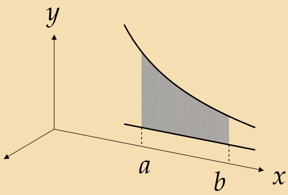
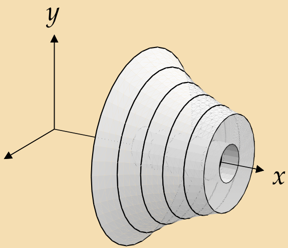
Objem dutého rotačního tělesa

Lenka Přibylová

31. července 2006

Objem rotačního tělesa vzniklého rotací plochy omezené spojitými funkcemi $y = d(x)$ a $y = h(x)$, které na intervalu $\langle a, b\rangle$ splňují $d(x) \le h(x)$, a přímkami $x = a$ a $x = b$:



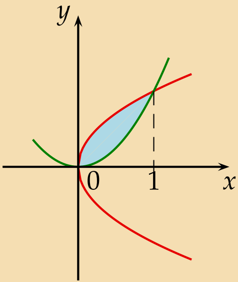


$$y = h(x),\ y = d(x)$$

$$V = \pi \int_a^b \left(h^2(x) - d^2(x)\right) \mathrm{d}x$$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného křivkami $y^2 = x$ a $y = x^2$ kolem osy x.

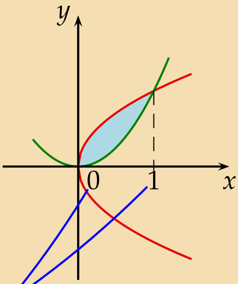
$y^2 = x$, $y = x^2$, $V = ?$



Nakreslíme grafy obou funkcí. Jejich průsečíky buď vidíme na grafu nebo je dopočítáme:

$$\sqrt{x} = x^2$$
$$x = x^4$$
$$0 = x^4 - x$$
$$0 = x(x^3 - 1)$$
$$x = 0 \ \vee \ x = 1$$

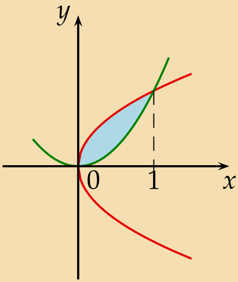
$y^2 = x$, $y = x^2$, $V = ?$



$$V = \pi \int_0^1$$

Vyjádříme objem rotačního tělesa jako $\pi \times$ určitý integrál.

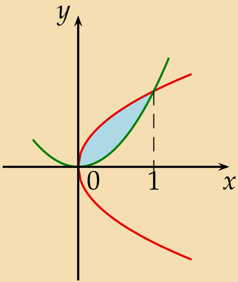
$y^2 = x$, $y = x^2$, $V = ?$



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2$$

Na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je horní funkcí $h(x) = \sqrt{x}$

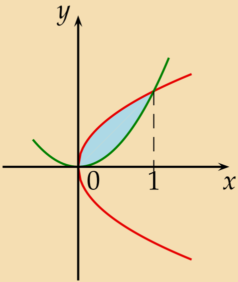
$y^2 = x$, $y = x^2$, $V = ?$



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \,\mathrm{d}x$$

a dolní $d(x) = x^2$.

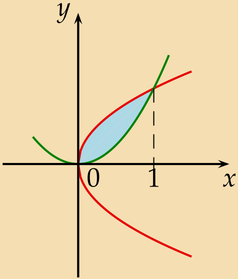
$y^2 = x$, $y = x^2$, $V = ?$



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x - x^4 \, \mathrm{d}x$$

Upravíme.

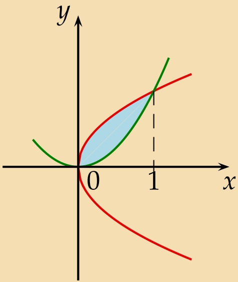
$y^2 = x$, $y = x^2$, $V = ?$



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x - x^4 \,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

Najdeme primitivní funkci.

$y^2 = x$, $y = x^2$, $V = ?$

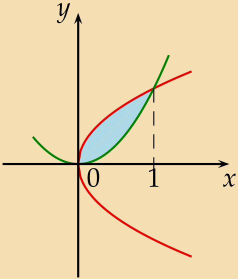


$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x - x^4 \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right)$$

Vypočítáme určitý integrál pomocí Newton-Leibnitzovy formule. Dosadíme tedy meze.

$y^2 = x$, $y = x^2$, $V = ?$



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x - x^4 \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi$$

Dopočítáme.

Konec