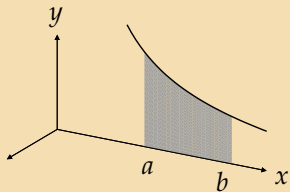


Povrch pláště rotačního tělesa

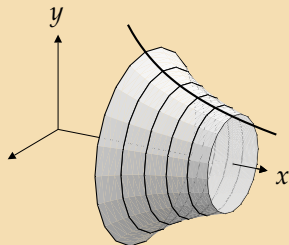
Lenka Příbylová

6. února 2007

Povrch pláště rotačního tělesa vzniklého rotací plochy omezené spojitou nezápornou funkcí $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$:



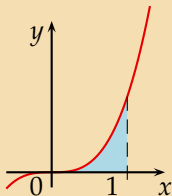
$$y = f(x)$$



$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

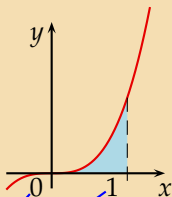
Vypočtete povrch pláště tělesa, které vznikne rotací křivky $y = x^3$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ kolem osy x .

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$



Nakreslíme graf funkce $y = x^3$.

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

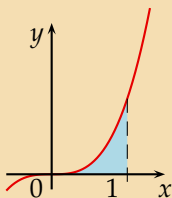


$$P = 2\pi \int_0^1$$

Vyjádříme povrch pláště rotačního tělesa jako určitý integrál

$$2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

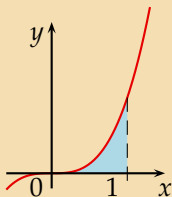


$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx$$

Vyjádříme povrch pláště rotačního tělesa jako určitý integrál

$$2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$



$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx$$

Upravíme.

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx =$$

$$t = \sqrt{1 + 9x^4}$$

Zavedeme vhodnou substituci.

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx =$$

$$t = \sqrt{1 + 9x^4}$$

$$t^2 = 1 + 9x^4$$

Zavedeme vhodnou substituci.

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx =$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 &= 1 + 9x^4 \\ 2t dt &= 36x^3 dx \end{aligned}$$

Vydříme vztah pro diferenciály.

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx =$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 &= 1 + 9x^4 \\ 2t dt &= 36x^3 dx \\ \frac{1}{18} t dt &= x^3 dx \end{aligned}$$

Upravíme pro dosazení.

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx =$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 &= 1 + 9x^4 \\ 2t dt &= 36x^3 dx \\ \frac{1}{18} t dt &= x^3 dx \\ t_1 &= 1, t_2 = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Vyjádříme změnu mezí.

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx =$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 &= 1 + 9x^4 \\ 2t dt &= 36x^3 dx \\ \frac{1}{18} t dt &= x^3 dx \\ t_1 &= 1, t_2 = \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{10}} t \frac{1}{18} t dt$$

Substituujeme.

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx =$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 &= 1 + 9x^4 \\ 2t dt &= 36x^3 dx \\ \frac{1}{18} t dt &= x^3 dx \\ t_1 &= 1, t_2 = \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{10}} t \frac{1}{18} t dt = \frac{\pi}{9} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{10}}$$

Najdeme primitivní funkci.

$$y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle, P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx =$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 &= 1 + 9x^4 \\ 2t dt &= 36x^3 dx \\ \frac{1}{18} t dt &= x^3 dx \\ t_1 &= 1, t_2 = \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{10}} t \frac{1}{18} t dt = \frac{\pi}{9} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

Dosadíme meze.

KONEC