = 0$, $y_1 = 2$ m bod blížký středu parabolické dráhy $x_2 = 1,6$ m, y_2 v rozsahu 2,8 to 4,6 m koncový bod – střed koše $x_3 = 3,225$ m, $y_3 = 3,05$ m.

y_2	rovnice paraboly $y =$	α°	v (m/s)	β°	γ msrad
2,8	$-1.0733x^2 + 6.717x + 2$	33,89	8,14	-1,18	0,275
3,0	$-1.8426x^2 + 9.198x + 2$	42,61	7,01	-15,04	3,272
3,2	$-2.26118x^2 + 1.1679x + 2$	49,43	6,69	-27,38	5,323
3,4	$-3.3381x^2 + 1.416x + 2$	54,77	6,60	-37,41	6,362
3,8	$-4.9195x^2 + 1.91212x + 2$	62,39	6,81	-51,58	6,502
4,0	$-5.56887x^2 + 2.1602y + 2$	65,16	7,00	-56,47	6,123
4,6	$-7.7996x^2 + 2.9044x + 2$	71,00	7,61	-66,07	4,684

V tabulce jsou dva extrémy: maximální prostorový úhel 6,502 msrad pro $y_2 = 3,8$ m, minimální počáteční rychlost 6,6 m/s pro $y_2 = 3,4$ m. Kruh koše má vnitřní průměr $d_1 = 0,45$ m, míč má průměr $d_2 = 0,78 / \pi = 0,248$ m. Mezní úhel pro čistý hod je $\beta = \arccos(d_2 / d_1) = 56,56^0$. Tento úhel je možný pro $y_2 > 3,8$ m.

Resumé: nejčtenější trestné hody budou v rozsahu $y_2 = 3,4 - 3,8$ m, protože s prostorovým úhlem roste pravděpodobnost zásahu, s minimální rychlostí roste přesnost hodů a pro $y_2 > 3,8$ m roste možnost čistého hodu (bez dotyku koše).

105 Půdorys fotbalového hřiště

K záznamu pohybu jednotlivých hráčů během zápasu lze použít půdorys fotbalového hřiště, nakreslený podle pravidel. Tento půdorys nakreslí následující program v Qbasicu. Velikost obrázku je možné změnit při xerografickém kopírování.

```
SCREEN 10: CLS: KEY OFF
LINE (20, 45)-(620, 405), , B
LINE (320, 45)-(320, 405)
CIRCLE (320, 225), 55
LINE (15, 203)-(20, 247), , B
LINE (620, 203)-(625, 247), , B
LINE (29, 269)-(53, 181), , B
LINE (620, 269)-(587, 181), , B
LINE (20, 345)-(120, 105), , B
LINE (620, 105)-(520, 345), , B
CIRCLE (86, 225), 55, , 5.4, .9
CIRCLE (554, 225), 55, , 2.25, 4
END
```


K. GYMNASTIKA

K01 Výdej energie, srdeční frekvence a účinnost při základních gymnastických cvicích

Výdej energie a srdeční frekvenci měřili Zajkin a kol. (82) při těchto cvicích: shyby, dřepy, kliky, zvedání nohou leže, leh/sed a skákání přes švihadlo. Vypočítán byl výdej energie a počet tepů na 1 cvik (cyklus), a údaje byly korigovány na basální metabolismus a klidovou srdeční frekvenci. Výsledky:

cvik	frekvenční cvičení	kJ / cvik	tepů / cvik
shyb	16,5	2,68	4,48
dřep	30	1,34	2,2
klik	30,9	1,19	1,58
zvedání nohou	28	0,82	1,30
leh/sed	30,4	0,77	1,20
skákání švihadlo	117,1	0,37	1,58

Nejdříve jsme našli korelaci mezi kJ/cvik a tepy/cvik - byla $r = 0,996$ ($p = 1 \%$). Z frekvence cviků a výdeje na 1 cvik lze vypočítat výkon ve W: $P_w = 1000 \cdot E_1 \cdot f / 60$

Vykonanou mechanickou práci můžeme vypočítat přibližně ze zvedané hmotnosti m a zdvihu h : $A = m \cdot g \cdot h = G \cdot H$

A konečně účinnost je poměr vykonané práce a výdeje energie ($v \%$)

$$\eta = A / E \cdot 100$$

cvik	výkon (W)	výdej (kJ)	G (N)	h (m)	A (kJ)	η (%)
shyby	737	2,68	700	0,63	0,455	17
dřepy	670	1,34	600	0,67	0,402	30
kliky	603	1,19	500	0,35	0,175	14,7
zvedání noh	383	0,82	234	0,60	0,140	17
leh/sed	390	0,77	466	0,45	0,210	27
švihadlo	722	0,37	700	0,1	0,07	19

Literatura:

82. Zajkin V., Utkin V., Zimina O. Eněrgetičeskaja i pulsovaja stojimosti obščerazvivajuščich gimnastičeskich upražněnij Těor. prakt. fiz. kult. 1987, č. 9, str. 45-47

K02 Maximální síla při odrazu na pružném náradí

Gymnasté a skokani do vody používají pružné můstky nebo prkna (1 a 3 m), které umožňují získat velkou výšku po odrazu a tím i dostatek času pro složité skoky. Pružnost těchto zařízení se uvažuje jako lineární vztah mezi působící silou a odpovídající deformací (průhybem)

$$F = k \cdot y \quad (1)$$

Konstanta pružnosti

$$k = F / y \quad (2)$$

se dá vypočítat ze známého zatížení (např. tíhy osoby $F = m \cdot g$) a jemu odpovídajícího průhybu. Protože maximální síla při odrazu zatěžuje klouby dolních končetin a páteř sportovce, snažíme se zjistit její velikost. To je možné

1. přímo změřením konstanty pružnosti k podle (2) a průhybu y_{\max} . Pak

$$F_m = k \cdot y_m$$

2. nepřímo z výšky h , o kterou klesne těžiště sportovce před dopadem. Potenciální energie polohy $E_1 = m \cdot g \cdot h$ se přemění v kinetickou energii a ta zase v pružnou energii náradí:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot F_m^2 \cdot y_m$$

odtud

$$F_m = \sqrt{2 \cdot m \cdot g \cdot h_m \cdot k} = 4,43 \cdot \sqrt{m \cdot h_m \cdot k}$$

Příklad: gymnasta s $m = 60$ kg dopadne z výšky $h_m = 0,4$ m, na můstek se změřenou konstantou pružnosti $k = 700 \text{ N} / 0,1 \text{ m} = 7000 \text{ N/m}$.

Maximální síla $F_m = 4,43 \cdot \sqrt{(60 \cdot 0,4 \cdot 7000)} = 1815,5 \text{ N}$

Pozn.: síla 1 N odpovídá 0,102 kp, staré jednotky síly.

K03 Kývání a otáčení tělesa

Kyvadlu podobné pohyby provádí gymnasta na hrazdě, kruzích či koni na šíř nebo skokan o tyči. Společné pro ně je přeměna polohové energie v krajních polohách ve směs pohybové a polohové energie mezi těmito polohami. V nejnižším bodě je pak celá energie pohybová.

Polohová energie v krajní (nejvyšší) poloze

$$E = m \cdot g \cdot h_0 = m \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha_0)$$

α_0 ... úhel mezi svislicí a spojnicí těžiště tělesa se středem otáčení.

V nejnižší poloze se celá polohová energie změní v pohybovou a platí

$$m \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha_0) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_m^2$$

Maximální rychlost v nejnižší poloze bude

$$v_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha_0)} = 4,429 \cdot \sqrt{r \cdot (1 - \cos \alpha_0)}$$

Pro $r = 1$ m a různé hodnoty výchylky α_0 dostaneme tabulku:

$\alpha_0(^{\circ})$	v_m (m/s)
10	0,546
20	1,088
30	1,621
40	2,142
50	2,647
60	3,132
70	3,592
80	4,026
90	4,429
100	4,798
110	5,130
120	5,424
130	5,676
140	5,885
150	6,050
160	6,168
170	6,239
180	6,263

Pro jiné poloměry násobíme tabulkovou hodnotu odmocninou \sqrt{r} .

K04 Rychlost gymnasty při veletochi na hrazdē

Začíná-li gymnasta veletoch ve stoji s nulovou rychlostí, pak začne-li se otáčet, bude se jeho potenciální energie polohy měnit v kinetickou podle vztahu

$$m \cdot g \cdot h = m \cdot v^2 / 2$$

kde h ... pokles těžiště z nejvyšší polohy

Bude-li počáteční rychlost těžiště v nejvyšší poloze v_0 , platí

$$m \cdot g \cdot h + m \cdot v_0^2 / 2 = m \cdot v^2 / 2$$

Při otáčení těžiště těla kolem hrazdy na poloměru r bude pokles těžiště

$$h = r \cdot (1 - \cos \alpha)$$

a rychlost těžiště

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha) + v_0^2}$$

Následující program dovoluje nakreslit polární diagram rychlosti gymnasty pro různé počáteční rychlosti v_0 .

```
SCREEN 10: CLS: KEY OFF: p = 1.5708
LINE (150, 120)-(490, 120)
LINE (320, 0)-(320, 350)
FOR v0 = 0 TO 4
FOR a = -p TO 3 * p STEP .01
v = 24 * SQR(24 * (1 - COS(a + p)) + v0 * v0)
x = 320 + v * COS(a)
y = 120 + v * SIN(a)
PSET (x, y)
NEXT a: NEXT v0
END
```

K05 Síly při veletochi na hrazdē

Potenciální energie, uvolněná pootočením těžiště gymnasty z nejvyššího bodu veletochy o úhel a je

$$E_p = m \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos a)$$

m ... hmotnost těla

g ... zrychlení tíže $9,807 \text{ m/s}^2$

r ... poloměr otáčení těžiště těla

Měl-li gymnasta v nejvyšší poloze rychlost v_0 , bude celková jeho kinetická energie

$$m \cdot v^2 / 2 = m \cdot v_0^2 / 2 + m \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos a)$$

Rychlost $v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos a)$

Odstředivá síla při této rychlosti je

$$F_o = m \cdot v^2 / r = m \cdot v_0^2 / r + 2 \cdot m \cdot g \cdot (1 - \cos a)$$

Tíhu gymnasty $G = m \cdot g$ můžeme rozložit na tečnou složku, způsobující rotaci těla kolem hrazdy

$$F_t = G \cdot \sin a$$

a radiální složku, ve směru poloměru

$$F_r = G \cdot \cos a$$

kteřá se skládá se silou odstředivou, takže výsledná radiální síla, působící na hrazdu je

$$F = m \cdot v_0^2 / r + 2 \cdot G \cdot (1 - \cos a) - G \cdot \cos a = m \cdot v_0^2 / r + G \cdot (2 - 3 \cdot \cos a)$$

a)

Polární diagram této výslednice v závislosti na úhlu a nakreslí následující program (Qbasic)

```
INPUT „m,r,v0=„; m, r, v0
pi = 3.14159: g = 9.807 * m
SCREEN 9: CLS: KEY OFF
PRINT „m=„; m: PRINT „r=„; r: PRINT „v0=„; v0
LINE (0, 90)-(640, 90)
LINE (320, 0)-(320, 350)
FOR a = -pi / 2 TO 3 * pi / 2 STEP .1
f = m * v0 * v0 / r + g * (2 - 3 * COS(a + pi / 2))
fx = f * COS(a): fy = f * SIN(a) + g
xs = 320 + 50 * r * COS(a)
ys = 90 + 50 * r * SIN(a)
LINE (xs, ys)-(xs + fx / 20, ys + fy / 20)
NEXT a
END
```

K06 Svislé síly při veletochi na hrazdē

V kapitole o silách při veletochi jsme odvodili pro radiální sílu, působící na hrazdu, vzorec

$$F = m \cdot v_0^2 / r + G \cdot (2 - 3 \cdot \cos a)$$

Její svislá složka je pak

$$F_y = F \cdot \cos a = \\ = (m \cdot v_0^2 / r + G \cdot (2 - 3 \cdot \cos a)) \cdot \cos a$$

K výpočtu použijeme program, v němž nejdříve vypočítáme z doby veletochi T a poloměru dráhy těžiště r rychlost v nejvyšším bodě v_0 (viz předchozí kapitola) a pak průběh svislé síly:

```
INPUT „m,r=“; m,r: G = 9.807 * m
INPUT „T=“; T
v0 = (22.42 + 12.905 * log(r)) * exp(-1.5214 * r^(-0.4876) * T)
SCREEN 9: CLS: KEY OFF
LINE(,100) - (640,100): LINE (190,30) - (190,350)
FOR i = 500 TO 3000 STEP 500
LINE (186,100 + i/12) - (194,100 + i/12): NEXT i
PRINT „m=“;m, „r=“;r, „T=“;T: PSET (0,100)
FOR a = -0.8 TO 7.2 STEP .1
fy = (m*v0^2/r + G*(2 - 3 * cos(a)) * cos(a)
LINE -(a*40 + 64, 100 + fy / 19.5)
NEXT a
END
```

K07 Trvání veletoleč na hrazdě

je dáno rychlostí těžiště těla v_0 nejvyšším bodě veletoleč a poloměrem otáčení těžiště r kolem hrazdy. V kapitole o rychlosti jsme odvodili vzorec

$$v = (v_0^2 + 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos a))^{1/2} \\ = ds / dt$$

pak diferenciál času

$$dt = ds / (v_0^2 + 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos a))^{1/2}$$

a celkový čas pro půl veletoleč (a od 0 do π radiánu) bude po dosazení $ds = r \cdot da$

$$t = \int_0^\pi \frac{r \cdot da}{\sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos a)}}$$

Pro celý veletoleč je hodnota dvojnásobná. Tento určitý integrál jsme počítali na počítači Rombergovou metodou, na kalkulátorech

HP-49 a Casio CFX-9970. Pro r od 1 m do 1.3 m, (krok 0,05 m), v_0 od 0.5 m/s do 3 m/s (krok 0,5 m/s) jsme dostali tabulku:

	v_0 (m/s)					
r(m)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1.00	2.497	2.048	1.782	1.591	1.441	1.318
1.05	2.574	2.115	1.842	1.647	1.493	1.368
1.10	2.651	2.180	1.902	1.702	1.545	1.416
1.15	2.725	2.245	1.960	1.756	1.596	1.464
1.20	2.799	2.308	2.018	1.809	1.646	1.511
1.25	2.871	2.371	2.074	1.862	1.695	1.558
1.30	2.943	2.432	2.130	1.913	1.743	1.604

Program pro výpočet tabulky Rombergovou integrací:

```

REM „trvani veletece“
k = 7: DIM t(17): CLS
FOR r = 1 to 1.3 step .05: LPRINT USING „##.##“; r;
FOR v0 = .5 to 3 step .5
a = 0: b = 3.1416: d = b - a
x = a: GOSUB fun: f = y
x = b: GOSUB fun: t(1) = (f + y) / 2: n = 1
FOR i = 1 to 6
s = 0: n = 2 * n: h = d / n
FOR j = 1 to n step 2
x = a + j * h: GOSUB fun: s = s + y
NEXT j
t(i + 1) = (2 * s / n + t(i)) / 2: m = 1
FOR j = i to 1 STEP -1
m = 4 * m: t(j) = t(j + 1) + (t(j + 1) - t(j)) / (m - 1)
NEXT j: NEXT i: in = t(1) * d * 2 * r
LOCATE r * 20 - 19, v0 * 18: LPRINT USING „####.###“; in;
NEXT v0: LPRINT: NEXT r
END
fun:
y = 1 / sqr(19.62 * r * (1 - COS(x)) + v0 ^ 2)
RETURN

```

Aproximací závislosti rychlosti nad hrazdou v_0 na trvání veleteče dostaneme s velmi vysokou korelací (-0.99997) funkci

$$v_0 = a \cdot \exp(-b \cdot t)$$

Pro jednotlivé poloměry r dostaneme řadu těchto funkcí:

$r = 1,00 \text{ m}$	$v_0 = 22,3880 \cdot \exp(-1,5202 \cdot T)$
$r = 1,05 \text{ m}$	$v_0 = 23,1337 \cdot \exp(-1,4876 \cdot T)$
$r = 1,10 \text{ m}$	$v_0 = 23,5807 \cdot \exp(-1,4516 \cdot T)$
$r = 1,15 \text{ m}$	$v_0 = 24,1937 \cdot \exp(-1,4214 \cdot T)$
$r = 1,20 \text{ m}$	$v_0 = 24,7378 \cdot \exp(-1,3919 \cdot T)$
$r = 1,25 \text{ m}$	$v_0 = 25,3169 \cdot \exp(-1,3650 \cdot T)$
$r = 1,30 \text{ m}$	$v_0 = 25,8089 \cdot \exp(-1,3383 \cdot T)$

Najdeme-li závislost obou faktorů a , b těchto funkcí na poloměru r , dostaneme aproximační funkci pro výpočet rychlosti nad hrazdou jako funkci dvou proměnných: r , T .

$$v_0 = (22,42 + 12,905 \cdot \ln(r)) \cdot \exp(-1,5214 \cdot r^{-0,4876} \cdot T)$$

Stanovíme-li z fotografie nebo kinogramu poloměr otáčení r a změříme-li dobu trvání veleteče T , můžeme tímto vzorcem počítat rychlost těžiště gymnasty v_0 v nejvyšším bodě veleteče a kontrolovat tak, zda se při opakovaných veletecích zvyšuje.

L. ATLETIKA

L01 Dynamika startu

Po startovním výstřelu se po dobu reakční doby sprinter nehýbe. Po jejím uplynutí začne stoupat zatížení startovních bloků podle grafu, který uvádí Griffing (83). Z něj je možné vyzorkovat následující tabulku celkové síly, působící na bloky:

t(s)	F(lbf)	F(N)
0,125	70	311,4
0,150	230	1023,1
0,175	390	1734,8
0,200	340	1512
0,225	245	1089,8
0,250	185	823
0,275	165	734
0,300	170	756
0,325	200	889,7
0,350	212	943
0,375	240	1067,6
0,400	237	1054,2
0,425	200	889,7
0,450	100	444,8
0,475	10	44,5
Celkem	2994	13317,6

Protože schází zcela údaje o směru síly, je i výpočet rychlosti z impulsu jen přibližný: impuls síly je

$$I = \int F \cdot dt = 13318,2 \text{ N} \cdot 0,0125 \text{ s} = 332,95 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Při hmotnosti sprintera $m = 75 \text{ kg}$ dostaneme přibližnou rychlost

$$v = I / m = 332,95 / 75 = 4,439 \text{ m/s}$$

Protože v tabulce jsou uvedeny hodnoty výsledné síly, není vypočítaná rychlost vodorovná. Při sklonu sprintera k zemi okolo 45° by byla vodorovná složka $V_x = 3,138 \text{ m/s}$. Z původního grafu lze odečíst reakční dobu $t_r = 0,12 \text{ s}$. Průběh pohybu, tj. zrychlení, rychlosti a dráhy počítáme postupně podle vzorců:

$$\begin{aligned} a_x &= F_x / m \\ v_x &= v + a_x \cdot dt \\ s &= s + v_x \cdot dt \end{aligned}$$

Literatura:

83. Griffing D. F. The Dynamics of Sports. (3rd.ed.),1987, Dalog Co.,Oxford, Ohio, str. 87

Tyto výpočty provedeme pomocí programu.

```
data F1,F2,F3,... Fn
input „m,dt=„; m,dt
v=0: s=0
a:
read F: on error goto b
a=F/m: v=v+a*dt: s=s+v*dt
print using „#####.###“;F;a;v;s:goto a
b:
end
```

Příklad: z dat v citované knize dostaneme:

F (N)	a (m/s ²)	v (m/s)	s (m)
311.4	4.152	0.104	0.003
1023.1	13.641	0.445	0.014
1734.8	23.131	1.023	0.039
1512.0	20.160	1.527	0.077
1089.8	14.531	1.890	0.125
823.0	10.973	2.165	0.179
734.0	9.787	2.409	0.239
756.0	10.080	2.661	0.306
889.7	11.863	2.958	0.380
943.0	12.573	3.272	0.461
1067.6	14.235	3.628	0.552
1054.2	14.056	3.980	0.652
889.7	11.863	4.276	0.758
444.8	5.931	4.424	0.869
44.4	0.592	4.439	0.980

Pozn: síla má dva zřetelné vrcholy, asi maxima od obou nohou.

L02 Vyrvalost běžce sprintera

Průměrná rychlost sprintera bude u nejkratších sprintů do 60 m snížena vlivem reakční doby, pohybů v blocích a zrychlováním. U delších sprintů pak začne snižovat okamžitou i průměrnou rychlost únava, se kterou souvisí sprinterská vytrvalost. Tu můžeme posoudit pomocí délky trati, na které sprinter dosahuje maxima své průměrné rychlosti. Tato trať nebývá shodná s délkou trati, na které dosáhne sprinter maxima okamžité rychlosti.

Nalezení trati pro maximální průměrnou rychlost nemusíme provést prakticky, tj. opakovanými sprinty na různě dlouhých tratích. To by ostatně nebylo dostatečně přesné. Známeli několik stejně kvalitních výkonů pro různě dlouhé sprinty, můžeme proložit těmito body vhodnou funkci a pak její derivací získáme snadno teoretické maximum. Jako vhodná se osvědčila funkce

$$t = (a \cdot L + b) \cdot \sqrt{L} \quad (1)$$

Průměrná rychlost je pak

$$v = \frac{L}{t} = \frac{\sqrt{L}}{a \cdot L + b} \quad v = L / t = \sqrt{L} / (a \cdot L + b) \quad (2)$$

Součinitele a , b pro tuto funkci můžeme najít metodou nejmenších čtverců a hledané maximum pomocí derivace

$$\frac{dv}{dt} = 0,5 \cdot \sqrt{L} \cdot a + 0,5 \cdot \frac{b}{\sqrt{L}} - \sqrt{L} \cdot a = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Zjednodušením} \\ \text{a trať} \end{array} \quad \begin{array}{l} L_m \cdot a = b \\ L_m = b / a \end{array} \quad (3)$$

$$\text{rychlost} \quad v_m = \frac{\sqrt{L}}{a \cdot L_m + b} \quad (4)$$

I když výpočet pomocí následujícího programu lze provést i pro 2 časy a trati, je přesnější vložit více těchto dvojic do 300m. Pro trati delší je vhodnou metodou universální kvantitativní kritérium vytrvalosti v kap. H08.

Program v Qbasicu:

```
DATA 60,6.46,100,9.86,200,19.75
s:
READ x, y: ON ERROR GOTO v
sx = sx + x: k = x * x
kx = kx + k: cx = cx + k * x
s1 = s1 + y * SQR(x)
s2 = s2 + y * x * SQR(x)
GOTO s
v:
ds = sx * cx - kx * kx
da = sx * s2 - kx * s1
db = cx * s1 - kx * s2
a = da / ds: b = db / ds
PRINT „a,b=„; a, b
lm = b / a: vm = SQR(lm) / (a * lm + b)
PRINT „Lmax,vmax=„; lm, vm
r:
INPUT „L=„; l
t = (a * l + b) * SQR(l)
v = l / t
PRINT „t,v=„; t, v
GOTO r
END
```

Pozn.: do řádku DATA byly vepsány výkony Carla Lewise na 60, 100 a 200 m. Protože nebyly tyto výkony dosaženy v tomtéž roce, vyjadřují různou vytrvalost a výsledky neuspokojují přesností regrese:

$a = 0,00405271$, $b = 0,5853357$, $L_m = 144,43$ m, $v_m = 10,266$ m/s.

Doporučujeme použít data z jediného roku.

L03 Zvedání těžiště při běhu

Nedotýká-li se běžec dráhy, musí se těžiště jeho těla pohybovat po parabole, jejíž výška je

$$h = 0,5 \cdot g \cdot (t / 2)^2 = 0,125 \cdot g \cdot t^2 = 1,228 \cdot (L / v)^2$$

t ...	trvání 1 kroku (s)
L...	délka 1 kroku (m)
v ...	rychlost běhu (m/s)

Pro $L = 1,5 - 2,6$ m a $v = 5 - 11$ m/s můžeme vypočítat tabulku zvednutí v m pro každý krok:

L (m)	v (m/s)						
	5	6	7	8	9	10	11
1,6	,126	0,087	0,064	0,049			
1,8		0,111	0,081	0,062	0,049		
2,0		0,136	0,100	0,077	0,061	0,049	
2,2			0,121	0,093	0,073	0,059	0,049
2,4			0,144	0,111	0,087	0,071	0,059
2,6				0,130	0,102	0,083	0,069

Počet kroků pro trať D je $n = D / L$

a celkové zvednutí pro všechny kroky na tuto trať

$$H = n \cdot h = 1,228 \cdot D \cdot L / v^2 = 1,228 \cdot L \cdot T^2 / D$$

Pro olympijské tratě můžeme počítat následující tabulku celkového zvednutí v m: T(m:s)

D(km)	L(m)	1:42	1:44	1:46	1:48	1:50
0,8	1,8	28,7	29,9	31,0	32,2	33,4
	2,0	31,9	33,2	34,5	35,8	37,1
	2,2	35,1	36,5	37,9	39,4	40,8
	2,4	38,3	39,8	41,4	43,0	44,6
1,5		3:30	3:35	3:40	3:45	3:50
	1,8	65,0	68,1	71,3	74,6	78
	2,0	72,2	75,7	79,2	82,9	86,6
	2,2	79,4	83,3	87,2	91,2	95,3
5		13:00	13:20	13:40	14:00	14:20
	1,6	239	252	264	277	291
	1,8	269	283	292	312	327
	2,0	299	314	330	347	363
10		27:00	27:45	28:30	29:15	30:00
	1,6	516	545	575	605	637
	1,8	580	613	646	681	716
	2,0	645	681	718	757	796
	2,2	709	749	790	832	875
hod:min						
Marathon		2:00	2:10	2:20	2:30	2:40
	1,6	2414	2833	3286	3772	4291
	1,8	2716	3187	3696	4243	4828
	2,0	3017	3541	4107	4715	5364

Z této tabulky je zřejmé, že delší krok znamená větší zvednutí a výdej energie. U maratónu je zdvih velmi velký, jako výstup na vysokou horu. Kratší krok je ekonomičtější z tohoto hlediska, ale jiné výdeje mohou být větší

L04 Běh v zatáčce

Běh v zatáčce je podstatnou částí atletických běhů na dráze, delších nežli 100 m. Kromě toho se vyskytuje při rozběhu při skoku vysokém a v různých hrách. Běh v zatáčce není kruhovým pohybem, protože běžec se dotýká země jen přerušovaně a směr pohybu těžiště může měnit jen při styku se zemí. Proto dráha těžiště těla je mnohoúhelníkem se zaoblenými vrcholy. Při délce kroku L_k je počet kroků v jedné zatáčce atletické dráhy roven

$$n = p \cdot R / L_k$$

Při každém kroku musí atlet změnit směr dráhy těžiště o úhel

$$\alpha = 180 / n = 180 \cdot L_k / p \cdot R$$

což pro poloměr dráhy $R = 36,8$ m dá

$$\alpha = 1,55695 \cdot L_k$$

Běžec s hmotností m má při rychlosti v lineární hybnost

$$G = m \cdot v$$

a k pootočení vektoru hybnosti o úhel α potřebuje impuls síly, kolmé na vektor hybnosti

$$I = G \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Dotýká-li se běžec při každém kroku země po dobu dt , vytvoří potřebný impuls střední silou F , kolmou na dráhu

$$F = I / dt = m \cdot v \cdot \operatorname{tg} \alpha / dt$$

Při tomto kolmém působení se musí naklonit dovnitř zatáčky o úhel, daný

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= F / G = m \cdot v \cdot \operatorname{tg} \alpha / m \cdot g \cdot dt = \\ &= 0,10197 \cdot v \cdot \operatorname{tg}(1,55695 \cdot L_k) / dt \end{aligned}$$

Nakloněný běžec došlapuje na místo, vyšší nežli to, ze kterého se odrazil. Jeho výška pro jeden krok

$$dH = dR \cdot \operatorname{tg} \beta = (1 - \cos \alpha) \cdot R \cdot \operatorname{tg} \beta$$

V zatáčce udělá n kroků a celé zvednutí za zatáčku je

$$H1 = n \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot R \cdot \operatorname{tg} \beta$$

Z těchto všech vztahů můžeme vypočítat následující tabulku:

L(m)	v(m/s)	L(m)	dt(s)	B	H1(m)	Nz	H(m)
200	10	2,3	0,14	24,43	1,646	1	1,646
400	9	2,4	0,15	21,43	1,505	2	3,012
1500	7,2	2	0,17	13,18	0,738	7	5,1654
10000	6	1,8	0,18	9,415	0,4703	25	11,759

Ze zvednutí těžiště v jedné zatáčce H1 a zvednutí v celém závodě H plyne, že
běh v zatáčce je běh do kopce.

K výpočtům můžeme použít program:

```
input „v,Lk,dt=„;v,L,d
n=115.61/L: a=1.55695*L
t=.10197*v*tan(a)/d
H1=n*36.8*(1-cos(a))*t
print „H1=„;H1
end
```


L05 Výdej energie při běhu na různě dlouhé trati

V literatuře najdeme údaje o rozsahu výdeje energie při běhu na různě dlouhých tratích. Ve starých jednotkách (kcal):

L(km)	A(kcal)
0,1	35 - 53
0,2	46 - 68
0,4	48 - 84
0,8	80 - 90
1,5	107 - 202
5	370 - 400
10	750

Převědeme-li tyto mezní hodnoty a jejich průměry na nové jednotky (kilojoule, kJ), dostaneme:

L(km)	A1	A2	A3
(km)	min	prům	max
0,1	146,5	184,2	222
0,2	192,6	238,6	284,7
0,4	201	276,3	351,7
0,8	335	356	376,8
1,5	448	649	845,8
5	1549	1612	1674,7
10	3140	3140	3140

Tato data nejlépe aproximují lineární funkce

min	$A1 = 302,4 \cdot L + 80,7$	(kJ, km)	$r=0,999$
prům	$A2 = 297 \cdot L + 158,8$	(kJ, km)	$r=0,9995$
max	$A3 = 291,3 \cdot L + 236$	(kJ, km)	$r=0,997$

Dostáváme nečekaný výsledek:

Energetický výdej při běhu roste lineárně s délkou trati
a) čím lepší běžec, tím menší absolutní člen této funkce
b) strmost této lineární funkce (regresní součinitel) klesá poměrně pomalu s rostoucí úrovní běžce

Tyto závěry je možné vysvětlit rozdíly v technice běhu a její účinnosti i ve fyziologii práce (trénovanosti).

Literatura:

84. Klokov L. A. - Vasiljeva E. S. Gaswechseluntersuchungen beim Lauf über verschiedene Strecken. Arbeitsphysiologie 7, 1934, 62-
85. Vinařický R. - Kubalová S. - Frank V. - Vodička P. Výdej energie při lehkotletických bězích, vztah rychlosti běhu a výdeje energie, využití individuálních rozdílů v tréninkové praxi. Teor. praxe těl. vých. 19, 1971, č.12, str. 722-729

L06 Fyziologický výkon při běhu různou rychlostí

Japonský fyziolog Yamaoka naměřil u dvou skupin běžců - světové a slabé výkonnosti - výdej energie a vypočítal z něj výkon. Po přepočtu na nové jednotky dostaneme dvě tabulky:

A. světová úroveň

B.

v(m/s)	N(kW)
5	1,29
6	2,163
7	3,63
8	6,49
8,42	8,38

Tuto tabulku lze nahradit aproximační funkcí

$$N = 0,08238 \cdot e^{0,546 \cdot v} \quad r = 0,9995$$

B. Slabá výkonnost

v(m/s)	N(kW)
4,3	1,4
5	2,16
6	3,6
6,95	6,28

Aproximační funkce

$$N = 0,12819 \cdot e^{0,5592 \cdot v} \quad r = 0,9994$$

Porovnáním obou aproximačních funkcí plyne:

1. běžec nižší úrovně musí podávat při stejné rychlosti větší výkon
2. výkon běžce roste s rychlostí běhu přibližně podle exponenciální funkce typu $N = a \cdot e^{b \cdot v}$, tedy progresivněji nežli podle funkce mocninové ($N = a \cdot v^b$).

Literatura:

86. Yamaoka S. Studies on metabolism in athletics sports. Res. Jour. Physiol. Educ. 9, 1965, 28

L07 Práce a účinnost při běhu

Rychlost běhu na delší trati (nad 1 km) je podíl délky trati a času:

$$v = L / t$$

Kinetická energie při této rychlosti je rovna práci, vykonané při rozběhu:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = A_1$$

Odpor vzduchu při této rychlosti

$$F = 0,027 \cdot v^2 \text{ (muži)}$$

$$F = 0,021 \cdot v^2 \text{ (ženy)}$$

Práce proti tomuto odporu

$$A_2 = F \cdot L = 0,027 \cdot v^2 \cdot L$$

Délka kroků závisí na rychlosti přibližně podle vztahů

$$L_k = 1,37 \cdot v^{0,19} \text{ (muži)}$$

$$L_k = 1,21 \cdot v^{0,21} \text{ (ženy)}$$

Práce pro zvedání těžiště závisí na rychlosti běhu a délce kroku

$$A_3 = \frac{m}{4} \cdot \left(v^2 - \sqrt{v^4 - (g \cdot L_k)^2} \right) \cdot \frac{L}{L_k}$$

$g \dots 9,81 \text{ m/s}^2$

Práce při běhu v zatáčkách (viz L04)

$$A_4 = 0,0427 \cdot m \cdot L_k \cdot v^2 \cdot \text{int}(L / 200)$$

Celková práce

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Fyziologický výkon při běhu

$$N = 0,0824 \cdot \exp(0,545 \cdot v)$$

a práce z něj

$$A_f = N \cdot t$$

Účinnost je poměr nutné práce A a fyziologického výdeje energie A_f

$$\eta = A / A_f$$

Příklad:

běžec s $m = 75 \text{ kg}$ uběhne $L = 5000 \text{ m}$ za 13:00 min, tedy 780 sek. $v = 5000 / 78 = 6,41 \text{ m/s}$

$$A_1 = 1,541 \text{ kJ}$$

$$A_2 = 5,5469 \text{ kJ}$$

$$L_k = 1,95 \text{ m}$$

$$A_3 = 227,151 \text{ kJ}$$

$$A_4 = 6,41475 \text{ kJ}$$

$$A = 240,65345 \text{ kJ}$$

$$N = 2,7892 \text{ kW}$$

$$A_f = 2114,501 \text{ kJ}$$

$$\eta = 240,65345 / 2114,501 = 0,1138$$

Přibližná účinnost práce tohoto běžce je 11 %.

L08 Skok vysoký a měření času

Skokan, který má na konci odrazu těžiště ve výšce h_1 a stoupavou rychlost v , bude svým těžištěm stoupat podle vztahu

$$h = h_1 + v \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$\text{kde } g = 9,80665 \text{ m/s}^2$$

Maximální výšku těžiště najdeme, když derivaci tohoto výrazu podle času položíme rovnu nule:

$$v - g \cdot t = 0$$

Stoupání bude trvat

$$t = v / g$$

Tento čas je ale možné změřit. V něm stoupne těžiště o dráhu

$$h - h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

a čas

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h - h_1} = 0,4156 \cdot \sqrt{h - h_1}$$

Stejný výraz platí pro trvání pádu z vrcholu dráhy na doskočiště:

$$t_2 = 0,4516 \cdot \sqrt{h - h_1}$$

takže trvání celého letu skokana bude

$$t = t_1 + t_2 = 0,4516 \cdot (\sqrt{h - h_1} + \sqrt{h - h_1})$$

Z tohoto vzorce nelze izolovat hledanou max. výšku těžiště h , ale vypočítat ji z t , h_1 , h_2 je možné numericky funkcí SOLVER, kterou mají lepší vědecké kalkulátory. Jedinou podmínkou je dostatečně přesné změření trvání letu skokana: změnou výšky h skoku o ± 1 cm se změní čas t o $\pm 0,004 - 0,005$ sek. Chceme-li vypočítat maximální výšku h s chybou max. 1 cm, musíme čas změřit s uvedenou přesností, a to buď kinogramem s frekvencí snímání 250 - 200 obr / sek nebo elektronicky. Zde je ale problém se snímači začátku a konce letu skokana.

Pro minimální dovolenou výšku doskočiště podle pravidel atletiky $h_2 = 0,7$ m dostaneme tabulku maximálních výšek h :

h_1	t (sek)				
	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,2	1,427	1,577	1,754	1,960	2,188
1,25	1,454	1,607	1,783	1,987	2,216
1,3	1,492	1,638	1,813	2,016	2,244
1,35	1,526	1,670	1,843	2,044	2,272
1,4	1,561	1,702	1,873	2,074	2,300
1,45	1,596	1,734	1,904	2,103	2,330

Pro výšku doskočiště $h_2 = 1$ m dostaneme tabulku:

h_1	t (sek)				
	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,2	1,547	1,705	1,888	2,095	2,328
1,25	1,575	1,732	1,915	2,122	2,354
1,3	1,604	1,760	1,942	2,148	2,380
1,35	1,634	1,788	1,969	2,176	2,407
1,4	1,664	1,817	1,997	2,203	2,434
1,45	1,695	1,847	2,026	2,230	2,461

Stanovit maximální výšku těžiště těla při skoku je důležité proto, že můžeme určit rozdíl mezi touto výškou a výškou laťky, tedy dokonalost techniky přechodu přes laťku. Zůstává problém, zda skok vrcholil nad laťkou, před ní nebo za ní. To může ukázat kinogram.

Příklad: v literatuře bylo uvedeno, že světový rekordman Javier Sotomayor (Cuba) měl na konci odrazu těžiště těla ve výšce $h_1 = 1,42$ m. Kdyby doskočiště bylo vysoké $h_2 = 1$ m, a max. výška $2,45 + 0,1 = 2,55$ m, pak by let trval

$$t = 0,4156 \cdot \sqrt{2,55 - 1,42} + \sqrt{2,55 - 1} = 1,042 \text{ sek.}$$

Budou tedy lety skokana, trvající více nežli 1 sek poměrně vzácné a jsou důkazem velké odrazové schopnosti skokana.

L09 Skok o tyči

Výška, do které zvedne skokan o tyči své těžiště, je součtem čtyř výšek:

1. výšky těžiště h_1 nad zemí před svislým odrazem
2. zdvihu svislým odrazem h_2
3. zdvihu pomocí rozběhu a pružnosti tyče h_3
4. zdvihu pažemi na svislé tyči h_4 .

Obratnost skokana a technika přechodu přes laťku rozhodne o tom, zda skokan musí zvednout těžiště nad laťku, do její výšky nebo pod ni, protože tělo má tvar \cap .

1. výška těžiště skokana nad zemí na konci rozběhu $h_1 \cong 1,3$ m závisí na tělesné výšce skokana a rozložení hmoty (skokani o tyči mívají lehké nohy a masivní ramena).

2. svislým odrazem může skokan o tyči zvednout těžiště méně nežli skokan do výšky, tedy $h_3 \cong 0,5 - 0,8$ m.

3. na konci rozběhu má skokan vodorovnou rychlost v_1 , pro přechod laťky si musí ponechat vodorovnou rychlost v_2 , takže do pružnosti tyče může uložit rozdíl kinetických energií

$$E_k = 0,5 \cdot m \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$

Tato energie se dá přeměnit v energii polohy $E_p = m \cdot g \cdot h_3$ a zdvih pomocí této energie bude

$$h_3 = (v_1^2 - v_2^2) / 2 \cdot g$$

při účinnosti tyče $\eta < 1$ bude násobena tato výška účinností.

4. uložení kinetické energie do tyče se tyč ohne do oblouku, takže konce tyče spolu svírají úhel blízký 90° . Pak se tyč narovná a při tom katapultuje skokana vzhůru. Na narovnané tyči může skokan zvednout své těžiště pažemi o $h_4 \cong 0,3$ m.

Maximální výška těžiště je pak $H = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$.

Praktický příklad: $h_1 = 1,3$ m, $h_2 = 0,6$ m,

$h_3 = (9,2 - 2^2) / 19,61 = 3,93$ m, $h_4 = 0,3$ m.

$H = 1,3 + 0,6 + 3,93 + 0,3$ m = 6,13 m (světový rekord je 6,15 m). V procentech: $h_1 = 20,7$ %, $h_2 = 9,6$ %, $h_3 = 65$ %, $h_4 = 4,8$ %. Je tedy energetický příspěvek rozběhu a přenosu tyčí největší.

L10 Vliv skloněné dopadové plochy na délku vrhů a hodů

Podle pravidel atletiky (Pravidlo 187, bod 11) „sklon výseče pro dopad náčiní ve směru vrhu nebo hodů nesmí překročit hodnotu 1:1000“.

V rovnici

$$y = y_0 + L \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{4,905 \cdot L^2}{(v \cdot \cos \alpha)^2}$$

dosadíme $y = \pm L / 1000$ nebo 0.

Pro

kouli dosadíme $y_0 = 2,3 \text{ m}$, $\alpha = 42^\circ$, $v = 14 \text{ m/s}$
pro oštěp $y_0 = 2,3 \text{ m}$, $\alpha = 36^\circ$, $v = 30 \text{ m/s}$

Koule: $\pm L / 1000 = 2,3 + L \cdot \operatorname{tg} 42^\circ - 4,905 \cdot L^2 / (14 \cdot \cos 42^\circ)^2$

Oštěp: $\pm L / 1000 = 2,3 + L \cdot \operatorname{tg} 36^\circ - 4,905 \cdot L^2 / (30 \cdot \cos 36^\circ)^2$

Rovnice řešíme podle L pomocí funkce Solver:

y	koule	oštěp
0	22,16	90,311
+ L / 1000	22,14	90,195
- L / 1000	22,18	90,427

Kolísa tedy délka vrhu koulí při sklonu $\pm 1 / 1000$ o $\pm 2 \text{ cm}$
hodu oštěpem při sklonu $\pm 1 / 1000$ o $\pm 11,5 \text{ cm}$

Rekordy by se proto měly schvalovat jen při zlepšení vrhu koulí minimálně o 3 cm, při hodu oštěpem o 12 cm.

M. PLAVÁNÍ

M01 Měření odporu vody vlekem plavce

V hydrodynamickém kanále můžeme změřit odpor vody při různých rychlostech vleku plavce. Dostáváme minimální odpor, protože všechny pohyby plavce tento odpor značně zvětší. Rychlost vleku musí být konstantní, protože se zrychlováním nebo zpomalováním souvisí setrvačné síly.

Odpor vody má dvě složky:

lineární odpor je třecí, povrchová nebo laminární složka, převažující při malých rychlostech:

$$F_1 = c \cdot \eta \cdot s \cdot v = a \cdot v$$

c ... drsnost povrchu

η ... dynamická viskozita vody

s ... povrch těla

v ... rychlost plavce

Kvadratický odpor - turbulentní složka, převažující při velkých rychlostech:

$$F_2 = 0,5 \cdot c_x \cdot h \cdot P \cdot v^2 = b \cdot v^2$$

c_x ... tvarový součinitel těla plavce

h ... hustota vody

P ... průřez těla (plocha)

v ... rychlost plavce

Celkový odpor je součet

$$F = F_1 + F_2 = a \cdot v + b \cdot v^2$$

Abychom mohli z naměřených dat stanovit činitele a, b, použijeme aproximační metodu nejmenších čtverců, obsaženou v následujícím programu.

Literatura

87. Juřina K. K teorii a metodice plaveckého tréninku. 1972, Praha, Fak. těl. vých. a sportů, Karlova Universita.

```
data v1, f1, v2, f2, ..., vn, fn
a:
read x, y: on error goto b
k=x*x: s2=s2+k: s3=s3+x*k
s4=s4+k*k: xy=xy+x*y: yk=yk+y*k
goto a
b:
ds=s2*yk-s3*s3
da=s4*xy-s3*yk
db=s2*yk-s3*xy
```



```

a=da/ds: b=db/ds: print „a,b=„;a,b
c:
input „v=„;v
f=(a+b*v)*v
print „odpor=„;f
goto c
end

```

Příklad: Juřina naměřil a publikoval následující data o rychlosti vleku (m/s), průřezu těla (dm²) a odporu vody (v newtonech):

v (m/s)	P(dm ²)					
	5	6	7	8	9	10
1,0	24,5	26,5	28,4	30,2	32,4	34,3
1,2	32,3	34,3	36,3	39,3	41,2	44,1
1,4	42,2	45,1	47,1	51,0	53,0	56,9
1,6	54,9	58,8	61,8	65,7	68,6	72,6
1,8	69,6	73,5	77,5	82,4	86,3	90,2
2,0	84,3	89,2	95,1	100	104,9	110,8

Programem vypočítáme součinitele a,b a dostaneme tyto rovnice:

$$\begin{aligned}
\text{pro } P=5 \text{ dm}^2: F &= 4,696 \cdot v + 18,696 \cdot v^2 \\
\text{pro } P=6 \text{ dm}^2: F &= 5,857 \cdot v + 19,334 \cdot v^2 \\
\text{pro } P=7 \text{ dm}^2: F &= 6,665 \cdot v + 20,771 \cdot v^2 \\
\text{pro } P=8 \text{ dm}^2: F &= 7,851 \cdot v + 20,974 \cdot v^2 \\
\text{pro } P=9 \text{ dm}^2: F &= 8,425 \cdot v + 21,850 \cdot v^2 \\
\text{pro } P=10 \text{ dm}^2: F &= 10,059 \cdot v + 22,40 \cdot v^2
\end{aligned}$$

Dále můžeme aproximovat závislost a,b na průřezu P:

$$\begin{aligned}
a &= 1,05 \cdot P - 1,77 \\
b &= 0,75 \cdot P + 15
\end{aligned}$$

Výsledné rovnice pro odpor vody, je-li dána rychlost v a průřez těla P:

$$F = (1,05 \cdot P - 1,77) \cdot v + (0,75 \cdot P + 15) \cdot v^2$$

Průřez těla plavce lze stanovit fotograficky.

M02 Odpor vody vlečeného plavce a hnací síla upoutaného plavce

Safarjan publikoval data o odporu plavce, vlečeného různými rychlostmi:

v (m/s)	F (kp)	F (N)
0,35	1,76	17,26
1,35	4,41	43,25
1,65	6,43	62,06
1,8	8,07	79,14
1,95	9,39	92,08
2,1	10,94	107,28

Z těchto dat dostaneme aproximaci

$$F(N) = 23,93 \cdot v^{2,0258} \quad r = 0,99982$$

Hnací síla při plavání na závěsu dynamometru byla měřena na místě ($v = 0$ m/s) a při rychlosti vypouštění závěsu $v = 0,85$ m/s:

čas	v = 0	v = 0,85
na 50 m	(m/s)	(m/s)
	F(N)	F(N)
23	26	13,7
24	23,7	12,8
25	21,4	11,9
26	19,8	11,1
27	18,3	10,3
28	17,3	9,5
29	16,2	8,2
30	15,2	7,9
31	14,2	7,1
32	13,3	6,3
33	12,5	5,7

Nejlepší aproximace:

$$v = 0: F(N) = 245,316 / (t - 13,649) \quad r = 0,9989$$

$$v = 0,85 \text{ m/s } F(N) = 83,821 - 22,303 \cdot \ln(t) \quad r = 0,9996$$

Pokles síly v závěsu při plavání s omezenou rychlostí je způsoben odporem vody. Rychlost klesání hnací síly s rychlostí vypouštění je mírou plavecké schopnosti vytvářet velkou hnací sílu i při vyšší rychlosti, což je schopnost velmi důležitá.

Literatura

88. Safarjan I. G. Faktory, určující rychlost plavání kraulem. (rusky) Těor. prakt. fiz. kult. 1969, č. 4, str. 11 - 16

M03 Fyziologický výkon při plavání

Rychlost výdeje energie (fyziologický výkon) při plavání v cal/min, kcal/hod nebo Watech lze změřit analýzou vydýchaných plynů, které se říká nepřímá kalorimetrie. Takové měření je poměrně obtížné, a přesto jej provedla v případě plavání celá řada autorů. U některých zpracujeme jejich data aproximacemi závislosti výkonu na průměrné rychlosti plavání jednoduchou mocninnou funkcí, která svým exponentem ukazuje strmost této závislosti. Teoreticky podle mechaniky by exponent měl být $n = 3$. Fyziologicky je tato závislost ovlivněna odváděním tepla do vody. Protože autoři neuvádějí teplotu vody, ve které měřili, mohou být mezi jejich výsledky systematické rozdíly kromě individuálních.

89. Karpovich P. V. - Millman N. Energy expenditure in swimming. Amer. Jour. of Physiology 142, 1944, s. 140-.

Po převodu ft/s na 0,3048 m/s a cal/min na 0,06978 W dostaneme:

Kraul:		
m/s	N / kW	
0,671	0,84	$N(\text{kW}) = 1,7645 \cdot v^{2,315}$ $r = 0,958$
1,22	0,96	
1,341	2,8	
1,524	5,075	
1,585	5,32	
1,768	8,68	
Znak:		
0,61	0,7	$N(\text{kW}) = 2,306 \cdot v^{2,546}$ $r = 0,991$
0,914	1,75	
1,22	3,36	
1,524	6,16	
1,585	9,1	
Prsa:		
0,655	0,84	$N(\text{kW}) = 2,952 \cdot v^{2,972}$ $r = 0,998$
0,704	1,05	
1,067	3,36	
1,183	5,25	
1,250	5,6	

Pozn.: data byla vyvzorkována z grafů v knize

90. Krůta – Hornof – Seliger, Úvod do fyziologie tělesných cvičení, 1954, Praha, SZN, str. 350 - 351 a 423.

91. Klissouras V. Energy metabolism in swimming the dolphin stroke Internat. Zeit. angew. Physiologie, 25, 1968, č. 2, s. 142-150

m/s	N(kW)	$N(\text{kW}) = 1,485 \cdot v^{3,077}$ $r = 0,997$
0,61	0,35	
0,91	1,05	
1,22	2,45	
1,514	5,25	
1,707	8,75	

92. Yancher R. - Larsen O. - Lubaer C. Power and velocity relationship in swimming. *Swimming Technique* 19, 1983, č. 4, s.16-18:

0,8	0,057	$N(\text{kW}) = 0,183 \cdot v^{5,218}$ $r = 0,999999$ Pozn.: velmi vysoká hodnota exponentu i korelačního součinitele vyvolávají dojem, že data byla upravena.
1,0	0,183	
1,2	0,474	
1,4	1,059	
1,6	2,125	
1,8	3,928	
2,0	6,807	
2,2	11,191	

93. Vinařický R. Výdej energie při sportovní činnosti. *Tělovýchovný sborník* 10, 1967, s. 77 -

Kraul:

1	0,698	$N(\text{kW}) = 0,674 \cdot v^{3,542}$ $r = 0,994$
1,5	2,617	
1,75	5,7	

Prsa:

0,333	0,266	$N(\text{kW}) = 2,013 \cdot v^{2,042}$ $r = 0,982$
0,5	0,419	
0,833	1,047	

94. Seliger V. - Trefný Z. *Základy fyziologie tělesných cvičení* 1967, Praha, SZN, s. 89 –

0,333	0,2763	$N(\text{kW}) = 2,172 \cdot v^{2,086}$ $r = 0,99$
0,5	0,4438	
0,833	1,1304	
1,5	5,024	
1,75	8,457	

95. Sobolová Z. - Zelenka V. Fysiologie tělesných cvičení a sportu 1973, Praha, Olympia, tab. 33

0,333	0,276	$N(\text{kW}) = 2,172 \cdot v^{2,056}$ $r = 0,987$
0,5	0,46	
0,6	0,787	
0,833	1,164	
1,5	4,296	
1,75	9,203	

96. Seliger V. - Vinařický R. - Trefný Z. Fysiologie tělesných cvičení. 1980, Praha, Avicenum, s.20-21

V grafech jsou data pro plavce na úrovni 370 a 650 bodů, a pro světové rekordmany. Poslední dvě skupiny jsme porovnali:

KRAUL:			
Plavci 650 b.			
	1,44	1,4	$N(\text{kW}) = 0,471 \cdot v^{3,021}$ $r = 0,99993$
	1,63	2,1	
	1,8	2,8	
	1,95	3,5	
Plavci SR			
	1,662	2,141	$N(\text{kW}) = 0,510 \cdot v^{2,8306}$ $r = 0,9998$
	1,727	2,409	
	1,813	2,743	
	2,023	3,747	
ZNAK:			
Plavci 650 b.			
	1,10	0,86	$N(\text{kW}) = 0,564 \cdot v^{4,365}$ $r = 0,9999$
	1,35	2,07	
	1,59	4,3	
Plavci SR			
	1,385	1,4	$N(\text{kW}) = 0,364 \cdot v^{4,158}$ $r = 0,9996$
	1,52	2,1	
	1,63	2,8	
	1,725	3,48	
MOTÝL:			
Plavci 650 b.			
	1,0	1,24	$N(\text{kW}) = 1,183 \cdot v^{2,162}$ $r = 0,9896$
	1,16	1,56	
	1,33	2,24	
	1,53	3,01	
Plavci SR			
	1,22	1,4	$N(\text{kW}) = 0,884 \cdot v^{2,286}$ $r = 0,9998$
	1,465	2,1	
	1,66	2,8	
	1,815	3,48	

PRSA:			
Plavci 650 b.			$N(\text{kW}) = 1,49 \cdot v^{2,156}$ $r = 0,992$
	0,57	0,84	
	1,0	1,45	
	1,19	2,04	
	1,28	2,69	
Plavci SR:			$N(\text{kW}) = 1,17 \cdot v^{2,1296}$ $r = 0,9993$
	1,085	1,4	
	1,325	2,1	
	1,5	2,8	

Na str. 289 v tab. 83 téže knihy najdeme data, která dají tyto závislosti:

Kraul $N(\text{kW}) = 0,658 \cdot v^{3,018}$

Znak $N(\text{kW}) = 0,919 \cdot v^{3,138}$

Motýl $N(\text{kW}) = 1,049 \cdot v^{2,548}$

Prsa $N(\text{kW}) = 1,615 \cdot v^{1,980}$

Ze všech uvedených dat plyne:

1. energetický metabolismus při plování vysokou rychlostí je 50-90× větší, nežli klidový metabolismus (80 – 100 W).
2. ekonomičtější způsoby mají větší součinitel a menší exponent. Neekonomické způsoby (prsa a motýl) mají totiž velký výdej již při malých rychlostech, překvapuje, že roste pomaleji.
3. Najdeme-li průsečíky aproximačních funkcí, dostaneme několik zajímavých výsledků:
kraul je ekonomičtější, než znak pro rychlost $v > 1,24 \text{ m/s}$
znak je ekonomičtější, nežli motýl pro rychlost $v < 1,61 \text{ m/s}$

Ostatní průsečíky křivek leží v oblasti rychlostí, které plavci nedosahují.

M04 Účinnost plavání kolísavou rychlostí

Plavec vytváří hnací sílu záběry svých paží a nohou. Protože má jen dvě paže a dvě nohy, bude hnací síla kolísat a s ní i okamžitá rychlost mezi maximem a minimem. Při tom střední (průměrná) rychlost je dána poměrem dráhy a času (pro celý závod, jeden bazén nebo jedno tempo):

$$v = L / t$$

Okamžitá rychlost kolísá a proto ji musíme stanovit pro velmi krátký okamžik dt :

$$v_0 = dL / dt$$

Průběh okamžité rychlosti měřila řada autorů různými metodami (viz následující seznam literatury). Máme-li změřenu okamžitou rychlost, bude výsledek měření buď

1. ve formě číslíkové, tj. vzorků rychlosti v pravidelných dostatečně krátkých intervalech, nebo
2. ve formě grafu, z něhož musíme předchozí formu získat tzv. vzorkováním, převodem křivky na čísla. To je samozřejmě zatíženo chybami, křivka má ale výhodu, že je ihned vidět pravidelnost křivky a tedy správná funkce měřících přístrojů.

K následující analýze potřebujeme data o jednom typickém cyklu, tj. jednom tempu, který u kraulových způsobů zahrnuje dva úplné záběry, u motýlka a na prsa jedno úplné tempo. Nejdříve můžeme vypočítat střední (průměrnou) rychlost pro jedno tempo

$$V_s = \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{n}$$

ze které lze počítat čas pro celou závodní trať.

Odpor vody, plavcem překonávaný je úměrný druhé mocnině okamžité rychlosti:

$$F_o = k \cdot v_i^2$$

a výkon proti tomuto odporu

$$N_o = F_o \cdot v_i = k \cdot v_i^3$$

Elementární práce je

$$dA = N_o \cdot dt$$

a práce pro celé tempo

$$A = k \cdot dt \cdot \sum v_1^3$$

Práce při rovnoměrné rychlosti, rovné střední je

$$A_s = k \cdot T \cdot v_s^3$$

a tato práce je vždy menší, nežli za tutéž dobu při kolísavé rychlosti. Proto je poměr obou prací roven účinnosti

$$\eta = A_s / A = n \cdot v_s^3 / \sum v_1^3$$

která je vždy menší nežli jednička. Jedničce se blíží tím více, čím menší je kolísání rychlosti.

Platí tedy pravidlo:

Plavecká technika je dokonalejší, klesne-li kolísání okamžité rychlosti.

K výpočtu střední rychlosti a účinnosti plavecké techniky můžeme použít následující program.

```
data 1.2,1.4,1.65,1.85,1.88, 1.85, 1.86, 1.84
data 1.72,1.57,1.53,1.54,1.52,1.45,1.36
a:
read v: on error goto b
s=s+v: k=k+v*v*v: n=n+1
goto a
b:
c=s/n: e=n*c*c*c/k
print „prum.rychlost,účinnost=„;c,e
end
```

Příklad: do řádků data jsou vepsána data od amerického znakaře Templetona, naměřená 17. 12. 1973 v Brně. Program dá $v_s = 1,6147$ m/s, což dává na 100 m čas 1:01,93. Účinnost byla $\eta = 0,9538$, což je daleko více, nežli u tehdejších našich plavců.

Literatura:

97. Karpovich P. V. Swimming speed analyzed. Scientific American 146, 1930, March, str. 224-225
98. Karpovich P. V. An Analysis of Propelling Force in the Crawl Stroke. Research Quarterly 6, 1935, č. 2, s. 49 - 58
99. Karpovich P. V. - Pestrecov K. Mechanical Work und Efficiency in Swimming Crawl Stroke and Back Stroke. Arbeitsphysiologie, 10, 1938, s. 504 - 514
100. Karpovich P. V. - Karpovich G. P. Magnetic Tape Natograph. Research Quarterly, 41, 1970, č.1, str. 119 -
101. Myiashita M. An Analysis of Fluctuation of Swimming Speed. In: Levillie L. - Clarys J. P. First International Symposium on Biomechanics of Swimming. 1970, Proceedings, Bruxelles, 1971, str. 54 -
102. Zschorlich V. - Heeren K. - Wolf H. Der Einsatz der Technik-analyse im Training des Brustschwimmens. Schwimmtrainer (BRD) 1988, Heft 56/57, str. 13 - 21
103. Motyčka J. Kinematická a dynamická analýza plování a veslování. Disertační práce, Brno 1959.
104. Kent M.R. The physics of Swimming. Physics Education 15, 1980, č. 5 (Sept), s. 275 - 279
105. Zschorlich V. - Heeren K. - Wolf H. Der Einsatz der Technikanalyse im Techniktraining des Brustschwimmens. Der Schwimmtrainer (BRD), 1988, No. 56/57, s. 14 - 21

M05 Startovní skok

má tyto části:

- reakční doba
- pohyby na bloku
- let vzduchem
- dopad na vodu a splývání před plaváním

a) reakční dobu můžeme změřit přímo časoměrným zařízením, spuštěným elektrickou pistolí startéra a zastaveným dynamometrickou plošinou na startovním bloku, nepřímo počítáním jednotlivých obrázků na filmu nebo videozáznamu a výpočtem pomocí známé frekvence snímání

b) pohyby na bloku analyzujeme pomocí filmu nebo videozáznamu. S těmito pohyby souvisí změny vodorovných a svislých sil, kterými plavec působí na blok. Protože tyto síly souvisí s rychlostí, kterou plavec opouští blok, je cenné měření těchto sil pomocí 2 dynamometrů, protože musíme měřit obě složky, abychom mohli určit směr odrazu. Z okamžitých hodnot těchto dvou sil je možno kreslit hodogram výsledné odrazové síly $F_0 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$. Z průběhu obou složek můžeme stanovit impulsy obou sil

$$I_x = \int_0^T F_x dt$$

$$I_y = \int_0^T (F_y - G) dt$$

Tíhu G musíme odečíst, protože potřebujeme jen zrychlující sílu. Při odlepení nohou od bloků má pak plavec výslednou (šikmou) rychlost

$$v = \frac{I_v}{m} = \frac{\sqrt{(I_x^2 + I_y^2)}}{m}$$

Tato rychlost bývá 4 – 5 m/s. Její směr je dán úhlem

$$\beta = \arctan(I_y / I_x)$$

c) let vzduchem je určen parabolickou dráhou těžiště, protože odpor vzduchu můžeme zanedbat. Dráha je totiž krátká a rychlost poměrně malá. Na videozáznamu s vhodným pozadím (souřadnicová mříž) lze stanovit 3 polohy těžiště: na začátku letu, ve střední části letu a při dopadu na vodu. Těmito třemi páry souřadnic proložíme parabolu $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ tím, že součinitele a , b , c najdeme metodou nejmenších čtverců (kap. C04, G01). Počáteční bod dráhy je určen vodorovnou vzdáleností těžiště od hrany bloku x_0 , a svislá poloha je určena výškou bloku (podle FINA 0,5 – 0,75 m) a šikmou polohou těla.

Příklad:

počáteční bod	$x_0 = 1,3 \text{ m}, y_0 = 0,75 + 0,5 = 1,25 \text{ m}$
střední bod	$x_1 = 2 \text{ m}, y_0 = 1 \text{ m}$
bod dopadu	$x_2 = 3,12 \text{ m}, y_0 = 0 \text{ m}$
Programem dostaneme	
	$y = -0,29435 \cdot x^2 + 0,6142 \cdot x + 0,949$
počáteční úhel	$\alpha_0 = 31,56^\circ$
počáteční rychlost	$V_0 = 4,79 \text{ m/s}$
vrchol dráhy	$X_{\max} = 1,043 \text{ m} \quad Y_{\max} = 1,269 \text{ m}$

doba letu	$T = 0,764 \text{ s}$
úhel dopadu	$\beta = -50,72^\circ$

d) splývání pod vodou bez plavání začíná rychlostí dopadovou, tedy vyšší nežli je průměrná rychlost plavání. Plavec proto má začít plavat, až jeho rychlost klesne na tuto průměrnou rychlost. Ověřit, zda to dělá můžeme výpočtem doby, za jakou má začít plavat, a to je možné dvěma metodami:

1. přímou integrací pohybové rovnice: setrvačná síla je rovna právě odporu vody, tedy

$$F_s = F_0$$

$$m \cdot dv / dt = k \cdot v^2$$

separací proměnných

$$dv / v^2 = m / k \cdot dt$$

integrací

$$\int_{v_{st}}^{v_p} \frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m} \cdot \int_0^T dt$$

$$\left[-\frac{1}{v} \right]_{v_{st}}^{v_{pl}} = \frac{k}{m} \cdot T$$

Potom čas splývání z rychlosti v_{st} na rychlost v_{pl} bude

$$T = m / k (1 / v_{pl} - 1 / v_{st})$$

Dosazením

$$75 / 34,6 \cdot (1 / 1,7 - 1 / 4) = 0,733 \text{ s}$$

Po této době splývání by měl plavec začít plavat.

2. číselnou integrací diferenciální rovnice II. řádu

$$m \cdot a = k \cdot v^2$$

$$a = y'' = k / m \cdot y^2 = 0,4613 \cdot y^2$$

Rovnice

$$y'' = 0,4613 \cdot y^2$$

dá pro počáteční podmínky $t = 0$, $s = 1,3 \text{ m}$, $v = 4 \text{ m/s}$, $dt = 0,1 \text{ sek}$

tyto hodnoty pro čas t (sek), dráhu s (m), rychlost v (m/s) a zrychlení a (m/s²):

t	s	v	a
0	1,3	4	-7,38
0,1	1,67	3,38	-5,26
0,2	1,98	2,92	-3,94
0,3	2,25	2,58	-3,06
0,4	2,50	2,30	-2,44
0,5	2,72	2,08	-2,00
0,6	2,92	1,90	-1,66
0,7	3,10	1,75	-1,41
0,8	3,27	1,62	-1,20

Lineární interpolací rychlostí v v posledních dvou řádcích (1,746 a 1,6154 m/s) na hodnotu $v_{pl} = 1,7 \text{ m/s}$ dostaneme čas 0,735 sek, což je v dobré shodě s předchozím výpočtem (0,733 sek).

M06 Diferenciální pohybová rovnice plavce po startu nebo obrátce

Plavec má po startu nebo po obrátce vyšší vodorovnou rychlost nežli rychlost plavání. Tato rychlost odporem vody rychle klesá a vznikají dvě otázky:

- jaký má průběh rychlost plavce bez záběrů
- ve kterém okamžiku nebo vzdálenosti klesne rychlost po startu nebo obrátce na rychlost plavání, aby plavec začal plavat.

Pohyb plavce pod vodou bez záběrů je ovládán dvěma vodorovnými silami: odporem vody, který je úměrný druhé mocnině rychlosti

$$F_o = k \cdot v^2 = k \cdot s'^2$$

Tento odpor snižuje plavcovu rychlost, tomu ale jako reakce brání setrvačná síla

$$F_s = m \cdot a = m \cdot v' = m \cdot s''$$

kde zrychlení a je první derivací rychlosti v podle času, nebo druhou derivací dráhy s podle času.

Součinitel odporu vody k v první rovnici lze změřit vletem plavce vodou rovnoměrnou rychlostí:

$$k = \frac{F}{v^2}$$

Podle Newtonova III.principu jsou tyto dvě síly stále v rovnováze, takže platí rovnice sil

$$F_s + F_o = 0$$

Dosazením

$$\begin{aligned} m \cdot a + k \cdot v^2 &= 0 \\ \frac{dv}{dt} + \frac{k \cdot v^2}{m} &= 0 \end{aligned}$$

V této diferenciální rovnici prvního řádu můžeme separovat

Proměnné

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} \cdot dt$$

a integrovat od počáteční rychlosti v_0 do konečné v :

$$\left[-\frac{1}{v} \right]_{v_0}^v = -\frac{k \cdot t}{m}$$

čas pro pokles rychlosti v_0 na v je pak

$$t = \frac{m}{k} \cdot \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right)$$

Z této rovnice je průběh rychlosti v čase

$$v = m \cdot v_0 / \left(\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} \right)$$

dosazením $v = ds / dt$ a separací proměnných po úpravách bude

$$s = \frac{m}{k} \cdot \ln \left(v_0 \cdot k \cdot \frac{t}{m} + 1 \right)$$

Příklad: plavec s hmotností $m = 75$ kg byl při vleku stálou rychlostí 1 m/s vlečen silou $F_0 = 25$ N. Jeho $k = 25$ kg / (m · s²), při závodě na 100 m za 52 sek má průměrnou rychlost 1,923 m/s. Při startu byla naměřena vodorovná rychlost po odrazu $v_0 = 4$ m/s, takže vzorec pro čas je $t = 75 / 25 \cdot (1 / v - 1 / v_0) = 3 \cdot (1 / 1,923 - 1 / 4) = 0,81$ sek.

Rychlost závisí na čase podle vzorce $v = m \cdot v_0 / (v_0 \cdot k \cdot t + m) = 300 / (100 \cdot t + 75)$, dráha vzorcem $s = m / k \cdot \ln(v_0 \cdot k \cdot t / m + 1)$. Oba průběhy jsou v tabulce:

t (s)	v (m/s)	s (m)
0	4	0
0,2	3,158	0,709
0,4	2,609	1,282
0,6	2,222	1,763
0,8	1,935	2,177
1	1,714	2,542
1,5	1,333	3,296
2	1,094	3,897

Na průměrnou rychlost plavání 1,923 m/s klesne rychlost po dopadu na vodu za přibližně 0,8 sek ve vzdálenosti okolo 2,2 m.

M07 Závislost rekordů plavců seniorů na věku

Mezinárodní plavecká amatérská federace FINA vede světové rekordy plavců seniorů od 25 do 90 let. Závislost těchto rekordů na věku nejlépe aproximuje hyperbolická funkce

teoretický rekord = délka / (základní rychlost – konst. věk)

Z této funkce vyplývá, že mezi 25 a 75 lety klesá rychlost při rekordu lineárně s věkem.

Metodou nejmenších čtverců je možné vypočítat základní rychlost a konstantu z řady světových rekordů pomocí následujícího programu.

Literatura

106. FINA Masters News

```
DATA .254, .2505, .2589, .2635, .2708, .2865, .3005, .3034, .3280, .3477
INPUT „L(m), zpus, m/z „; l, z$, s$
FOR a = 25 TO 70 STEP 5
READ t: i = INT(t)
x = 1 / (60 * i + 100 * (t - i))
sx = sx + x: kx = kx + x * x
ax = ax + a * x: NEXT a
j = 2062.5: k = kx - sx * sx / 10
c = ax - 47.5 * sx
b = (sx - c / j * 475) / 10 * l
d = -c / j * l
LPRINT l; z$; s$; TAB(12); b; TAB(25); USING „##.#####“; d
END
```

Příklad: rekordy pro krátký bazén na 50 m delfin muži v jednotlivých věkových kategoriích od 25 do 70 let vepsány do řádku DATA.

Výsledek:

50 dfm $v_0 = 2,35804$ m/s, $k = 0,01247763$

$$t_r = L / (v_0 - k \cdot \text{věk})$$

Teoretický světový rekord na 50 m delfin muži můžeme počítat podle uvedeného vzorce, kde

L ... délka trati

v_0 ... teoretická rychlost pro věk = 0

k ... konstanta

věk ... počet let plavce

M08 Hodnocení a srovnávání seniorských plaveckých výkonů

V předchozí kapitole vypočítané hodnoty parametrů v_0 a k dovolují vypočítat pro libovolný věk od 25 do 70 let teoretický světový rekord podle vzorce

$$T_r = \text{délka trati(m)} / (v_0 - k \cdot \text{věk})$$

S tímto teoretickým rekordem porovnáme skutečný výkon plavce ve formě procent:

$$p(\%) = (\text{rekord} / \text{výkon}) \cdot 100$$

Dostaneme relativní hodnotu rekordu s ohledem na pohlaví a věk plavce, rozlišenou po 1 roce (na rozdíl od kategorií po 5 letech).

Příklad: 53 let starý motýlkář zaplavoval 50 m za 33,5 sek. Pro jeho věk dostaneme teoretický rekord (podle předchozí kapitoly)

$$T_r = 50 / (2,35804 - 0,01247763 \cdot 53) = 29,4685 \text{ sek,}$$

a procentní hodnota výkonu je

$$p = 29,4685 / 33,5 \cdot 100 = 87,96 \%$$

Tato metoda dovoluje srovnávat výkony mužů a žen různého věku, plavající různými způsoby různě dlouhé tratě. Parametry (v_0 , k) lze počítat po každém vydání rekordů věkových kategorií organizací FINA, tedy každoročně.

Literatura

107. Kopřiva J. Závislost výkonnosti a vytrvalosti v lokomočních sportech na věku. Teor. praxe těl. vých. 36, 1988, č. 8, s. 466-8

M09 Grafy popisující souhru plaveckých pohybů

Při plavání je významné pro dosažení vysoké rychlosti, v jaké časové posloupnosti jsou prováděny pohyby paží a nohou. Této posloupnosti říkáme také souhra pohybů. Nejdůležitější je při plavání na prsa, protože u tohoto způsobu provádí plavec pohyby pod vodou ve směru plavání, tedy silně brzdící. Proto musí plavec své pohyby optimalizovat nejen v prostoru, ale i v čase. Abychom mohli posoudit souhru pohybů, potřebujeme tzv. kinogram, tedy záznam pohybů plavce, rozložený do dostatečné blízkých obrázků, snímaných pravidelnou frekvencí buď na film nebo televizní kamerou (kamkorderem). Pak můžeme počítat, kolik obrázků trvá každá důležitá fáze pohybů a jak se tyto fáze překrývají. Máme-li spočítány tyto počty, pomůže nám následující program převést získaná čísla v grafické vyjádření, ke kterým připojí přepočet jednotlivých počtů na procenta. S výsledkem tohoto programu je srovnávání souhry různých plavců-prsařů daleko snadnější a přehlednější.

Počty obrázků počítáme zvlášť pro paže a nohy, začínáme od začátku záběru paží.

```
INPUT „jmeno, datum „ ; j$, d$
INPUT „paže: záběr, vpřed, pausa „; n1, n2, n3
INPUT „nohy: pausa, vpřed, záběr „; n4, n5, n6
n = n1 + n2 + n3
p1 = n1 / n * 100: p2 = (n1 + n2) / n * 100
p3 = 100: p4 = n4 / n * 100
p5 = (n4 + n5) / n * 100: p6 = 100
CLS: SCREEN 9: KEY OFF
PRINT j$, d$
LINE (0, 30)-(300, 30)
LINE (0, 30)-(p1 * 3, 35), 12, BF
LINE (p1 * 3, 30)-(p2 * 3, 25), 12, BF
LINE (0, 50)-(300, 50)
LINE (p4 * 3, 50)-(p5 * 3, 45), 9, BF
LINE (p5 * 3, 50)-(p6 * 3, 55), 9, BF
LOCATE 6, 1: PRINT „paže“;
PRINT USING „#####.#“; n1; n2; n3
PRINT „ „; USING „#####.#“; p1; p2; p3;: PRINT „ %“
LOCATE 8, 1: PRINT „nohy“;
PRINT USING „#####.#“; n4; n5; n6
PRINT „ „; USING „#####.#“; p4; p5; p6;: PRINT „ %“
END
```

N. SKOKY DO VODY

N01 Trvání skoků do vody

Volný pád nebo stoupání tělesa v gravitačním poli se zrychlením g z výšky nebo do výšky H bude trvat

$$t = \sqrt{\frac{H}{4,9033}} = 0,4516 \cdot \sqrt{h} \quad (1)$$

Protože skok se svislým odrazem má část vzestupnou a sestupnou, bude celkový čas

$$t = t_1 + t_2 = 0,4516 \cdot (\sqrt{\Delta h} + \sqrt{\Delta h + h_t + h}) \quad (2)$$

Δh ...zvednutí těžiště po odraze do vrcholu dráhy

h_t ...výška těžiště těla nad plošinou v okamžiku odlepení nohou

h ...výška plošiny prkna nebo věže nad hladinou vody (1 nebo 3 m u prkna, 5 nebo 10 m u věže)

Dosažením $h = 1, 3, 5$, nebo 10 m,

$\Delta h = 0,5$ m u věže, $2,2$ m u prkna

$h_t = 1,2$ m

do rovnice (2) dostaneme tabulku

	h (m)	t_{stoup}	t_{kles}	t_{celk}
prkna	1	0,6648	0,9473	1,6171
	3	0,6648	1,1425	1,8123
věže	5	0,3193	1,1689	1,4882
	10	0,3193	1,5447	1,8640

Není tedy velký rozdíl mezi trváním letu při skocích z prkna a věže. Všechny pohyby ve vzduchu, t.j. překoty a vruty a změny poloh částí těla (např. schylmo nebo skrčeně) nemají vliv na pohyb těžiště a proto nemění trvání skoku.

K výpočtům potřebujeme znát zvednutí Δh po odraze. Inversní úloha - výpočet tohoto zvednutí, známe-li trvání skoku - není proveditelná analyticky, protože rovnice (2) je transcendentní a řešit ji podle Δh není možné. Pomůžou ale numerické metody, z nichž jednou z nejelegantnějších je metoda SOLVER u vědeckých kalkulátorů. Vepíšeme-li rovnici (2) do tohoto programu, můžeme řešit rovnici podle kterékoliv proměnné.

Příklad: na mistrovství světa v Perthu při soutěži mužů z 1 m prkna jsme 16. 1. 1998 naměřili časy skoků od 1,05 do 1,51 sek.

Pro $h_t = 1,2$ m a $h = 1$ m dostaneme Solverem tabulku pro zvolené časy:

t (s)	Δh (m)
1,0	0,3726
1,1	0,5872
1,2	0,8366
1,3	1,1177
1,4	1,4285
1,5	1,7678
1,501	1,77138
1,51	1,8033

Z posledních tří řádků tabulky plyne, že při chybě měření času 0,001 s je chyba stanovení zvednutí z 3,5 mm, při chybě 0,01 s je chyba zvednutí 3,5 cm. Proto stačí k orientačnímu výpočtu zvednutí změřit čas s přesností 0,1 sek, což ale nelze zaručit při ručním měření času.

Následuje tabulka časů pro výšky 1,3,5 a 10 m a jim odpovídající zvednutí těžiště odrazem:

čas(sek)	1m	3m	5m	10m
0,67	1E-7			
0,68	5E-4			
0,70	4E-3			
0,72	0,0115			
0,74	0,022			
0,76	0,035			
0,78	0,051			
0,80	0,07			
0,82	0,091			
0,84	0,115			
0,86	0,140			
0,88	0,168			
0,90	0,198			
0,92	0,229			
0,94	0,262	0,001		
0,96	0,297	0,006		
0,98	0,334	0,014		
1,00	0,373	0,025		
1,02	0,412	0,040		
1,04	0,454	0,057		
1,06	0,497	0,078		
1,08	0,541	0,101		
1,10	0,587	0,127		
1,12	0,634	0,155		
1,14	0,683	0,185	0,001	
1,16	0,733	0,218	0,006	
1,18	0,784	0,253	0,014	
1,20	0,836	0,290	0,026	
1,22	0,890	0,329	0,041	

1,24	0,945	0,370	0,059	
1,26	1,002	0,413	0,081	
1,28	1,059	0,457	0,105	
1,30	1,118	0,504	0,131	
1,32	1,178	0,552	0,161	
1,34	1,239	0,602	0,193	
1,36	1,301	0,654	0,227	
1,38	1,364	0,707	0,264	
1,40	1,429	0,761	0,303	
1,45	1,595	0,905	0,409	
1,50	1,768	1,058	0,529	
1,55	1,948	1,219	0,661	0,007
1,60	2,135	1,389	0,804	0,036
1,65	2,328	1,568	0,957	0,087
1,70	2,528	1,754	1,121	0,156
1,75	2,735	1,948	1,294	0,242
1,80	2,948	2,149		0,346
1,85		2,358		0,464
1,90		2,574		0,597
1,95		2,798		
2,00		3,028		

Sloupce končí u nedosažitelných hodnot - u prkna 3 m, u věže 0,6 m.

Literatura

108. Dawson W. S. Mechanics of the Inward Dive. Swimming Technique, 1970
109. Competitive diving is safe with proper precautions. Swimming Technique, 6, 1970, č.4 (Jan), str. 128

N02 Rotace při skocích do vody

Z celkového pootočení α a doby letu vzduchem t lze vypočítat potřebnou průměrnou úhlovou rychlost rotace (překotu nebo vrutu):

$$\omega = \alpha / t$$

přičemž za překot nebo vrut považujeme otočení podle příčné nebo podélné osy o 360° .

Vezmeme-li v úvahu celkové časy skoků t_{celk} , dostaneme pro různé výšky různé úhlové rychlosti:

počet	úhel	1 m	3 m	5 m	10 m
1/2	180	111,31	99,32	120,95	96,57
1	360	222,62	198,64	241,90	193,13
1,5	540	333,93	297,96	362,85	289,70
2	720	445,24	397,28	483,81	386,27
2,5	900	556,55	496,60	604,76	482,83

S těmito úhlovými rychlostmi rotace těla při skocích do vody souvisí jednak různý způsob odrazu, který rotace vytváří, jednak poloha těla při rotacích: přímé polohy těla mají velký moment setrvačnosti k příčné ose rotace a vyžadují větší rotační impuls, nežli polohy schylmo nebo dokonce skrčeně. Při překotech napřed se musí skokan při odrazu nohama přibrzdit, při překotech zpětných se musí podběhnout. Vrutové rotace vznikají při brzdivých nebo zrychlujících odrazech mimo svislou rovinu, procházející těžištěm těla.

N03 Skok do vody jako parabolická dráha

Protože při skocích do vody můžeme zanedbat odpor vzduchu, je dráha těžiště parabolická a můžeme použít program pro vyšetření parametrů parabolické dráhy (G01). Potřebujeme jen dostatečně přesné odhady souřadnic těžiště x , y 3 bodů této dráhy: prvním bude poloha těžiště na začátku skoku, druhým ve vrcholu dráhy a posledním poloha těžiště při dopadu do vody.

Pro **prkno 1 m** dostaneme:

x	y
0	2,2
0,6	4,4
1,5	0

Z těchto souřadnic dostaneme rovnici paraboly

$$y = -5,7037 x^2 + 7,0889 x + 2,2$$

z ní pak

počáteční úhel	$\alpha = 81,97^\circ$
počáteční rychlost	$v = 6,639 \text{ m/s}$
vodorovnou složku rychlosti	$v_x = 0,9273 \text{ m/s}$
svislou složku rychlosti	$v_y = 6,574 \text{ m/s}$
souřadnice vrcholu dráhy	$x_m = 0,621 \text{ m}$ $y_m = 4,402 \text{ m}$
trvání letu	$T = 1,6175 \text{ sek}$
úhel dopadu	$\beta = -84,302^\circ$
délka paraboly	$L = 6,896 \text{ m}$

Věž 10 m:

x	y
0	11,2
0,5	11,7
2	0

Dostaneme rovnici

$$y = 4,4 x^2 + 3,2 x + 11,2$$

počáteční úhel	$\alpha = 72,646^\circ$
počáteční rychlost	$v = 3,540 \text{ m/s}$
vodorovná složka	$v_x = 1,0558 \text{ m/s}$
svislá složka	$v_y = 3,3786 \text{ m/s}$
vrchol	$x_m = 0,3636 \text{ m}$ $y_m = 11,782 \text{ m}$
trvání letu	$T = 1,894 \text{ sek}$
úhel dopadu	$\beta = -86,0275^\circ$
délka dráhy	$L = 12,715 \text{ m}$

O. CYKLISTIKA

O01 Frekvence šlapání

Vzdálenost, kterou ujede bicykl na jednu otočku pedálů je dána vzorcem

$$L = \pi \cdot D \cdot Z_1 / Z_2$$

D ... průměr zadního kola

Z₁ ... počet zubů talíře

Z₂ ... počet zubů pastorku

Vzdálenost, ujetá za 1 hodinu je rovna rychlosti v km/h

$$v = n \cdot L \cdot 60 / 1000$$

n ... počet otáček pedálů za minutu, rovný hledané frekvenci

$$n = v / 0,06 \cdot L$$

Z dat o vývoji světového rekordu v hodinovce dostaneme následující tabulku:

rekordman	datum	v	L	n	Z1/Z2	D
		km/h	m	ot/m	= převod	m
Slaats	29.7.37	45,535	7,32	103,7	24/7=3,4286	0,6796
Archambaud	3.11.37	45,817	7,32	104,3	24/7	
Coppi	7.11.42	45,848	7,40	103,3	52/15=3,466	0,6795
Anquetil	29.6.56	46,159	7,40	104	52/15	
Baldini	19.9.56	46,393	7,40	104,5	52/15	
Riviere	8.9.57	46,923	7,40	105,7	52/15	
Riviere	23.9.58	47,346	7,54	104,7	53/15=3,533	0,6793
Bracke	30.10.67	48,093	7,54	106,3	53/15	
Ritter	10.10.68	48,653	7,69	105,4	54/15=3,6	0,6799
Merckx	25.10.72	49,431	7,93	103,9	52/14=3,714	0,6759
Moser	19.1.84	50,808	8,17	103,6	56/15=3,733	0,6966
Moser	23.1.84	51,151	8,27	103,1	57/15=3,8	0,6927
Obree	17.7.93	51,596	9,25	93	52/12=4,33	0,6795
Boardman	23.7.93	52,270	8,70	100,1	53/13=4,116	0,6793
Obree	27.4.94	52,713	9,25	95	52/12=4,33	0,6795
Indurain	2.9.94	53,040	8,76	100,9	59/14=4,214	0,6617
Rominger	22.10.94	53,832	8,76	102,4	59/14	0,6617
Rominger	5.11.94	55,291	9,02	102,2	60/14=4,286	0,6699
Boardman	6.9.96	56,375	9,02	104,2	56/13=4,308	0,6695

Z této tabulky můžeme učinit tyto závěry:

1. zlepšování světového rekordu v hodinovce za posledních 60 let nastalo střídavě
 - a) rostoucí frekvencí šlapání (1937, 1942-1957, 1958-1967, 1993-1996)
 - b) rostoucím převodem a tedy růstem svalové síly
2. relativně stálou frekvenci během posledních 60 let (100 - 106 ot / min) lze vysvětlit pozoruhodným vztahem nejpříjemnější frekvence šlapání k srdeční frekvenci.
3. Francesco Moser v roce 1984 použil speciální bicykl s velmi velkým zadním kolem, avšak z dat byl vypočítán standardní průměr zadního kola okolo 0,69 m. V tomto případě musí mít L nebo Z_1 a Z_2 jiné hodnoty, nežli uvedené.

Literatura

110. Superman! Peloton (český časopis), 1996, č. 11, str. 18-19.
111. Nagornyj V. E. Javlenije sichronizacii ritma serdečnoj dějatelnosti s ritmom fizičeskoj raboty. Těor.Prakt.Fiz.Kult. 1964,č.12,str.13-15.

P. LUKOSTŘELBA

P01 Elementární teorie luku

Kdyby vodorovná síla, kterou napíná lukostřelec tětívu rostla lineárně se zdvihem tětivy x , platilo by

$$F = k \cdot x$$

Práce, vykonaná lukostřelcem při napínání tětivy do celkového zdvihu D je při proměnné síle F rovna

$$A = \int_0^D F \cdot dx = \int_0^D k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot D^2$$

Šíp, opouštějící luk má rychlost v_0 a tedy kinetickou energii

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

Při mechanické účinnosti luku, rovné 1 (100 %) se bude vykonaná práce rovnat kinetické energii:

$$E_{\text{kin}} = A$$
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot D^2$$

Odtud počáteční rychlost letu šípu

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot D$$

Roste tedy rychlost šípu s posuvem tětivy, s odmocninou tvrdosti k luku a klesá s odmocninou hmotnosti šípu m .

Příklad:

Šíp s hmotností $m = 0,028$ kg má dosáhnout počáteční rychlost $v_0 = 60$ m/s při zdvihu tětivy $D = 0,3$ m. Luk musí pak mít konstantu tvrdosti $k = m \cdot v_0^2 / D^2 = 1120$ kg/s² = 1120 N/m, a síla, potřebná k napnutí tětivy bude $F = k \cdot D = 335$ N = 34,3 kp.

R. RYCHLOBRUSLENÍ

R01 Bodování velkého a sprinterského čtyřboje v rychlobruslení.

Bodování rychlobruslařských čtyřbojů se provádí součtem časů pro průměrné pětistovky ze všech 4 tratí. U čtyřboje mužů se čas na 5000 m dělí deseti, na 1500 m se dělí 3, a na 10 km se dělí 20.

U žen se čas na 1000 m dělí 2, na 3000 m šesti. U sprinterského čtyřboje se opakuje dvojice 500 a 1000 m, druhý čas se dělí 2.

Použijeme programy:

Sprinterský 4boj - společný pro muže i ženy

```
PRINT „první den“
```

```
INPUT „t500 (sek)“, b: GOSUB d: b = t
```

```
INPUT „t1000 (min.sek)“, t: GOSUB s: b = b + t / 2: GOSUB d
```

```
PRINT „druhý den“
```

```
INPUT „t500 (sek)“, t: b = b + t: GOSUB d
```

```
INPUT „t1000 (min.sek)“, t: GOSUB s: b = b + t / 2: GOSUB d
```

```
END
```

```
s:
```

```
t = 60 * INT(t) + 100 * (t - INT(t)): RETURN
```

```
d:
```

```
PRINT „body=“, b: RETURN
```

Čtyřboj muži

```
PRINT „první den“
```

```
INPUT „t500 (sek)“, b: GOSUB d
```

```
INPUT „t5000 (min.sek)“, t: GOSUB s: b = b + t / 10: GOSUB d
```

```
PRINT „druhý den“
```

```
INPUT „t1500 (min.sek)“, t: GOSUB s: b = b + t / 3: GOSUB d
```

```
INPUT „t10000 (min.sek)“, t: GOSUB s: b = b + t / 20: GOSUB d
```

```
END
```

```
s:
```

```
t = 60 * INT(t) + 100 * (t - INT(t)): RETURN
```

```
d:
```

```
PRINT „body=“, b: RETURN
```

Čtyřboj ženy

```
PRINT „první den“
```

```
INPUT „t500 (sek)“, b: GOSUB d
```

```
INPUT „t1500 (min.sek)“, t: GOSUB s: b = b + t / 3: GOSUB d
```

```
PRINT „druhý den“
```

```
INPUT „t1000 (min.sek)“, t: GOSUB s: b = b + t / 2: GOSUB d
```

```
INPUT „t3000 (min.sek)“, t: GOSUB s: b = b + t / 6: GOSUB d
```

```
END
```

```
s:
```

```
t = 60 * INT(t) + 100 * (t - INT(t)): RETURN
```

```
d:
```

```
PRINT „body=“, b: RETURN
```


Z. SEZNAM LITERATURY

1. Brancazio P. J. Sport Science. 1954, New York, Simon and Schuster
2. Brodie D.A. - Thornhill J. J. Microcomputing in Sport and Physical Education. 1983, New York, Sterling Publ. Co.
3. Donnelly Joseph E.(Edit). Using Microcomputers in Physical Education and the Sport Sciences. 1987, Champaign - Illinois, Human Kinetics Publishers Inc.
4. Griffing D.F. The Dynamics of Sports. 1987, Oxford - Ohio, Dalog Co.
5. Lampe E. Mathematik und Sport. 1956, Leipzig, B. G. Teubner
6. Sadovskij L. E. - Sadovskij A.L. Matematika i sport. 1969, FiS, Moskva
7. Townsend M. S. Mathematics in Sport. 1984, Chichester, Ellis Horwood.
8. Zaciorskij V.M. Kybernetika, matematika, sport. 1969, FiS, Moskva.
9. Sassouri. Communic.of Assoc.Computer Manufactur. (CACM), 1961, č. 3
10. Agejev N. I. Algoritmy 1-50. Moskva, VC AN SSR, 1966, s. 71-73, algoritmus 39a.
11. Jahn W. - Wahle H. Die Faktorenanalyse und ihre Anwendung. 1970, Verlag Die Wirtschaft, Berlin, str. 41
12. Lohse H. - Luwig R. - Roehr L. Statistische Verfahren. 1982, Volk und Wissen, Berlin, str. 208/209
13. Storm Regina: Wahrscheinlichkeitsrechnung, methematischeStatistik und statistische Qualitaetskontrolle. 1976, Fachbuchverlag, Leipzig, str. 244-245
14. Clauss G. - Ebner H. Grundlagen der Statistik fuer Psychologen, Pedagogen und Soziologen. Berlin,Volk u.Wissen, 7 vyd.,1983
15. Thomas J.R. - Nelson J. K. Research Methods in Physical Activity, Human Kinetics, Champaign, Illinois, 1990, 2nd. ed., p.140
16. Jahn W., - Wahle H. Die Faktoranalyse. Die Wirtschaft, Berlin, 1970, str. 36
17. Storm Regina. Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitaetskontrolle. Fachbuchverlag, 1976, str. 242
18. Clauss G. - Ebner H. Grundlagen der Statistik fur Psychologen, Pedagogen und Soziologen. 1983, 7th ed., Volk u Wissen, Berlin, str. 263-267
19. The Essentials of Statistics II, Research and Education Association, New Jersey, 1989, str.182-183
20. Abramowitz M. - Stegun Irene A. Handbook of mathematical functions. NBS, 1963, vzorec 26.2.23
21. Reisenauer R. Metody matematické statistiky. Praha, SNTL, 1965, str. 119 (1970, str. 128)
22. Abramowitz M. - Stegun Irene: Handbook of Mathematical Functions, NBS, 1964, vzorec 26.2.23
23. Seberová, H. - Sebera, M. Počítačové zpracování dat II. 1. vyd. Vyškov: VVŠ PV, 1999. 134 s. ISBN 80-7231-052-6.
24. Kočí V. Několik programů pro kalkulátor Sharp PC-1211. Elektrotechnický Obzor 75, 1985, č. 5-6, s. 301-310
25. Djakonov V. P. Spravočnik po algebram i programmam na jazyke Bejsik dlja personalnych EVM. 1987, Moskva, Nauka, s. 229
26. c/s: Slaboproudý Obzor 42, 1981, č.1, str. 41-42.
27. Storm Regina. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Statistische Qualitaetskontrolle. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1976, 6. vyd., str. 236-237
28. Technický průvodce Matematika, Praha, ČMT, 1944, str. 318
29. Návod k počítači SHARP PC-1500, str. 47

30. Abbott F. J. - Firestone F. A. Specifying surface quality. *Mechanical Engineering* 55, 1933, str. 569-572
31. *Technisches Messen* 1980, č.10, str. 361-368
32. Jelínek M. *Matice*. SPN, Praha, 1976, str. 39-40
33. Rychnovský R.: *Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení*. Praha, SNTL - Práce, 1972
34. Abramowitz M. - Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*, NDS, 1964, vzorec 25.5.20
35. Hay J.G. *The biomechanics of sports techniques*. 1985, Prentice Hall Intrnat. Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, str.157
36. Zaciorskij V. M. - Aruin A. S. - Selujanov V. N. *Biomechanika dvigatělnogo apparata čeloveka*. 1981, FiS, Moskva, str. 29, 38-39, 118.
37. Donskoj D. D. - Zaciorskij V. M. *Biomechanika*. 1979, FiS, Moskva, str. 61
38. Hay James G. *The Biomechanics of Sports Technique*. 1985, 3. vyd. Prentice-Hall International Inc., Englewood Cliffs, N. J.,USA
39. Zvonař, Martin , Sebera, Martin. *Simi motion 3D biomechanická analýza*. *Studia sportiva*, Brno, FSpS MU Brno. ISSN 1802-7679, 2007, vol. 2/1, no. 1, 116 s.
40. Drastich L. *Tělověda*. 1948, Praha-Brno, Komenium, str. 151
41. Sobolová V. - Zelenka V. *Fysiologie tělesných cvičení a sportu* 1973, Praha, Olympia, obr. 37
42. Šolc I. - Lochman J. *Kvantitativní vztahy v typologii člověka*. *Vesmír* 61, 1982, č. 3, str. 71-74
43. Heath B.H. - Carter J.E. *A modified somatotype method*. *Amer. J. Phys. Anthropol.* 27, 1967, p. 57-74
44. Kopřiva J. - Čechovský K. *Determination of Heath-Carter somatotype and somatotype dispersion index using a computer*. *Anthropologie* 28, 1990, p. 31-33
45. Ross W.D. - Wilson B.D. *A Somatotype Dispersion Index*. *Research Quarterly*, 44, 1973, str. 372-374.
46. Mohr M. *Methods of Epidemiological Nutritional Status Assesment of Adults*. In: *Methods of Functional Anthropology. Proc. Symposium, 5-8.9.1977 in Prague*. Prague, 1979, str.139-144
47. Schilpp R.W. *A mathematical description of the heart rate curve of response to exercise*. *Research Quarterly* 22, 1951, str. 437-445.
48. Suggs C.W. *An analysis of heart rate response to exercise*. *Research Quarterly* 39, 1968, str. 195-205
49. Seliger V. - Vinařický R. - Trefný Z. *Fysiologie tělesných cvičení*. Avicenum, Praha, 1980, str. 94, obr. 39
50. Placheta Z. *Submaximal exercise testing*. 1988, Brno, J. E. Purkyně University, str. 116, obr. II-22.
51. Lietzke M. H. *Science* 124,1956, č. 3213, str. 486
52. Měkota K. - Blahuš P. *Motorické testy v tělesné výchově*. 1983, Praha, SPN, str. 122
53. Berger R. A. *Determination of method to predict 1-RM chin and dip from repetitive chins and dips*. *Research Quarterly*, 8, 1967, str. 330-335
54. Beránková, L. *Možnosti objektivizace diagnostiky úrovně svalové síly při posuzování funkčního stavu svalového systému pohybového aparátu*. *Ternčianské teplice: Slovenská spoločnosť telovýchovného lekárstva*, 2004. s.16-17. 11.9.2004, Trenčianské Teplice, Slovenská republika.
55. Zaciorskij V. M. - Godik N. G. - Smirnov J. I. *Issledovanije vzaimosvjazi meždu fizičeskimi kačestvami*. *TPFK* 1969, č.1, str. 2, obr. 12

56. Feser R. Die Entwicklung der motorischen Kraft qualifizierter Gewichtheber. Leistungssport 7, 1977, č. 4, str. 251-256.
57. Boruttau H. Die Arbeitsleistungen des Menschen. 1916, B.G. Teubner, Leipzig-Berlin
58. Bělehrádek J. Člověk v číslech. 1942, Borový, Praha
59. Černoch S. Strojně technická příručka I. 1947, Práce, Praha
60. Elektrotechnický Obzor 1941, str. 145
61. Williams. Man powered flight. Science Journal (GB), 2, 1966, č. 3, str. 74-79
62. Scientific American 253, 1985, č. 5, str. 122-129
63. Zelený. Acta Univ. Carol., Suppl. IV, 1957, str. 55-59
64. Rujbr Z. Doba reakce. TPTV 15, 1967, str. 92-105.
65. Kopřiva J. Optimální úhel hodů a vrhů. TPTV 16, 1968, 4, s. 251
66. Lampe E. Mathematik und Sport. 1956, B.G. Teubner, Leipzig, s. 16
67. Townend M. S. Mathematics in sport. 1984, Ellis Horwood, Chichester, s. 45.
68. Lietzke T. H. Science 124, 1956, č. 3220
69. Kihlberg J. - Karvonen M. J. Comparison on statistical basis of achievement in track and field events. Reseach Quarterly, 28, 1957, 3, s. 244-256
70. Kihlberg J. - Karvonen M. J. Statistical distribution and predictability of top class achievements in track and field sporting events. Wychowanie Fyzyczne i Sport, 4, 1960, s. 145-56
71. Světové tabulky 1989, Praha, ASTAT, 1990
72. Zaciorskij V. M. Kibernetika, matematika, sport. Moskva, FiS, 1969, str. 94-95
73. Kopřiva J. Kvantitativní měřítko vytrvalosti. Teor. praxe. těl. vých., 35, 1987, č. 5, str. 271-274
74. Kopřiva J. Rychlostní a vytrvalostní složka výkonnosti v lokomočních sportech. Teor. praxe těl. vých. 38, 1990, č.10, str.603-
75. Kopřiva J. Bodování a vývojová tabulka sportovních výsledků. Teor. praxe těl. vých. 26, 1978, č.10, str. 637-639
76. Seliger V. - Vinařický R. - Trefný Z. Fysiologie tělesných cvičení 1980, Praha, Avicenum, str. 23, tab.1
77. Vinařický R. Výdej energie při sportovní činnosti. Tělovýchovný sborník 10,1967, 77-
78. Vinařický R. - Kubalová S. - Frank V. - Vodička P. Výdej energie při lehkootletických bězích, vztah rychlosti běhu a výdeje energie, využití individuálních rozdílů v tréninkové praxi. Teor. praxe těl. vých.19, 1971, 722-
79. Kopřiva J. Vyhodnocení tréninkového deníku v lokomočních sportech grafem nebo počítačem. Teor. praxe těl. vých, 37,1989, 261
80. Machalický J. Tenisové míče a pravidla. Teor. praxe těl. vých. 16, 1968, č. 3, str. 180-181
81. Čelíkovský a kol. Antropomotorika pro studující tělesné výchovy. SPN, Praha, 1979, s.89, obr. 16
82. Zajkin V. - Utkin V. - Zimina O. Energetičeskaja i pulsovaja stojimosti obščerazvivajuščich gimnastičeskich upražněnij Těor. prakt. fiz. kult. 1987, č. 9, str. 45-47
83. Griffing D. F. The Dynamics of Sports. (3rd.ed.),1987, Dalog Co.,Oxford, Ohio, str. 87
84. Klovov L. A. - Vasiljeva E. S. Gaswechseluntersuchungen beim Laufüber verschiedene Strecken. Arbeitsphysiologie 7,1934, 62-
85. Vinařický R. - Kubalová S. - Frank V. - Vodička P. Výdej energie při lehkootletických bězích, vztah rychlosti běhu a výdeje energie, využití individuálních rozdílů v tréninkové praxi. Teor. praxe těl. vých. 19, 1971, č.12, str. 722-729
86. Yamaoka S. Studies on metabolismus in athletics sports. Res. Jour. Physiol.Educ. 9, 1965, 28

87. Juřina K. K teorii a metodice plaveckého tréningu. 1972, Praha, Fak. těl. vých. a sportů, Karlova Universita.
88. Safarjan I.G. Faktory, určující rychlost plavání kraulem. (rusky) Těor. prakt. fiz. kult. 1969, č. 4, str. 11-16
89. Karpovich P. V. - Millman N. Energy expenditure in swimming. Amer. Jour. of Physiology 142, 1944, s. 140-
90. Krůta – Hornof – Seliger. Úvod do fyziologie tělesných cvičení, 1954, Praha, SZN, str. 350-351 a 423.
91. Klissouras V. Energy metabolism in swimming the doplhin stroke Internat. Zeit. angew. Physiologie, 25, 1968, č. 2, s. 142-150
92. Yancher R. - Larsen O. - Lubaer C. Power and velocity relationship in swimming. Swimming Technique 19, 1983, č. 4, s. 16-18
93. Vinařický R. Výdej energie při sportovní činnosti. Tělovýchovný sborník 10, 1967, s. 77-
94. Seliger V.- Trefný Z. Základy fyziologie tělesných cvičení 1967, Praha, SZN, s. 89-
95. Sobolová Z. - Zelenka V. Fysiologie tělesných cvičení a sportu 1973, Praha, Olympia, tab. 33
96. Seliger V. - Vinařický R. - Trefný Z. Fysiologie tělesných cvičení. 1980, Praha, Avicenum, s. 20-21
97. Karpovich P.V. Swimming speed analyzed. Scientific American 146, 1930, March, str. 224-225
98. Karpovich P. V. An Analysis of Propelling Force in the Crawl Stroke. Research Quarterly 6, 1935, č. 2, s. 49-58
99. Karpovich P.V. - Pestrecov K. Mechanical Work und Efficiency in Swimming Crawl Stroke and Back Stroke. Arbeitsphysiologie, 10, 1938, s. 504-514
100. Karpovich P. V. - Karpovich G. P. Magnetic Tape Natograph. Research Quarterly, 41, 1970, č. 1, str. 119-
101. Myiashita M. An Analysis of Fluctuation of Swimming Speed. In: Levillie L. - Clarys J. P. First International Symposium on Biomechanics of Swimming. 1970, Proceedings, Bruxelles, 1971, str. 54-
102. Zschorlich V. - Heeren K. - Wolf H. Der Einsatz der Technikanalyse im Training des Brustschwimmens. Schwimmtrainer (BRD) 1988, Heft 56/57, str. 13-21
103. Motyčka J. Kinematická a dynamická analýza plování a veslování. Disertační práce, Brno 1959.
104. Kent M. R. The physics of Swimming. Physics Education 15, 1980, č. 5 (Sept), s. 275-279
105. Zschorlich V. - Heeren K. - Wolg H. Der Einsatz der Technikanalyse im Techniktraining des Brustschwimmens. Der Schwimmtrainer (BRD), 1988, No. 56/57, s. 14-21
106. FINA Masters News
107. Kopřiva J. Závislost výkonnosti a vytrvalosti v lokomočních sportech na věku. Teor. praxe těl. vých. 36, 1988, č. 8, s. 466-8
108. Dawson W.S. Mechanics of the Inward Dive. Swimming Technique 1970
109. Competitive diving is safe with proper precautions. Swimming Technique 6, 1970, č. 4 (Jan), str. 128
110. Superman! Peloton (český časopis), 1996, č. 11, str. 18-19.
111. Nagornyj V. E. Javlenije sichronizacii ritma serdečnoj dějatelnosti s ritmom fizičeskoj raboty. Těor. Prakt. Fiz. Kult. 1964, č. 12, str. 13-15.