Diferenciální rovnice typu $y' = f(x)$

Lenka Baráková

2. listopadu 2005

©Lenka Baráková, 2005

Obsah

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sin 2x$ 3
Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ 11

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sin 2x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sin 2x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$

$$y' = \sin 2x$$

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sin 2x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$

$$y' = \sin 2x$$
$$y(x) = \int \sin 2x \, \mathrm{d}x$$

Rovnici zintegrujeme.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sin 2x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$

$$y' = \sin 2x$$
$$y(x) = \int \sin 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

Použijeme vzorec $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$ a dostáváme obecné řešení.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sin 2x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$

$$y' = \sin 2x$$

$$y(x) = \int \sin 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

$$y(0) = -\frac{1}{2} \cos(2 \cdot 0) + c$$

Dosazením počáteční podmínky najdeme partikulární řešení.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sin 2x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$

$$y' = \sin 2x$$

$$y(x) = \int \sin 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

$$y(0) = -\frac{1}{2} \cos(2 \cdot 0) + c = -\frac{1}{2} + c = 2$$

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sin 2x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$

$$y' = \sin 2x$$

$$y(x) = \int \sin 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

$$y(0) = -\frac{1}{2}\cos(2\cdot 0) + c = -\frac{1}{2} + c = 2$$

$$c = \frac{5}{2}$$

Najdeme c.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sin 2x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$

$$y' = \sin 2x$$
$$y(x) = \int \sin 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$
$$y(0) = -\frac{1}{2}\cos(2\cdot 0) + c = -\frac{1}{2} + c = 2$$
$$c = \frac{5}{2}$$
$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{5}{2}$$

Nalezené c dosadíme do obecného řešení a dostáváme hledané partikulární řešení.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Diferenciální rovnice má smysl pouze tam, kde je definován $\arcsin x$.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y = \int \arcsin x \, \mathrm{d}x$$

Rovnici zintegrujeme.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y = \int \arcsin x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\[2em] v' = 1 & v = x \end{array}}$$

Integrál řešíme per partes.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y = \int \arcsin x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

$$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y = \int \arcsin x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} t = \sqrt{1-x^2} \\ t^2 = 1 - x^2 \\ 2t \, \mathrm{d}t = -2x \, \mathrm{d}x \\ -t \, \mathrm{d}t = x \, \mathrm{d}t \end{array}}$$

Použijeme substituci $t = \sqrt{1-x^2}$.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y = \int \arcsin x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} t = \sqrt{1-x^2} \\ t^2 = 1 - x^2 \\ 2t \, \mathrm{d}t = -2x \, \mathrm{d}x \\ -t \, \mathrm{d}t = x \, \mathrm{d}t \end{array}}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{-t \, \mathrm{d}t}{t}$$

Dosadíme.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y = \int \arcsin x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} t = \sqrt{1-x^2} \\ t^2 = 1 - x^2 \\ 2t \, \mathrm{d}t = -2x \, \mathrm{d}x \\ -t \, \mathrm{d}t = x \, \mathrm{d}t \end{array}}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{-t \, \mathrm{d}t}{t} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int \frac{t}{t} \, \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + c = \sqrt{1-x^2} + c$$

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

Dostali jsme obecné řešení diferenciální rovnice.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

$$y(1) = 1 \arcsin 1 + \sqrt{1 - 1^2} + c$$

Dosazením počáteční podmínky najdeme partikulární řešení.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

$$y(1) = 1 \arcsin 1 + \sqrt{1 - 1^2} + c = \frac{\pi}{2} + c = 3$$

$\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$, protože $1 = \sin \dfrac{\pi}{2}$.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

$$y(1) = 1 \arcsin 1 + \sqrt{1 - 1^2} + c = \frac{\pi}{2} + c = 3$$

$$c = 3 - \frac{\pi}{2}$$

Najdeme c.

©Lenka Baráková, 2005

Řešte diferenciální rovnici $y' = \arcsin x$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$

$$y' = \arcsin x \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$y(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

$$y(1) = 1 \arcsin 1 + \sqrt{1 - 1^2} + c = \frac{\pi}{2} + c = 3$$

$$c = 3 - \frac{\pi}{2}$$

$$y(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + 3 - \frac{\pi}{2}$$

Nalezené c dosadíme do obecného řešení a dostáváme hledané partikulární řešení.

©Lenka Baráková, 2005

KONEC

©Lenka Baráková, 2005