

# Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými

Lenka Baráková

2. listopadu 2005

# Obsah

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2 - y)$ . . . . .	3
---	---

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y' = x(2 - y)$$

Rovnice je separovatelná.  $f(x) = x, g(y) = y - 2$ .

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y' = x(2 - y) \quad y \neq 2$$

Před samotnou separací proměnných (tj. podělením funkcí  $g(y) = y - 2$ ) najdeme konstantní řešení. To splňuje podmínku  $g(y) = y - 2 = 0$ . Konstantním řešením je tedy funkce  $y(x) = 2$ .

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y' = x(2 - y) \quad y \neq 2$$

$$\frac{y'}{2 - y} = x$$

Separujeme proměnné pro  $y \neq 2$ .

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y' = x(2 - y) \quad y \neq 2$$

$$\frac{y'}{2 - y} = x$$

$$\int \frac{y'}{2 - y} dx = \int x dx$$

Integrujeme.

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y' = x(2 - y) \quad y \neq 2$$

$$\frac{y'}{2 - y} = x$$

$$\int \frac{y'}{2 - y} dx = \int x dx$$

$$\int \frac{1}{2 - y} dy = \int x dx$$

Můžeme použít "substituci"  
proměnné  $y$ .

$$y = y(x) \\ dy = y(x)' dx$$

a přejít nalevo k



Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y' = x(2 - y) \quad y \neq 2$$

$$\frac{y'}{2 - y} = x$$

$$\int \frac{y'}{2 - y} dx = \int x dx$$

$$\int \frac{1}{2 - y} dy = \int x dx$$

$$-\ln|2 - y| = x^2 + c$$

Obě strany integrujeme a dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice v implicitním tvaru.

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$-\ln |2 - y| = x^2 + c$$

Budeme se snažit vyjádřit  $y$ .

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$-\ln |2 - y| = x^2 + c$$

$$\ln |2 - y| = -x^2 + c$$

Osamostatňujeme  $y$  na levé straně, tj. násobíme  $-1$ .

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$-\ln |2 - y| = x^2 + c$$

$$\ln |2 - y| = -x^2 + c$$

$$e^{\ln |2-y|} = e^{-x^2+c}$$

Odlogaritmujeme, tj. použijeme inverzní funkci k přirozenému logaritmu, kterou je exponenciála.

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$-\ln |2 - y| = x^2 + c$$

$$\ln |2 - y| = -x^2 + c$$

$$e^{\ln |2-y|} = e^{-x^2+c}$$

$$|2 - y| = e^{-x^2} k, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$e^{\ln \heartsuit} = \heartsuit$$

Navíc platí  $e^{-x^2+c} = e^{-x^2} \cdot e^c = e^{-x^2} k$ , přičemž  $k$  je nutně kladné.

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$-\ln |2 - y| = x^2 + c$$

$$\ln |2 - y| = -x^2 + c$$

$$e^{\ln |2-y|} = e^{-x^2+c}$$

$$|2 - y| = e^{-x^2} k, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$2 - y = e^{-x^2} k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Absolutní hodnota je vždy kladná, zrušíme-li ji, dostaneme i záporná čísla. Můžeme to zapsat pomocí konstanty  $k$ , kterou povolíme kladnou i zápornou - mimo nuly.

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$-\ln |2 - y| = x^2 + c$$

$$\ln |2 - y| = -x^2 + c$$

$$e^{\ln |2-y|} = e^{-x^2+c}$$

$$|2 - y| = e^{-x^2} k, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$2 - y = e^{-x^2} k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y = 2 - e^{-x^2} k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Vyjádríme  $y$ .

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$-\ln |2 - y| = x^2 + c$$

$$\ln |2 - y| = -x^2 + c$$

$$e^{\ln |2-y|} = e^{-x^2+c}$$

$$|2 - y| = e^{-x^2}k, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$2 - y = e^{-x^2}k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y = 2 - e^{-x^2}k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y = 2 - e^{-x^2}k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Konstantní řešení  $y = 2$  můžeme do tohoto řešení zahrnout - pro  $k = 0$ .  
Dostáváme tak obecné řešení v explicitním tvaru.



Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

Hledáme partikulární řešení.

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k$$

Do obecného řešení dosadíme počáteční podmínku.

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

Upravíme.

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$- e^{-1}k = 1$$

Vyjádríme  $k$ .

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$- e^{-1}k = 1$$

$$\frac{1}{e}k = -1$$

Vyjádríme  $k$ .

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$-e^{-1}k = 1$$

$$\frac{1}{e}k = -1$$

$$k = -e$$

Vyjádríme  $k$ .

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$-e^{-1}k = 1$$

$$\frac{1}{e}k = -1$$

$$k = -e$$

$$y(x) = 2 + e^{-x^2}e$$

Dosadíme  $k$  do předpisu řešení.

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x(2 - y)$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$- e^{-1}k = 1$$

$$\frac{1}{e}k = -1$$

$$k = -e$$

$$y(x) = 2 + e^{-x^2}e$$

$$y(x) = 2 + e^{-x^2+1}$$

Upravíme.



KONEC