

Limity

Robert Mařík a Lenka Příbylová

19. září 2006

Obsah

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$	3
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$	7
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$	18
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$	22
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$	33
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$	42
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$	55
$\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1))$	66

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1 + 1}$$

- Dosadíme $x = 1$.
- Jedná se o definovaný výraz. Funkce je spojitá v bodě $x = 1$ a funkční hodnota je rovna hodnotě limity.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1 + 1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ resp. } \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1 + 1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Zjednodušíme.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1}$$

Dosadíme ...

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

... a upravíme.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$$

- Funkce je typu $\frac{\text{nenulový výraz}}{\text{nula}}$.
- Musíme proto studovat nejprve jednostranné limity. Začneme s limitou zprava.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

Dosadili jsme $x = -1$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\|$$

- Musíme určit znaménko jmenovatele.
- Je-li x napravo od -1 , pak $x > -1$ a platí $x + 1 > 0$.
- Jmenovatel je kladný.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

Limita zprava je $-\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} \right\|$$

- Je-li x nalevo od čísla -1 , pak $x < -1$.
- Proto $x + 1 < 0$ a jmenovatel je záporný.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} \right\| = +\infty$$

Limita je $+\infty$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} \right\| = +\infty$$

Oboustranná limita $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$ neexistuje.

Obě jednostranné limity jsou různé a oboustranná limita tedy neexistuje.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = -\frac{\pi}{2}$$

- Určíme limitu čitatele a jmenovatele samostatně.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$ může být určena z grafu funkce $y = \operatorname{arctg} x$.
- Funkce $y = \operatorname{arctg} x$ má vodorovnou asymptotu $y = -\frac{\pi}{2}$ v $-\infty$. Hodnota limity čitatele je $-\frac{\pi}{2}$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty}$$

Limita jmenovatele je $-\infty + 1 = -\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 0$$

Konečná hodnota dělená nekonečnem je rovna nule.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$$

Začneme s limitou v $+\infty$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty}$$

- Určíme zvlášť limity funkcí v součinu.
- Dosadíme. Výrazem $e^{-\infty}$ máme na mysli limitu $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty$$

- Dosadíme do druhé funkce.
- Výrazem $\operatorname{arctg} \infty$ máme na mysli limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2}$$

Zkoumáním grafů funkcí $y = e^x$ a $y = \operatorname{arctg} x$ zjistíme, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

Součin je nula.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x =$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty}$$

- Opět určíme limity funkcí v součinu.
- Dosadíme. Protože platí $-(-\infty) = \infty$, dostáváme z prvního součinitele výraz e^{∞} . Tím máme na mysli limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty)$$

Dosadíme do druhé funkce. Výrazem $\operatorname{arctg}(-\infty)$ rozumíme limitu $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty) = \infty \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Z grafů funkcí $y = e^x$ a $y = \operatorname{arctg} x$ plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty) = \infty \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$$

Součin je roven $-\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4$$

- Začneme s limitou v $+\infty$. Dosadíme.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4$$

$$\infty^3 = \infty, \quad \infty^2 = \infty$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\infty + \infty - 4 = \infty$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4$$

Dosadíme.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) &= (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4 \\ &= \|\ -\infty + \infty\| - 4 \end{aligned}$$

$$(-\infty) \times (-\infty) \times (-\infty) = -\infty \quad 2(-\infty)(-\infty) = \infty$$

Pozor! Máme neurčitý výraz $\|\ -\infty + \infty\|$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) &= (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4 \\ &= \|\ -\infty + \infty \|\ - 4 \\ &= -\infty\end{aligned}$$

- Z teorie víme, jak tento problém vyřešit.
- Lze ukázat, že na výsledek má vliv jenom vedoucí koeficient. Ostatní koeficienty tedy vynecháme.
- Limita vedoucího členu je $-\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) &= (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4 \\ &= \|\ -\infty + \infty \|\ - 4 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$$

Začneme s limitou v $+\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

- Limita čitatele i jmenovatele je $+\infty$.
- Dostáváme neurčitý výraz.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} &= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} \end{aligned}$$

- Z teorie víme, že limita se dá určit snadno – jenom z vedoucích členů čitatele a jmenovatele.
- Vynecháme tedy všechno ostatní.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} &= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Upravíme

$$\frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2}.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} &= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} \end{aligned}$$

Dosadíme $x = \infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} &= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty \end{aligned}$$

Použijeme známá pravidla pro počítání s nekonečnem.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

- Pokračujeme s limitou v $-\infty$.
- Dosazením $x = -\infty$ dostáváme opět neurčitý výraz.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2}$$

Opět uvažujeme pouze vedoucí členy.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2}$$

Upravíme.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2}$$

Dosadíme.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

Použijeme známá pravidla pro počítání s nekonečnem.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$$

Začneme s limitou v $+\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Dosadíme $x = \infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4}$$

- Neurčitý výraz.
- Použijeme jenom vedoucí členy.
- Všechno ostatní lze zanedbat.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3}$$

Upravíme

$$\frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Limita konstantní funkce je ta konstanta.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$. Dosadíme $x = -\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{3x^4}$$

- Máme neurčitý výraz.
- Použijeme jenom vedoucí členy.
- Všechno ostatní zanedbáme.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}$$

Upravíme

$$\frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Limita konstantní funkce je ta konstanta.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \|\infty - \infty\|$$

Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, dostáváme neurčitý výraz $\|\infty - \infty\|$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] &= \|\infty - \infty\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)] \end{aligned}$$

- Limity z neurčitých výrazů ve tvaru zlomku jsou obvykle jednodušší. Napíšeme funkci jako zlomek. .
- Nejdříve oba členy napíšeme v logaritmickém tvaru.
- Použijeme pravidlo $r \ln a = \ln a^r$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \|\infty - \infty\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

Odečteme logaritmy podle pravidla

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \|\infty - \infty\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right)$$

- Určíme limitu složené funkce.
- Nejprve prozkoumáme limitu vnitřní složky.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] &= \|\infty - \infty\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right) = \ln \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \end{aligned}$$

Uvnitř máme neurčitý výraz.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] &= \|\infty - \infty\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right) = \ln \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \right) \end{aligned}$$

Uvažujeme jenom vedoucí členy.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] &= \|\infty - \infty\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right) = \ln \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \right) = \ln 1\end{aligned}$$

Provedeme krácení ve výrazu $\frac{x^2}{x^2}$ a použijeme zřejmý vztah

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] &= \|\infty - \infty\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right) = \ln \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \right) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$