

Integrace iracionálních funkcí

Lenka Příbylová

28. července 2006

Obsah

$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$	3
$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$	18

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$$

Funkce obsahuje odmocninu z lineárního členu,

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx =$$

$$\sqrt{2x+1} = t$$

proto zavedeme substituci $t = \sqrt{2x+1}$.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx =$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1} &= t \\ 2x+1 &= t^2\end{aligned}$$

Umocníme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx =$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1} &= t \\ 2x+1 &= t^2 \\ x &= \frac{t^2-1}{2}\end{aligned}$$

Vyjádříme inverzní substituci.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx =$$

$$\sqrt{2x+1} = t$$

$$2x+1 = t^2$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$dx = t dt$$

Diferencujeme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t dt$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt$$

Upravíme složený zlomek na jednoduchý.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt$$
$$= 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt =$$

Jde o neryze lomenou racionální funkci, proto buď podělíme, nebo upravíme na polynom + ryze lomená funkce. V tomto případě je jednodušší doplnit v čitateli jmenovatel, tj. $-1 + 1$,

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt$$
$$= 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = 2 \int 1 dt + 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt$$

a rozdělit na 2 zlomky.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt$$
$$= 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = 2 \int 1 dt + 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt$$

a rozdělit na 2 zlomky.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt$$
$$= 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = 2 \int 1 dt + 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt$$
$$= 2t - \frac{2}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c$$

Integrujeme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \end{array} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt$$
$$= 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = 2 \int 1 dt + 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt$$
$$= 2t - \frac{2}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c$$
$$= 2\sqrt{2x+1} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt{2x+1}} \right| + c$$

Upravíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$$

Funkce obsahuje druhou a čtvrtou odmocninu z x , proto hledáme jejich nejmenší společný násobek, číslo 4.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx =$$

$$\sqrt[4]{x} = t$$

Zavedeme substituci $t = \sqrt[4]{x}$.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx =$$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x} &= t \\ x &= t^4\end{aligned}$$

Umocníme, čímž vyjádříme inverzní substituci.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx =$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x} &= t \\ x &= t^4 \\ dx &= 4t^3 dt \end{aligned}$$

Diferencujeme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}}$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} + \sqrt[4]{t^4}}$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} + \sqrt[4]{t^4}} 4t^3 dt$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} + \sqrt[4]{t^4}} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^3}{t^2 + t} dt$$

Upravíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} + \sqrt[4]{t^4}} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^3}{t^2 + t} dt$$
$$= 4 \int \frac{t^2}{t+1} dt$$

Dostáváme neryze lomenou racionální funkci. Před podělením si můžeme všimnout, že lze krátit t (ve jmenovateli t můžeme vytknout).

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \boxed{\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} + \sqrt[4]{t^4}} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^3}{t^2 + t} dt$$
$$= 4 \int \frac{t^2}{t+1} dt = 4 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt$$

Dělíme:

$$\begin{array}{r} t^2 : (t+1) = t - 1 + \frac{1}{t+1} \\ \underline{-(t^2 + t)} \\ -t \\ \underline{-(-t - 1)} \\ 1 \end{array}$$

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \boxed{\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} + \sqrt[4]{t^4}} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^3}{t^2 + t} dt$$
$$= 4 \int \frac{t^2}{t+1} dt = 4 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 4 \int t dt - 4 \int dt + 4 \int \frac{1}{t+1} dt$$

Sčítance integrujeme každý zvlášť.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx &= \boxed{\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} + \sqrt[4]{t^4}} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^3}{t^2 + t} dt \\ &= 4 \int \frac{t^2}{t+1} dt = 4 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 4 \int t dt - 4 \int dt + 4 \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= 4 \frac{t^2}{2} - 4t + 4 \ln |t+1| + c \end{aligned}$$

Integrujeme podle vzorců.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx &= \boxed{\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} + \sqrt[4]{t^4}} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^3}{t^2 + t} dt \\ &= 4 \int \frac{t^2}{t+1} dt = 4 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 4 \int t dt - 4 \int dt + 4 \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= 4 \frac{t^2}{2} - 4t + 4 \ln |t+1| + c = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + \ln(\sqrt[4]{x} + 1)^4 + c \end{aligned}$$

Dosadíme původní proměnnou.

KONEC