Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými

Lenka Baráková

2. listopadu 2005

Obsah

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y' = x(2-y)$$

Rovnice je separovatelná. $f(x) = x$, $g(y) = y - 2$.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y' = x(2-y) \qquad y \neq 2$$

Před samotnou separací proměnných (tj. podělením funkcí $g(y) = y - 2$) najdeme konstantní řešení. To splňuje podmínku $g(y) = y - 2 = 0$. Konstantním řešením je tedy funkce $y(x) = 2$.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y' = x(2-y) \qquad y \neq 2$$

$$\frac{y'}{2-y} = x$$

Separujeme proměnné pro $y \neq 2$.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y' = x(2-y) \qquad y \neq 2$$

$$\frac{y'}{2-y} = x$$

$$\int \frac{y'}{2-y}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x$$

Integrujeme.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y' = x(2-y) \qquad y \neq 2$$

$$\frac{y'}{2-y} = x$$

$$\int \frac{y'}{2-y}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{2-y}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x$$

Můžeme použít ″substituci″ $\boxed{\begin{array}{c} y = y(x) \\ \mathrm{d}y = y(x)'\,\mathrm{d}x \end{array}}$ a přejít nalevo k proměnné y.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y' = x(2-y) \qquad y \neq 2$$

$$\frac{y'}{2-y} = x$$

$$\int \frac{y'}{2-y}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{2-y}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x$$

$$-\ln|2-y| = x^2 + c$$

Obě strany integrujeme a dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice v implicitním tvaru.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2 - y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$-\ln|2 - y| = x^2 + c$$

Budeme se snažit vyjádřit y.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$-\ln|2-y| = x^2 + c$$

$$\ln|2-y| = -x^2 + c$$

Osamostatňujeme y na levé straně, tj. násobíme -1.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$\begin{aligned} -\ln|2-y| &= x^2 + c \\ \ln|2-y| &= -x^2 + c \\ e^{\ln|2-y|} &= e^{-x^2+c} \end{aligned}$$

Odlogaritmujeme, tj. použijeme inverzní funkci k přirozenému logaritmu, kterou je exponenciála.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$-\ln|2-y| = x^2 + c$$
$$\ln|2-y| = -x^2 + c$$
$$e^{\ln|2-y|} = e^{-x^2+c}$$
$$|2-y| = e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

$$e^{\ln\heartsuit} = \heartsuit$$

Navíc platí $e^{-x^2+c} = e^{-x^2} \cdot e^c = e^{-x^2}k$, přičemž k je nutně kladné.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$
\begin{aligned}
-\ln|2-y| &= x^2 + c \\
\ln|2-y| &= -x^2 + c \\
e^{\ln|2-y|} &= e^{-x^2+c} \\
|2-y| &= e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R}^+ \\
2-y &= e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R} - \{0\}
\end{aligned}
$$

Absolutní hodnota je vždy kladná, zrušíme-li ji, dostaneme i záporná čísla. Můžeme to zapsat pomocí konstanty k, kterou povolíme kladnou i zápornou - mimo nuly.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$
\begin{aligned}
-\ln|2-y| &= x^2 + c \\
\ln|2-y| &= -x^2 + c \\
e^{\ln|2-y|} &= e^{-x^2+c} \\
|2-y| &= e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R}^+ \\
2-y &= e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R} - \{0\} \\
y &= 2 - e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R} - \{0\}
\end{aligned}
$$

Vyjádříme y.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$
\begin{aligned}
-\ln|2-y| &= x^2 + c \\
\ln|2-y| &= -x^2 + c \\
e^{\ln|2-y|} &= e^{-x^2+c} \\
|2-y| &= e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R}^+ \\
2-y &= e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R} - \{0\} \\
y &= 2 - e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R} - \{0\} \\
y &= 2 - e^{-x^2}k, \qquad k \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Konstantní řešení $y = 2$ můžeme do tohoto řešení zahrnout - pro $k = 0$. Dostáváme tak obecné řešení v explicitním tvaru.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

Hledáme partikulární řešení.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k$$

Do obecného řešení dosadíme počáteční podmínku.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

Upravíme.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$-e^{-1}k = 1$$

Vyjádříme k.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$-e^{-1}k = 1$$

$$\frac{1}{e}k = -1$$

Vyjádříme k.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$-e^{-1}k = 1$$

$$\frac{1}{e}k = -1$$

$$k = -e$$

Vyjádříme k.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$-e^{-1}k = 1$$

$$\frac{1}{e}k = -1$$

$$k = -e$$

$$y(x) = 2 + e^{-x^2}e$$

Dosadíme k do předpisu řešení.

Řešte diferenciální rovnici $y' = x(2-y)$ s počáteční podmínkou $y(-1) = 3$

$$y(x) = 2 - e^{-x^2}k$$

$$y(-1) = 2 - e^{-(-1)^2}k = 2 - e^{-1}k = 3$$

$$-e^{-1}k = 1$$

$$\frac{1}{e}k = -1$$

$$k = -e$$

$$y(x) = 2 + e^{-x^2}e$$

$$y(x) = 2 + e^{-x^2+1}$$

Upravíme.

KONEC