

Lenka Příbylová

KAM PřF MU Brno

Dvojné integrály

Obsah

1	Integrace na obdélníku	2
2	Integrace na elementární množině	11
3	Transformace do polárních souřadnic	18

1. Integrace na obdélníku

Dvojný integrál na obdélníkové oblasti $\Omega = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$$

představuje objem tělesa pod plochou $f(x, y)$ na oblasti Ω .

Podle Fubiniovy věty je roven integrálu

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

respektive integrálu

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Je-li funkce $f(x, y)$ součinem funkce proměnné x a funkce proměnné y , pak platí

$$\iint_{\Omega} g(x)h(y) \, dx dy = \int_a^b g(x) \, dx \int_c^d h(y) \, dy.$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} x^2 y \, dx dy$, kde $\Omega = [0, 1] \times [1, 3]$.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int \left(\int x^2 y \, dy \right) dx$$

2. Najdeme primitivní funkci k $x^2 y$ vzhledem k proměnné

$$= \int_0^1 \left[\int_1^3 x^2 y \, dy \right] dx$$

3. Dosadíme meze

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_1^3 dx$$

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné

$$= \left[\frac{x^3 y^2}{6} \right]_0^1$$

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \frac{1}{6} (9 - 1) = \frac{4}{3}$$

Quiz Stejný integrál $\iint_{\Omega} x^2 y \, dx dy$, kde $\Omega = [0, 1] \times [1, 3]$ řešme pomocí opačné dvojnásobné integrace.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int \left(\int x^2 y \, dx \right) dy$$

2. Najdeme primitivní funkci k $x^2 y$ vzhledem k proměnné

$$= \int_1^3 \left[\quad \right]_0^1 dy$$

3. Dosadíme meze

$$= \int_1^3 \quad dy$$

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné

$$= \left[\quad \right]_1^3$$

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \quad .$$

Quiz Tentýž integrál $\iint_{\Omega} x^2 y \, dx dy$, kde $\Omega = [0, 1] \times [1, 3]$ řešme pomocí rozkladu na součin dvou jednoduchých integrálů.

1. Přepíšeme na součin dvou integrálů

$$= \int x^2 \, dx \int y \, dy$$

2. Najdeme primitivní funkce

$$= \left[\quad \right]_0^1 \left[\quad \right]_1^3$$

3. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \quad .$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} \frac{y}{x} dx dy$, kde $\Omega = [1, e] \times [2, 4]$.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int \left(\int \frac{y}{x} dy \right) dx$$

2. Najdeme primitivní funkci k $\frac{y}{x}$ vzhledem k proměnné

$$= \int_1^e \left[\int_2^4 \frac{y}{x} dy \right] dx$$

3. Dosadíme meze

$$= \int_1^e \left[\frac{y^2}{2x} \right]_2^4 dx$$

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné

$$= \left[\frac{x^2}{2} \left(\frac{4^2}{2x} - \frac{2^2}{2x} \right) \right]_1^e$$

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \frac{e^2}{2} \left(\frac{4^2}{2e} - \frac{2^2}{2e} \right) - \frac{1^2}{2} \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right)$$

Quiz Stejný integrál $\iint_{\Omega} \frac{y}{x} dx dy$, kde $\Omega = [1, e] \times [2, 4]$ řešme pomocí opačné dvojnásobné integrace.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int \left(\int \frac{y}{x} dx \right) dy$$

2. Najdeme primitivní funkci k $\frac{y}{x}$ vzhledem k proměnné

$$= \int_2^4 \left[\int_1^e \frac{y}{x} dx \right] dy$$

3. Dosadíme meze

$$= \int_2^4 \left[y \ln x \right]_1^e dy$$

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné

$$= \left[\frac{y^2}{2} \ln x \right]_2^4$$

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \frac{1}{2} (16 \ln e - 4 \ln e) - \frac{1}{2} (4 \ln 1 - 1 \ln 1) = 6 \ln e - 2 \ln e = 4 \ln e = 4$$

Quiz Tentýž integrál $\iint_{\Omega} \frac{y}{x} dx dy$, kde $\Omega = [1, e] \times [2, 4]$ řešme pomocí rozkladu na součin dvou jednoduchých integrálů.

1. Přepíšeme na součin dvou integrálů

$$= \int \frac{1}{x} dx \int y dy$$

2. Najdeme primitivní funkce

$$= \left[\quad \right]_1^e \left[\quad \right]_2^4$$

3. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \quad .$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} \ln(xy) \, dx dy$, kde $\Omega = [1, e] \times [1, e]$.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int \left(\int \ln(xy) \, dy \right) dx$$

2. Najdeme primitivní funkci k $\ln(xy)$ vzhledem k proměnné integrací per partes, kde $u =$, $v' =$

Dostáváme tedy

$$\int \ln(xy) dx = \underbrace{\int u}_{+c} \underbrace{v}_{-} - \int \underbrace{u'}_{-} \underbrace{v}_{+} dx$$

3. Dosadíme meze

$$\iint_{\Omega} \ln(xy) \, dx dy = \int_1^e \left[\int_1^e \ln(xy) \, dx \right] dy = \int_1^e dx$$

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné

$$= \left[\int_1^e \ln(xy) \, dx \right]_1^e$$

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$=$$

Quiz Tentýž integrál $\iint_{\Omega} \ln(xy) \, dx dy$, kde $\Omega = [1, e] \times [1, e]$ řešme pomocí rozkladu na součin dvou jednoduchých integrálů.

1. Nejprve upravíme integrovanou funkci pomocí vzorce na součet

$$\iint_{\Omega} \ln(xy) \, dx dy = \iint_{\Omega} \ln(x) \, dx dy + \iint_{\Omega} \ln(y) \, dx dy$$

2. Oba integrály přepíšeme na součin jednoduchých integrálů

$$= \int_1^e dx \int_1^e \ln(x) \, dy + \int_1^e dx \int_1^e \ln(y) \, dy$$

3. Najdeme primitivní funkci k $\ln(x)$ integrací per partes, kde

$$u = x, \quad v' = \ln(x)$$

Dostáváme tedy

$$\int \ln(x) dx = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\ln(x)}_{v'} - \int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\ln(x)}_{v} dx$$

$$= x \ln(x) - x + c$$

4. Dosadíme meze

$$\iint_{\Omega} \ln(xy) \, dx dy = \left[x \ln(x) - x \right]_1^e \left[\ln(y) \right]_1^e + \left[x \ln(x) - x \right]_1^e \left[\ln(y) \right]_1^e$$

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= 2(e-1)$$

2. Integrace na elementární množině

Elementární množinou se rozumí uzavřená a omezená množina typu

$$\Omega_x = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x) \right\} \text{ resp.}$$

$$\Omega_y = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, \quad f(y) \leq x \leq g(y) \right\},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a funkce $f(x) < g(x)$ na celém intervalu $[a, b]$. Na množině typu Ω_x je pořadí integrace nejprve podle y a pak podle x , na množině Ω_y je pořadí opačné.

Quiz Jsou množiny určené následujícími nerovnostmi, resp. omezené následujícími křivkami elementární? V případě, že ano, jaké bude pořadí integrace?

1. $1 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq x^2$

(a) Ano, nejprve podle x , pak podle y

(c) Ano, nezáleží na pořadí

(b) Ano, nejprve podle y , pak podle x

(d) Ne

2. $0 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq x^2$

(a) Ano, nejprve podle x , pak podle y

(c) Ano, nezáleží na pořadí

(b) Ano, nejprve podle y , pak podle x

(d) Ne

3. $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$

(a) Ano, nejprve podle x , pak podle y

(c) Ano, nezáleží na pořadí

(b) Ano, nejprve podle y , pak podle x

(d) Ne

4. $\sin(y) \leq x \leq \cos(y), \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

(a) Ano, nejprve podle x , pak podle y

(c) Ano, nezáleží na pořadí

(b) Ano, nejprve podle y , pak podle x

(d) Ne

5. $\sin(y) \leq x \leq \cos(y), \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

- (a) Ano, nejprve podle x , pak podle y
(c) Ano, nezáleží na pořadí

- (b) Ano, nejprve podle y , pak podle x
(d) Ne

6. $0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq \frac{1}{x}$

- (a) Ano, nejprve podle x , pak podle y
(c) Ano, nezáleží na pořadí

- (b) Ano, nejprve podle y , pak podle x
(d) Ne

7. $x = 5, \quad y = 2x, \quad y = x$

- (a) Ano, nejprve podle x , pak podle y
(c) Ano, nezáleží na pořadí

- (b) Ano, nejprve podle y , pak podle x
(d) Ne

8. $x - 2y = 1, \quad x - 2y = 3, \quad y = 1, \quad y = 2$

- (a) Ano, nejprve podle x , pak podle y
(c) Ano, nezáleží na pořadí

- (b) Ano, nejprve podle y , pak podle x
(d) Ne

9. $x + y^2 = 1, \quad x = y^2$

- (a) Ano, nejprve podle x , pak podle y
(c) Ano, nezáleží na pořadí

- (b) Ano, nejprve podle y , pak podle x
(d) Ne

10. $y = 1 - x^2, \quad x = y^2$

- (a) Ano, nejprve podle x , pak podle y
(c) Ano, nezáleží na pořadí

- (b) Ano, nejprve podle y , pak podle x
(d) Ne

11. $y = e^x, \quad y = x + 1, \quad x = e$

- (a) Ano, nejprve podle x , pak podle y
(c) Ano, nezáleží na pořadí

- (b) Ano, nejprve podle y , pak podle x
(d) Ne

Podle Fubiniovy věty platí:

Dvojný integrál na elementární množině

$$\Omega_x = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x) \right\}$$

$$\iint_{\Omega_x} \Phi(x, y) \, dx dy$$

je roven integrálu

$$\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \Phi(x, y) \, dy \right) dx.$$

Dvojný integrál na elementární množině

$$\Omega_y = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, \quad f(y) \leq x \leq g(y) \right\}$$

$$\iint_{\Omega_y} \Phi(x, y) \, dx dy$$

je roven integrálu

$$\int_a^b \left(\int_{f(y)}^{g(y)} \Phi(x, y) \, dx \right) dy.$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} x^2 y \, dx dy$,

kde Ω je určena nerovnostmi $1 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq x^2$.

1. Množina Ω je typu Ω .

2. Přepíšeme na dvojnásobný integrál se správným pořadím integrace

$$= \int \left(\int x^2 y \, dy \right) dx$$

3. Najdeme primitivní funkci k $x^2 y$ vzhledem k proměnné

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=x^2} dx$$

4. Dosadíme meze

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^2 (x^2)^2}{2} - \frac{x^2 x^2}{2} \right) dx$$

5. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné

$$= \left[\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} \right]_1^2$$

6. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{20}$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} \cos(x+y) \, dx dy$,

kde Ω je určena nerovnostmi $0 \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq \pi$.

1. Množina Ω je typu Ω .

2. Přepíšeme na dvojnásobný integrál se správným pořadím integrace

$$= \int \left(\int \cos(x+y) \, dx \right) dy$$

3. Najdeme primitivní funkci ke $\cos(x+y)$ vzhledem k proměnné

$$= \int_0^{\pi} \left[\sin(x+y) \right] dy$$

4. Dosadíme meze

$$= \int_0^{\pi} \left[\sin(x+y) \right] dy$$

5. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné

$$= \left[-\cos(x+y) \right]_0^{\pi}$$

6. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \dots$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} \frac{x+y}{y} dx dy,$

kde Ω je omezená přímkami $y = 3x, \quad y = 1, \quad x + y = 2.$

1. Množina Ω je typu Ω .

2. Přepíšeme na dvojnásobný integrál se správným pořadím integrace

$$= \int \left(\int \frac{x+y}{y} d \right) d$$

3. Najdeme primitivní funkci ke $\frac{x+y}{y}$ vzhledem k proměnné

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \left[\quad \right] dy$$

4. Dosadíme meze

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \quad dy$$

5. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné

$$= \left[\quad \right]_1^{\frac{3}{2}}$$

6. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \quad .$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} xy \, dx dy$,

kde Ω je omezená křivkami $y = x$, $x = 2 - y^2$.

1. Množina Ω je typu Ω .

2. Přepíšeme na dvojnásobný integrál se správným pořadím integrace

$$= \int \left(\int xy \, dx \right) dy$$

3. Najdeme primitivní funkci ke xy vzhledem k proměnné

$$= \int_{-2}^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right] dx \, dy$$

4. Dosadíme meze

$$= \int_{-2}^1 \left(\frac{1}{2} (2 - y^2)^2 y - \frac{1}{2} (-2)^2 y \right) dy$$

5. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné

$$= \left[\frac{1}{2} (2 - y^2)^3 - \frac{1}{2} (-2)^3 y \right]_{-2}^1$$

6. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \frac{1}{2} (2 - 1)^3 - \frac{1}{2} (-2)^3 (1) - \left(\frac{1}{2} (2 - 4)^3 - \frac{1}{2} (-2)^3 (-2) \right)$$

3. Transformace do polárních souřadnic

V některých případech je pro výpočet dvojného integrálu vhodné provést transformaci proměnných. Jde v podstatě o substituční metodu integrace. Zavedeme-li nové proměnné regulární transformací

$$\Phi : x = g(u, v), \quad y = h(u, v),$$

pak platí

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Phi(\Omega)} f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du dv,$$

$$\text{kde } J(u, v) = \begin{vmatrix} g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \\ h'_u(u, v) & h'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

je Jakobián zobrazení Φ a množina Ω je zobrazena na množinu $\Phi(\Omega)$.

Nejčastěji užívanou transformací je transformace do polárních souřadnic. Jde o případy, kdy je množina Ω kruh, mezikružší nebo kruhová výseč apod.

Polární souřadnice zavedeme pomocí zobrazení

$$\Phi : x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi,$$

které je regulární a jeho Jakobián je

$$J(r, \phi) = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r.$$

V následujících příkladech je poloměr v polárních souřadnicích značen r a úhel ϕ se zapisuje jako ϕ .

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} \frac{x}{y} dx dy$,

kde Ω je určena nerovnostmi $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq x$, $x \geq 0$.

1. Zavedeme polární souřadnice a přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int \left(\int dr \right) d\phi$$

2. Rozepíšeme na dva jednoduché integrály

$$= \int d\phi \int dr$$

3. Najdeme primitivní funkce

$$= \left[\int_{\pi/4}^{\pi/2} \right]_1^2$$

4. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \dots$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} x^2y + y^3 \, dx dy,$

kde Ω je určena nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0, \quad x \geq 0.$

1. Zavedeme polární souřadnice a přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int \left(\int dr \right) d\phi$$

2. Rozepíšeme na dva jednoduché integrály

$$= \int d\phi \int dr$$

3. Najdeme primitivní funkce

$$= \left[\right]_0^{\pi/2} \left[\right]_0^1$$

4. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= .$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy,$

kde Ω je určena nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + (y - 1)^2 \leq 1.$

1. Zavedeme polární souřadnice a přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int \left(\int d \right) d$$

2. Najdeme primitivní funkci vzhledem k

$$= \int \left[\right] d$$

3. Dosadíme meze

$$= \int d$$

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k

s použitím substituce $t =$:

$$= \left[\right]$$

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= .$$

Připomínky a komentáře zašlete prosím na emailovou adresu pribylova@math.muni.cz.