

Neurčitý integrál

Robert Mařík

27. ledna 2006

Obsah

1	Definice neurčitého integrálu	5
2	Základní vzorce	7
	$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx$	8
	$\int \operatorname{tg} x dx$	12

$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$	17
$\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$	21
$\int \frac{1}{(x+6)^3} dx$	25
$\int f(ax+b) dx$	29
$\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$	46

3 Parciální zlomky. 57

Rozklad s neurčitými koeficienty	59
----------------------------------	----

$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx$	65
---	----

$\int \frac{x^4-x+1}{x^3+x^2} dx$	79
-----------------------------------	----

$\int \frac{x}{x^3-8} dx$	92
---------------------------	----

4 Integrace per-partés 105

$\int (x + 1) \ln x \, dx$	107
$\int x \sin x \, dx$	114
$\int (x - 2) \sin(2x) \, dx$	120
$\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$	127
$\int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx$	136
$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$	144
$\int \ln x \, dx$	150
$\int \ln^2 x \, dx$	156
$\int x^3 \sin x \, dx$	165
$\int (x^3 + 2x)e^{-x} \, dx$	169

5 Integrate pomocí substituce. 173

$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$	174
--	-----

$\int xe^{1-x^2} dx$	181
$\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$	189
$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$	196
$\int \operatorname{tg}^3 x dx$	203
$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$	215
$\int \frac{\sqrt{3x+2} - 1}{x+1} dx$	226
$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$	239
6 Další	251
$\int \arcsin x dx$	252

1 Definice neurčitého integrálu

Definice (neurčitý integrál, primitivní funkce). Bud' I otevřený interval, f a F funkce definované na I . Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in I, \quad (1)$$

nazývá se funkce F *primitivní funkcí k funkci f* , nebo též *neurčitý integrál funkce f* na intervalu I . Zapisujeme

$$\int f(x) dx = F(x).$$

Existuje-li k funkci f neurčitý integrál na intervalu I , nazývá se funkce f *integrovatelná na I* .

Primitivní funkce $F(x)$ je vždy spojitá na I , plyne to z existence derivace.

Věta 1 (postačující podmínka existence neurčitého integrálu). Ke každé spojitě funkci existuje neurčitý integrál.

1 Definice neurčitého integrálu

Definice (neurčitý integrál, primitivní funkce). Bud' I otevřený interval, f a F funkce definované na I . Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in I, \quad (1)$$

nazývá se funkce F *primitivní funkcí k funkci f* , nebo též *neurčitý integrál funkce f* na intervalu I . Zapisujeme

$$\int f(x) dx = F(x).$$

Existuje-li k funkci f neurčitý integrál na intervalu I , nazývá se funkce f *integrovatelná na I* .

Primitivní funkce $F(x)$ je vždy spojitá na I , plyne to z existence derivace.

Věta 1 (postačující podmínka existence neurčitého integrálu). Ke každé spojitě funkci existuje neurčitý integrál.

1 Definice neurčitého integrálu

Definice (neurčitý integrál, primitivní funkce). Bud' I otevřený interval, f a F funkce definované na I . Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in I, \quad (1)$$

nazývá se funkce F *primitivní funkcí k funkci f* , nebo též *neurčitý integrál funkce f* na intervalu I . Zapisujeme

$$\int f(x) dx = F(x).$$

Existuje-li k funkci f neurčitý integrál na intervalu I , nazývá se funkce f *integrovatelná na I* .

Primitivní funkce $F(x)$ je vždy spojitá na I , plyne to z existence derivace.

Věta 1 (postačující podmínka existence neurčitého integrálu). Ke každé spojitě funkci existuje neurčitý integrál.

Věta 2 (jednoznačnost primitivní funkce). Primitivní funkce je na daném intervalu k dané funkci určena jednoznačně, až na libovolnou aditivní konstantu. Přesněji, platí následující:

- Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta nezávislá na x .
- Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I , liší se obě funkce na intervalu I nejvýše o aditivní konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí.

Věta 2 (jednoznačnost primitivní funkce). Primitivní funkce je na daném intervalu k dané funkci určena jednoznačně, až na libovolnou aditivní konstantu. Přesněji, platí následující:

- Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta nezávislá na x .
- Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I , liší se obě funkce na intervalu I nejvýše o aditivní konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí.

Věta 2 (jednoznačnost primitivní funkce). Primitivní funkce je na daném intervalu k dané funkci určena jednoznačně, až na libovolnou aditivní konstantu. Přesněji, platí následující:

- Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta nezávislá na x .
- Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I , liší se obě funkce na intervalu I nejvýše o aditivní konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí.

2 Základní vzorce

Věta 3. Necht' f , g jsou funkce integrovatelné na I , c necht' je reálné číslo. Pak na intervalu I platí

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$
$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Věta 4. Necht' f je funkce integrovatelná na I .

Pak $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b)$, kde F je funkce primitivní k funkci f na intervalu I . Platí pro ta x , pro která je $ax + b \in I$.

Věta 5. Necht' funkce f má derivaci a nemá nulový bod na intervalu I . Potom na

tomto intervalu platí $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$.

2 Základní vzorce

Věta 3. Necht' f , g jsou funkce integrovatelné na I , c necht' je reálné číslo. Pak na intervalu I platí

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$
$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Věta 4. Necht' f je funkce integrovatelná na I .

Pak $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b)$, kde F je funkce primitivní k funkci f na intervalu I . Platí pro ta x , pro která je $ax + b \in I$.

Věta 5. Necht' funkce f má derivaci a nemá nulový bod na intervalu I . Potom na

tomto intervalu platí $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$.

2 Základní vzorce

Věta 3. Necht' f , g jsou funkce integrovatelné na I , c necht' je reálné číslo. Pak na intervalu I platí

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$
$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Věta 4. Necht' f je funkce integrovatelná na I .

Pak $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b)$, kde F je funkce primitivní k funkci f na intervalu I . Platí pro ta x , pro která je $ax + b \in I$.

Věta 5. Necht' funkce f má derivaci a nemá nulový bod na intervalu I . Potom na

tomto intervalu platí $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx$.

$$I = \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx$$

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx \\ &= 2 \int x dx + 3 \int x^{\frac{1}{4}} dx + 6 \int x^{-3} dx - \int \sin x dx + \int e^x dx \end{aligned}$$

- Integrál ze součtu je součet integrálů.
- Integrál násobku funkce je násobek integrálu.
- Některé funkce je možno přepsat na mocninné funkce.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx \\ &= 2 \int x dx + 3 \int x^{\frac{1}{4}} dx + 6 \int x^{-3} dx - \int \sin x dx + \int e^x dx \\ &= 2 \frac{x^2}{2} + 3 \frac{x^{5/4}}{5/4} + 6 \frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + C \end{aligned}$$

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- $\int \sin x dx = -\cos x$
- $\int e^x dx = e^x$

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx \\ &= 2 \int x dx + 3 \int x^{\frac{1}{4}} dx + 6 \int x^{-3} dx - \int \sin x dx + \int e^x dx \\ &= 2 \frac{x^2}{2} + 3 \frac{x^{5/4}}{5/4} + 6 \frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + C \\ &= x^2 + \frac{12}{5} x^{5/4} - 3 \frac{1}{x^2} + \cos x + e^x + C \end{aligned}$$

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

$$I = \int \operatorname{tg} x \, dx$$

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \end{aligned}$$

Použijeme definici funkce tangens.

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \end{aligned}$$

- Platí $(\cos x)' = -\sin x$. Čitatel se tedy liší od derivace jmenovatele jenom konstantním násobkem.
- Vynásobíme a vydělíme integrál tímto násobkem.

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx \end{aligned}$$

Formálně použijeme vztah $(\cos x)' = -\sin x$, abychom viděli vzorec

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C.$$

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx \\ &= - \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$$

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$.

$$I = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$$

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx \end{aligned}$$

- Platí $(x^2 + 4x + 5)' = 2x + 4$. Čítenel se tedy liší od derivace jmenovatele jenom konstantím násobkem.
- Vynásobíme a vydělíme integrál tímto násobkem.

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} dx \end{aligned}$$

Přepíšeme do tvaru $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4} dx$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2+4} dx \\ &= \int \frac{x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4} dx \end{aligned}$$

- Derivace jmenovatele je x , v čitateli však není násobek této funkce.
- Vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ nelze přímo použít.
- Rozdělíme zlomek na dva.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2+4} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4} dx \end{aligned}$$

- V prvním zlomku je v čitateli polovina derivace jmenovatele.
- Proto první zlomek vynásobíme a vydělíme dvěma.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2+4} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 5 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C$
- $\int \frac{1}{A^2+x^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A}$

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3} dx$.

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3} dx$$

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x+6)^3} dx \\ &= \int (x+6)^{-3} dx \end{aligned}$$

Jedná se o mocninnou funkci.

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x+6)^3} dx \\ &= \int (x+6)^{-3} dx \\ &= \frac{(x+6)^{-2}}{-2} \end{aligned}$$

- $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$, kde F je integrál z f .
- V našem případě je $f(x) = x^{-3}$, $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2}$ a $a = 1$.

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x+6)^3} dx \\ &= \int (x+6)^{-3} dx \\ &= \frac{(x+6)^{-2}}{-2} \\ &= -\frac{1}{2(x+6)^2} + C \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5} dx =$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5} dx =$$

$$\int e^{-x} dx =$$

$$\int e^{3x} dx =$$

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5} dx =$$

$$\int e^{-x} dx =$$

$$\int e^{3x} dx =$$

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$
- $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$, v našem případě $a = 2$.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5} dx = \int (2-1 \cdot x)^{-5} dx$$

$$\int e^{-x} dx =$$

$$\int e^{3x} dx =$$

Přepíšeme na mocninovou funkci.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+5| + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2-x)^5} dx &= \int (2-1 \cdot x)^{-5} dx \\ &= \frac{(2-x)^{-4}}{-4} \cdot \frac{1}{-1} \end{aligned}$$

$$\int e^{-x} dx =$$

$$\int e^{3x} dx =$$

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
- $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$, v našem případě $a = -1$.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+5| + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2-x)^5} dx &= \int (2-1 \cdot x)^{-5} dx \\ &= \frac{(2-x)^{-4}}{-4} \cdot \frac{1}{-1} \\ &= \frac{1}{4(2-x)^4} + C \end{aligned}$$

$$\int e^{-x} dx =$$

$$\int e^{3x} dx =$$

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+5| + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2-x)^5} dx &= \int (2-1 \cdot x)^{-5} dx \\ &= \frac{(2-x)^{-4}}{-4} \cdot \frac{1}{-1} \\ &= \frac{1}{4(2-x)^4} + C \end{aligned}$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

$$\int e^{3x} dx =$$

- $\int e^x dx = e^x$
- $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$, v našem případě $a = -1$.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+5| + C$$

- $\int e^x dx = e^x$
- $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$, v našem případě $a = 3$.

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 dx$$

$$\int \sin x \cos x dx$$

$$\int \sin^2 x dx$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx$$

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx$$

$$\int \sin x \cos x dx$$

$$\int \sin^2 x dx$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx$$

Upravíme podle vzorce $(a + b)^2$:

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$$

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}\int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

$$\int \sin x \cos x dx$$

$$\int \sin^2 x dx$$

Integrujeme podle vzorců

$$\int e^x dx = e^x,$$

$$\int 1 dx = x,$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b), \text{ kde } \int f(x) dx = F(x).$$

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}\int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx$$

$$\int \sin^2 x dx$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx$$

Použijeme vzorec

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}\int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x dx$$

$$\int \frac{x^2}{x} dx$$

Integrujeme podle vzorců

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

a

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b), \text{ kde } \int f(x) dx = F(x).$$

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}\int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx$$

Vzorec

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}\int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right] + C$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}\int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right] + C$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx$$

Potřebujeme vydělit. K tomu je možno převést čítenel na tvar, který později umožní zkrátit.

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}\int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right] + C$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx = \int x - 1 + \frac{1}{x+1} dx$$

$$\frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2 - 1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}\int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right] + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x+1} dx &= \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx = \int x - 1 + \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|, \quad \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} f(ax+b)$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{(2x-4)}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

“Zašifrujeme” derivaci jmenovatele, tj. výraz $(2x-4)$, do čitatele.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

- Musíme upravit zlomek tak, aby se zlomky v prvním a druhém integrálu rovnaly.
- K těmto úpravám použijeme jenom multiplikativní a aditivní konstanty (nenadělají “moc velkou neplechu” při integraci).
- Přidáním násobku $\frac{1}{2}$ máme ve druhém zlomku v čitateli výraz $\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$. Koeficient u x je v pořádku.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

- $\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\frac{1}{2}(2x-4)+2 = x$
- Nyní je v čitateli jenom x . Chybí číslo 5.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

- $\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\frac{1}{2}(2x-4) + 2 = x$
- $\frac{1}{2}(2x-4) + 2 + 5 = x+5$
- První a druhý zlomek jsou stejné, nedopustili jsme se žádné úpravy, která by změnila hodnotu zlomku.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

Rozdělíme zlomek na dva.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5} dx \end{aligned}$$

Doplníme na čtverec ve jmenovateli druhého zlomku.

$$x^2 - 4x + 9 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 4 + 9 = (x-2)^2 + 5$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{A^2+x^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A}, \text{ kde v našem případě } A = \sqrt{5}$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1} \end{aligned}$$

$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$, v našem případě $a = 1$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C \end{aligned}$$

Upravíme.

3 Parciální zlomky.

Motivace. Sečtením zlomků se lze přesvědčit, že platí

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)}$$

Z levé na pravou stranu přejdeme převedením na společného jmenovatele a sečtením zlomků.

Napsat z výrazu na levé straně výraz na straně pravé zatím neumíme, ale bylo by vhodné se to naučit, protože výraz nalevo je snadné integrovat, což se o výrazu napravo říci nedá.

Definice. Necht' $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je racionální funkce. Je-li $n \geq m$, nazývá se funkce $R(x)$ *neryze lomená*, v opačném případě *ryze lomená*.

Věta 6. Každou neryze lomenou funkci lze zapsat jako součet polynomu a ryze lomené funkce (pomocí dělení se zbytkem).

Věta 7. Buď $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ryze lomená funkce. Předpokládejme, že polynomy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ nemají společné kořeny a že polynom $Q_m(x)$ nemá násobné komplexní kořeny. Funkci $R(x)$ lze zapsat jako součet funkcí typu

$$\frac{A_1}{x-c}, \frac{A_2}{(x-c)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-c)^k}, \text{ a } \frac{Bx+C}{x^2+Mx+N}$$

kde A_i , B a C jsou vhodné konstanty (**Jak?** – viz. dále).

Definice. Zlomky uvedené v předchozí větě nazýváme *parciální zlomky*.

Definice. Necht' $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je racionální funkce. Je-li $n \geq m$, nazývá se funkce $R(x)$ *neryze lomená*, v opačném případě *ryze lomená*.

Věta 6. Každou neryze lomenou funkci lze zapsat jako součet polynomu a ryze lomené funkce (pomocí dělení se zbytkem).

Věta 7. Buď $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ryze lomená funkce. Předpokládejme, že polynomy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ nemají společné kořeny a že polynom $Q_m(x)$ nemá násobné komplexní kořeny. Funkci $R(x)$ lze zapsat jako součet funkcí typu

$$\frac{A_1}{x-c}, \frac{A_2}{(x-c)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-c)^k}, \text{ a } \frac{Bx+C}{x^2+Mx+N},$$

kde A_i , B a C jsou vhodné konstanty (**Jak?** – viz. dále).

Definice. Zlomky uvedené v předchozí větě nazýváme *parciální zlomky*.

Definice. Necht' $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je racionální funkce. Je-li $n \geq m$, nazývá se funkce $R(x)$ *neryze lomená*, v opačném případě *ryze lomená*.

Věta 6. Každou neryze lomenou funkci lze zapsat jako součet polynomu a ryze lomené funkce (pomocí dělení se zbytkem).

Věta 7. Buď $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ryze lomená funkce. Předpokládejme, že polynomy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ nemají společné kořeny a že polynom $Q_m(x)$ nemá násobné komplexní kořeny. Funkci $R(x)$ lze zapsat jako součet funkcí typu

$$\boxed{\frac{A_1}{x - c}} \text{ , } \boxed{\frac{A_2}{(x - c)^2}} \text{ , } \dots \text{ , } \boxed{\frac{A_k}{(x - c)^k}} \text{ , } \text{ a } \boxed{\frac{Bx + C}{x^2 + Mx + N}}$$

kde A_i , B a C jsou vhodné konstanty (**Jak?** – viz. dále).

Definice. Zlomky uvedené v předchozí větě nazýváme *parciální zlomky*.

Definice. Necht' $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je racionální funkce. Je-li $n \geq m$, nazývá se funkce $R(x)$ *neryze lomená*, v opačném případě *ryze lomená*.

Věta 6. Každou neryze lomenou funkci lze zapsat jako součet polynomu a ryze lomené funkce (pomocí dělení se zbytkem).

Věta 7. Buď $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ryze lomená funkce. Předpokládejme, že polynomy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ nemají společné kořeny a že polynom $Q_m(x)$ nemá násobné komplexní kořeny. Funkci $R(x)$ lze zapsat jako součet funkcí typu

$$\boxed{\frac{A_1}{x-c}} \text{ , } \boxed{\frac{A_2}{(x-c)^2}} \text{ , } \dots \text{ , } \boxed{\frac{A_k}{(x-c)^k}} \text{ , } \text{ a } \boxed{\frac{Bx+C}{x^2+Mx+N}}$$

kde A_i , B a C jsou vhodné konstanty (**Jak?** – viz. dále).

Definice. Zlomky uvedené v předchozí větě nazýváme *parciální zlomky*.

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} =$$

$$\frac{x}{x^3-1} =$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} =$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

Zlozte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{x}{x^3-1} =$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} =$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

- První zlomek obsahuje tři reálné jednoduché kořeny.
- Dostaneme tři parciální zlomky s konstantou v čitateli a lineárním výrazem ve jmenovateli.

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{x}{x^3-1} =$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} =$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

Nejprve rozložíme na součin ve jmenovateli. Rozklad je

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} =$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

- Rozklad $(x-1)(x^2+x+1)$ ukazuje, že jmenovatel má jeden reálný jednoduchý kořen a dva komplexně sdružené kořeny.
- Parciální zlomek příslušný ke komplexním kořenům obsahuje v čitateli lineární funkci.

Rozložte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} =$$

Jmenovatel má dva reálné kořeny. Oba jsou násobnosti dva.

Zlozšte na parciální zlomky (neurčité koeficienty nepočítejte).

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

Jmenovatel má jeden jednoduchý reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny.

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} dx$.

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2}$$

Napíšeme rozklad s neurčitými koeficienty.

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2}$$

$$x^2 + 1 = A(x + 2)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 2)$$

Vynásobíme rovnici společným jmenovatelem $(x - 1)(x + 2)(x - 2)$.

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2}$$

$$x^2 + 1 = A(x + 2)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 2)$$

$$x = 1$$

Dosadíme $x = 1$ do červeného vztahu.

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2}$$

$$x^2 + 1 = A(x + 2)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A \cdot 3(-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0$$

Dostáváme rovnici neobsahující ani B , ani C . Tuto rovnici řešíme vzhledem k A .

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2}$$

$$x^2 + 1 = A(x + 2)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A \cdot 3(-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2 + 1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A \cdot 3(-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2$$

Dosadíme $x = -2$ do červeného vztahu.

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2 + 1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A \cdot 3(-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A \cdot 0 + B(-3)(-4) + C \cdot 0$$

Výsledná rovnice obsahuje pouze koeficient B .

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2 + 1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A \cdot 3(-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A \cdot 0 + B(-3)(-4) + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{12}$$

Vypočteme koeficient B .

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2 + 1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A \cdot 3(-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A \cdot 0 + B(-3)(-4) + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{12}$$

$$x = 2$$

Dosadíme $x = 2$ do červeného vztahu.

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2 + 1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A \cdot 3(-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A \cdot 0 + B(-3)(-4) + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{12}$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + 4C$$

Výsledná rovnice obsahuje pouze koeficient C .

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x^2 + 1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A \cdot 3(-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A \cdot 0 + B(-3)(-4) + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{12}$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + 4C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{5}{4}$$

Vypočteme C . Nyní známe všechny neurčité koeficienty.

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = -\frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{5}{12}}{x+2} + \frac{\frac{5}{4}}{x-2}$$

Použijeme vypočtené hodnoty koeficientů $A = -\frac{2}{3}$, $B = \frac{5}{12}$ a $C = \frac{5}{4}$

v červeném vztahu.

Vypočtete $I_1 = \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = -\frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{5}{12}}{x+2} + \frac{\frac{5}{4}}{x-2}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{5}{12} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{5}{4} \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= -\frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{5}{12} \ln|x+2| + \frac{5}{4} \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

Vypočteme integrál pomocí základních vzorců.

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

Racionální funkce není ryze lomená. Nejprve proto vydělíme (zde dělení vynecháváme, předpokládáme znalost této operace).

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

Uvažujeme jenom ryze lomenou funkci. Napíšeme formální tvar rozkladu na parciální zlomky s neurčitými koeficienty.

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx^2$$

Vynásobíme společným jmenovatelem $x^2(x + 1)$.

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx^2$$

$$x = 0$$

Dosadíme $x = 0$ do červeného vztahu.

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx^2$$

$$x = 0$$

$$1 = A + 0B + 0C;$$

$$A = 1$$

Nalezneme A .

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx^2$$

$$x = 0$$

$$1 = A + 0B + 0C;$$

$$A = 1$$

$$x = -1$$

Dosadíme $x = -1$ do červeného vztahu.

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx^2$$

$$x = 0$$

$$1 = A + 0B + 0C;$$

$$A = 1$$

$$x = -1$$

$$3 = 0A + 0B + 1C;$$

$$C = 3$$

Nalezneme C .

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx^2$$

$$x = 0$$

$$1 = A + 0B + 0C;$$

$$A = 1$$

$$x = -1$$

$$3 = 0A + 0B + 1C;$$

$$C = 3$$

$$x^2 - x + 1 = Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx^2$$

Zbývá najít B . Roznásobíme součiny v červené rovnici a obdržíme modrou rovnici.

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx^2$$

$$x = 0$$

$$1 = A + 0B + 0C;$$

$$A = 1$$

$$x = -1$$

$$3 = 0A + 0B + 1C;$$

$$C = 3$$

$$x^2 - x + 1 = Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx^2$$

$$x^2: 1 = B + C,$$

$$x^1: -1 = A + B,$$

$$x^0: 1 = A$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin. Koeficienty, které stojí nalevo a napravo u stejných mocnin musí být stejné.

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2} \qquad \frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$x^2 - x + 1 = A(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx^2$$

$$x = 0$$

$$1 = A + 0B + 0C;$$

$$A = 1$$

$$x = -1$$

$$3 = 0A + 0B + 1C;$$

$$C = 3$$

$$x^2 - x + 1 = Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx^2$$

$$x^2: 1 = B + C,$$

$$x^1: -1 = A + B,$$

$$x^0: 1 = A$$

$$B = -2$$

Dosadíme C do první nebo A do druhé rovnice a nalezneme B .

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$A = 1, B = -2, C = 3$$

$$I_2 = \int x - 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} dx$$

Máme vypočteny hodnoty koeficientů. Tyto hodnoty použijeme v rozkladu na součín.

Vypočtete $I_2 = \int \frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} dx$.

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

$$A = 1, B = -2, C = 3$$

$$I_2 = \int x - 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} - 2 \ln |x| + 3 \ln |x + 1| + C$$

Zintegrujeme pomocí vzorců.

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

Vynásobíme společným jmenovatelem.

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)$$

$$x = 2$$

$$2 = 12A,$$

$$A = \frac{1}{6}$$

Dosadíme $x = 2$

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$$x = 2 \qquad 2 = 12A, \qquad A = \frac{1}{6}$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

Roznásobíme. Hledáme B a C .

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$$x = 2 \qquad 2 = 12A, \qquad A = \frac{1}{6}$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

$$0 = A + B, \qquad 1 = 2A - 2B + C, \qquad 0 = 4A - 2C$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin obdržíme rovnice pro koeficienty B a C .

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$$x = 2 \qquad 2 = 12A, \qquad A = \frac{1}{6}$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

$$0 = A + B, \qquad 1 = 2A - 2B + C, \qquad 0 = 4A - 2C$$

$$B = -\frac{1}{6}, C = \frac{1}{3}$$

Vyřešíme tyto rovnice.

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)$$

$$x = 2 \qquad 2 = 12A, \qquad A = \frac{1}{6}$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

$$0 = A + B, \qquad 1 = 2A - 2B + C, \qquad 0 = 4A - 2C$$

$$B = -\frac{1}{6}, C = \frac{1}{3}$$

$$I_3 = \int \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx$$

Dosadíme hodnoty koeficientů do rozkladu.

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$I_3 = \int \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{x-2}{x^2 + 2x + 4} dx$$

První člen integrujeme pomocí vzorce.

Vypočtěte $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{x-2}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 1 - 2}{x^2 + 2x + 4} dx \end{aligned}$$

- Ve druhém zlomku “zašifrujeme” do čitatele derivaci jmenovatele.
- K tomu můžeme použít multiplikatvní a aditivní konstanty.

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{x-2}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 1 - 2}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} + \frac{-3}{(x^2 + 2x + 1) + 3} dx \end{aligned}$$

Rozdělíme zlomek.

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{x-2}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 1 - 2}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} + \frac{-3}{(x^2 + 2x + 1) + 3} dx \\ &= \frac{2}{12} \ln|x-2| - \frac{1}{12} \ln|x^2 + 2x + 4| + \frac{3}{6} \int \frac{1}{(x+1)^2 + 3} dx \end{aligned}$$

- První zlomek má v čitateli derivaci jmenovatele.
- V druhém zlomku doplníme jmenovatel na čtverec.

Vypočtete $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8} dx$.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{x-2}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 1 - 2}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} + \frac{-3}{(x^2 + 2x + 1) + 3} dx \\ &= \frac{2}{12} \ln|x-2| - \frac{1}{12} \ln|x^2 + 2x + 4| + \frac{3}{6} \int \frac{1}{(x+1)^2 + 3} dx \\ &= \frac{1}{12} \ln(x-2)^2 - \frac{1}{12} \ln|x^2 + 2x + 4| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

Dokončíme integraci použitím vzorce.

4 Integrace per-partés

Věta 8. Necht' funkce u a v mají derivace na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx, \quad (2)$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Věta 8. Necht' funkce u a v mají derivace na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx, \quad (3)$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Důkaz:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{derivace součinu}$$

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx \quad \text{zintegrování a linearita integrálu}$$

$$uv = \int u'v dx + \int uv' dx \quad \text{integrál odstraní derivaci}$$

$$uv - \int u'v dx = \int uv' dx \quad \text{algebraická úprava}$$

Integrály typické pro výpočet metodou per-partés. $P(x)$ je polynom.

$$\int P(x)e^{\alpha x} dx, \int P(x) \sin(\alpha x) dx, \int P(x) \cos(\alpha x) dx,$$

$$\int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \int P(x) \ln^m x dx.$$

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

Funkce je součinem polynomu a logaritmické funkce → per-partés.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$u = \ln x \quad u' =$$

$$v' = x + 1 \quad v =$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = \ln x$ a $v' = x + 1$.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x + 1 \quad v = \frac{x^2}{2} + x$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = \ln x$ a $v' = x + 1$.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x + 1 & v = \frac{x^2}{2} + x \end{array}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = \ln x$ a $v' = x + 1$.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x + 1 \quad v = \frac{x^2}{2} + x$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx$$

Roznásobíme **závorku**.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x + 1 \quad v = \frac{x^2}{2} + x$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x \right)$$

Dokončíme integraci.

Vypočtěte $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x + 1 \quad v = \frac{x^2}{2} + x$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x \right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 - x + C$$

Upravíme a přidáme integrační konstantu.

Vypočtete $\int x \sin x \, dx$

Vypočtete $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = \\ v' = \sin x & v = \end{array}$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtete $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$u = x$	$u' = 1$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtete $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

Upravíme.

Vypočtete $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

- Integruje druhou část: $\int \cos x \, dx = \sin x$
- Hotovo.

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

Funkce je součinem polynomu a sinu → per-partés.

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$$u = x - 2 \quad u' =$$

$$v' = \sin(2x) \quad v =$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

při $u = x - 2$ a $v' = \sin(2x)$.

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$$u = x - 2 \quad u' = 1$$

$$v' = \sin(2x) \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

Platí

$$v = \int v'(x) dx = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x),$$

protože

$$\int \sin x dx = -\cos x \quad \text{a} \quad \int f(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b).$$

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = x - 2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array}$$

$$= (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = x - 2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array}$$

$$= (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

Vytkneme konstantu $\left(-\frac{1}{2}\right)$ z integrálu.

Vypočtěte $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx = \begin{array}{l} u = x - 2 \quad u' = 1 \\ v' = \sin(2x) \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array}$$
$$= (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx$$
$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$
$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) + C$$

Platí $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x)$, protože

$$\int \cos x dx = \sin x \quad \text{a} \quad \int f(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b).$$

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = x - 2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array}$$

$$= (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) + C$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

Upravíme.

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$u = x^2 + 1$	$u' =$
$v' = \sin x$	$v =$

- Funkce je součinem polynomu a funkce sinus.
- Budeme integrovat per-partés podle vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při volbě $u = (x^2 + 1)$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$u = x^2 + 1$	$u' = 2x$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

$$(x^2 + 1)' = 2x$$
$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

Vypočtěte $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$u = x^2 + 1$	$u' = 2x$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

(Note: In the original image, yellow arrows point from $x^2 + 1$ to $-\cos x$ and from $2x$ to $x \cdot \cos x$ in the next line.)

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Konstantní násobek 2 a znaménko minus dáme před integrál.

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' =$$

$$v' = \cos x \quad v =$$

Ještě jednou integrujeme per-partés. Nyní $u = x$ a $v' = \cos x$.

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad v = \sin x$$

$$x' = 1$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad v = \sin x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right)$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad v = \sin x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right)$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - (-\cos x) \right)$$

Integrujeme sinus: $\int \sin x \, dx = -\cos x$

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad v = \sin x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right)$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - (-\cos x) \right)$$

$$= (1 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C$$

Upravíme.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx$$

Integruje součin polynomu a exponenciální funkce.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$$

- Integrujeme per-partés.
- Polynom budeme derivovat a exponenciálu integrovat.
- Nezapomeňme, že $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$.

Vypočtěte $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx$$

$u = x^2 + 1$	$u' = 2x$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx$$

Vzorec je

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx$$

$u = x^2 + 1$	$u' = 2x$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx$$

$u = x$	$u' = 1$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

- Opět polynom krát exponenciální funkce.
- Opět integrujeme per-partés. Opět derivujeme polynom.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx$$

$u = x^2 + 1$	$u' = 2x$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx$$

$u = x$	$u' = 1$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right)$$

Vzorec pro červenou část je $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$, zbytek zůstane.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \quad u' = 2x \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \left(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right)$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x})$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

Vypočtěte $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \quad u' = 2x \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right)$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 3) + C,$$

Vytkneme $(-e^{-x})$.

Vypočtete $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Vypočtete $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

Jedná se o součin polynomu a funkce arkustangens.

Vypočtete $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$u = \operatorname{arctg} x \quad u' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v' = x \quad v = \frac{x^2}{2}$$

Budeme integrovat metodou per-partés. Budeme integrovat polynom a derivovat arkustangens.

Vypočtete $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$u = \operatorname{arctg} x$	$u' = \frac{1}{1+x^2}$
$v' = x$	$v = \frac{x^2}{2}$

Note: In the original image, yellow circles highlight $\operatorname{arctg} x$, $\frac{1}{1+x^2}$, and $\frac{x^2}{2}$. A yellow arrow points from $\operatorname{arctg} x$ to $\frac{x^2}{2}$, and another yellow arrow points from $\frac{1}{1+x^2}$ to $\frac{x^2}{2}$.

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

Vypočtete $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$u = \operatorname{arctg} x$	$u' = \frac{1}{1+x^2}$
$v' = x$	$v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx$$

Musíme integrovat racionální funkci, která není ryze lomená. Provedeme dělení:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) - 1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Vypočtete $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx \quad \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C.$$

K dokončení zbývá integrovat jedničku a jeden parciální zlomek. To provedeme pomocí příslušných vzorců.

Vypočtete $\int \ln x \, dx$

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \quad u' =$$

$$v' = 1 \quad v =$$

Ve funkci je “zašifrovaný” součin polynomu a logaritmické funkce:

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx.$$

Integrujeme per-partés při volbě $u = \ln x$ a $v' = 1$.

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Užijeme vztah $\frac{1}{x}x = 1$.

Vypočtete $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln x - \int 1 \, dx$$
$$= x \ln x - x$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtete $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx$$

$u = \ln x$	$u' = \frac{1}{x}$
$v' = 1$	$v = x$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$
$$= x \ln x - x$$
$$= x(\ln x - 1) + C$$

Hotovo.

Vypočtete $\int \ln^2 x \, dx$

Vypočtete $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx$$

$$u = \ln^2 x \quad u' =$$

$$v' = 1 \quad v =$$

- Je zde “zašifrován” součin polynomu a druhé mocniny logaritmu.
- Upravíme funkci $\ln^2 x$ na součin $(1) \cdot (\ln^2 x)$ a integrujeme per-partés při volbě $u = \ln^2 x$ a $v' = 1$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx$$

$$u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$v' = 1 \quad v = x$$

$$(\ln^2 x)' = 2 \ln x (\ln x)' = 2 \ln x \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx$$

$u = \ln^2 x$	$u' = \frac{2 \ln x}{x}$
$v' = 1$	$v = x$

$$= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Vypočtete $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \\ v' = 1 \quad v = \end{array}$$

Tento trik již známe: Napíšeme funkci $\ln x$ jako součin $(1) \cdot \ln x$ a integrujeme per-partés při volbě $u = \ln x$ a $v' = 1$.

Vypočtete $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array}$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int 1 \, dx \right)$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array}$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int 1 \, dx \right)$$

$$= x \ln^2 x - 2(x \ln x - x)$$

Dopočítáme integrál z jedničky.

Vypočtete $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array}$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int 1 \, dx \right)$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - x \right)$$

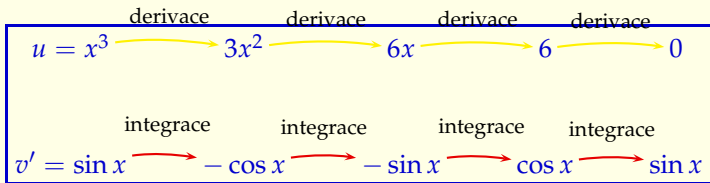
$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

Upravíme. Hotovo.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

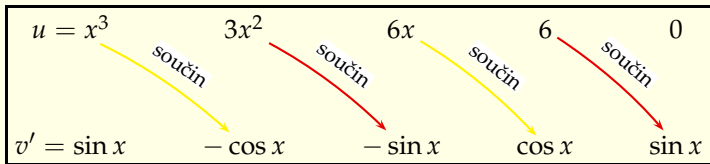
$$\int x^3 \sin x \, dx =$$



- Třikrát integrujeme per-partés, ale všechno zapíšeme do jednoho schématu.
- Žlutá šipka reprezentuje derivování. Derivujeme až na nulu.
- Červená šipka reprezentuje integrování.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx =$$



$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x$$

Násobíme ve směru šipek. Součinům ve směru žlutých šipek znaménko ponecháme, součinům ve směru červených šipek znaménko změním a všechny součiny sečteme.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx =$$

$u = x^3$	$3x^2$	$6x$	6	0
$v' = \sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$

$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x$$

$$= (-x^3 + 6x) \cos(x) + (3x^2 - 6) \sin x + C$$

Upravíme.

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x} dx$.

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x} dx$.

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x} dx$$

	derivace	derivace	derivace	derivace				
$u = x^3 + 2x$	\rightarrow	$3x^2 + 2$	\rightarrow	$6x$	\rightarrow	6	\rightarrow	0
=		integrace	integrace	integrace	integrace			
		\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow			
		$v' = e^{-x}$	$-e^{-x}$	e^{-x}	$-e^{-x}$	e^{-x}		

- Třikrát integrujeme per-partés, ale všechno zapíšeme do jednoho schématu.
- Žlutá šipka reprezentuje derivování. Derivujeme až na nulu.
- Červená šipka reprezentuje integrování.

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x} dx$.

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x} dx$$

$$\begin{array}{ccccccc} u = x^3 + 2x & & 3x^2 + 2 & & 6x & & 6 & & 0 \\ & \searrow \text{součin} & & \searrow \text{součin} & & \searrow \text{součin} & & \searrow \text{součin} & \\ v' = e^{-x} & & -e^{-x} & & e^{-x} & & -e^{-x} & & e^{-x} \end{array}$$
$$= -(x^3 + 2x)e^{-x} - (3x^2 + 2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x}$$

Násobíme ve směru šipek. Součinům ve směru žlutých šipek znaménko ponecháme, součinům ve směru červených šipek znaménko změním a všechny součiny sečteme.

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x} dx$.

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x} dx$$

$$= \begin{array}{ccccc} u = x^3 + 2x & 3x^2 + 2 & 6x & 6 & 0 \\ v' = e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^3 + 2x)e^{-x} - (3x^2 + 2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x}$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 2x + 3x^2 + 2 + 6x + 6)$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 8x + 8)$$

Upravíme.

5 Integrace pomocí substituce.

Věta 9. Necht' $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I , necht' funkce $\phi(x)$ má derivaci na intervalu J a platí $\phi(J) = I$. Potom na intervalu J platí

$$\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(t) dt, \quad (4)$$

dosadíme-li napravo $t = \phi(x)$.

Schematicky: $\boxed{\phi(x) = t}$ $\boxed{\phi'(x) dx = dt}$

Věta 10. Necht' $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I , necht' funkce $\phi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu J a platí $\phi(J) = I$. Potom na intervalu I platí

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt, \quad (5)$$

dosadíme-li napravo $t = \phi^{-1}(x)$, kde $\phi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\phi(x)$.

Schematicky: $\boxed{x = \phi(t)}$ $\boxed{dx = \phi'(t) dt}$

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx$$

- Vnitřní složka je $\ln x$.
- Derivace funkce $\ln x$ je $\frac{1}{x}$.
- Tato derivace, $\frac{1}{x}$, je v součinu s integrovanou funkcí.

Vypočtete $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx$$

$$\ln x = t$$

Zavedeme substituci $\ln x = t$.

Vypočtete $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x} dx &= dt \end{aligned}$$

Nalezneme vztah mezi dx a dt .

Vypočtete $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx \quad \boxed{\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array}} = \int \sin t dt$$

Dosadíme substituci.

Vypočtete $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx \quad \boxed{\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array}} = \int \sin t dt$$
$$= -\cos t$$

Integrujeme.

Vypočtete $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx \quad \boxed{\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array}} = \int \sin t dt$$
$$= -\cos t = -\cos(\ln x) + C$$

Použijeme substituci k návratu k proměnné x a přidáme integrační konstantu. Hotovo.

Vypočtete $\int x e^{1-x^2} dx$.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2} dx$.

$$\int xe^{1-x^2} dx$$

Zkusíme substituuovat za vnitřní složku složené funkce e^{1-x^2} .

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2} dx$.

$$\int xe^{1-x^2} dx$$

$$1 - x^2 = t$$

Hledáme vztah mezi diferenciály.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2} dx$.

$$\int xe^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \end{aligned}$$

Derivujeme obě strany substituce.

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2} dx$.

$$\int x e^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

Vyjádříme odsud výraz $x dx$, který figuruje uvnitř integrálu.

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2} dx$.

$$\int x e^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2} dx$.

$$\int x e^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^t$$

Vypočtěte integrál pomocí vzorce.

Vypočtete $\int x e^{1-x^2} dx$.

$$\int x e^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^t$$

$$= -\frac{1}{2} e^{1-x^2}$$

Použijeme substituci pro návrat k původní proměnné.

Vypočtete $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$

$$\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$$

$$x^2 = t$$

- Substituce $x^4 + 16 = t$, nebo $x^4 = t$, nejsou úplně šikovné, protože vztah mezi diferenciály při této substituci je

$$4x^3 dx = dt,$$

avšak člen $x^3 dx$ nikde v integrálu není.

- Člen $x dx$ napovídá, použít substituci $x^2 = t$.

Vypočtete $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$

$$\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$$

$$\begin{aligned}x^2 &= t \\2x dx &= dt \\x dx &= \frac{1}{2} dt\end{aligned}$$

Hledáme vztah mezi diferenciály a vyjádříme z něj výraz $x dx$.

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$

$$\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$$

$$\begin{aligned}x^2 &= t \\2x dx &= dt \\x dx &= \frac{1}{2} dt \\x^4 &= t^2\end{aligned}$$

Substituce $x^2 = t$ vede k relaci $x^4 = (x^2)^2 = t^2$.

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$

$$\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$$

$$\begin{aligned}x^2 &= t \\2x dx &= dt \\x dx &= \frac{1}{2} dt \\x^4 &= t^2\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 16} dt$$

Dosadíme.

Vypočtete $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$

$$\int \frac{x}{x^4 + 16} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 16} dt$$

$x^2 = t$
$2x dx = dt$
$x dx = \frac{1}{2} dt$
$x^4 = t^2$

$$= \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{t}{4}$$

Užijeme vzorec

$$\int \frac{1}{x^2 + A^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A}$$

při $A = 4$.

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$

$$\int \frac{x}{x^4 + 16} dx \quad \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \\ x^4 = t^2 \end{array} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 16} dt$$
$$= \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{4} + C$$

Užijeme zpětnou substituci $t = x^2$. Hotovo.

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

Vnitřní složka je $\sqrt{x+1}$. Derivace této vnitřní složky je

$$(\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Výskyt této člene $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ uvnitř integrálu (a v součinu) napovídá, že provést tuto substituci bude snadné.

Vypočtete $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\sqrt{x+1} = t$$

Použijeme navrženou substituci.

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx &= dt \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= 2 dt\end{aligned}$$

Najdeme vztah mezi diferenciály dx a dt . Dostáváme

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = dt$$

a tuto relaci vynásobíme číslem 2.

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int e^t 2 dt$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx &= dt \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= 2 dt \end{aligned}$$

Dosadíme.

Vypočtete $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx &= dt \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= 2 dt \end{aligned}$$

$$= \int e^t 2 dt = 2e^t$$

Zintegrujeme.

Vypočtete $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx &= dt \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= 2 dt \end{aligned}$$

$$= \int e^t 2 dt = 2e^t = 2e^{\sqrt{x+1}} + C$$

Užijeme substituci $t = \sqrt{x+1}$ k návratu k původní proměnné. Hotovo.

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx$$

- Rozepíšeme funkci $\operatorname{tg} x$ pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$.
- Lichá mocnina je i v čitateli, i ve jmenovateli. Vybereme si tu v čitateli.

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

“Vytáhneme” jednu mocninu funkce $\sin x$ z čitatele.

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

Sudou mocninu převedeme na funkci $\cos x$. Užijeme identitu

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$$\cos x = t$$

Dosadíme $\cos x = t$.

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x \, dx &= dt \end{aligned}$$

Nalezneme vztah mezi diferenciály dx a dt .

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$$\cos x = t$$

$$-\sin x \, dx = dt$$

$$\sin x \, dx = -dt$$

Přepíšeme výraz $\sin x \, dx$ do nových proměnných.

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$$\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} = \int -\frac{1-t^2}{t^3} \, dt$$

Dosadíme.

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$\cos x = t$
$-\sin x \, dx = dt$
$\sin x \, dx = -dt$

$$= \int -\frac{1-t^2}{t^3} \, dt = \int \frac{t^2-1}{t^3} \, dt$$

Upravíme

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$\cos x = t$
$-\sin x \, dx = dt$
$\sin x \, dx = -dt$

$$= \int -\frac{1-t^2}{t^3} \, dt = \int \frac{t^2-1}{t^3} \, dt = \int \frac{1}{t} - t^{-3} \, dt$$

Obdržená racionální funkce je ryze lomená. Protože je jmenovatel jednočlenný, nemusíme rozkládat na parciální zlomky, ale stačí vydělit čitatele výrazem t^3 .

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$$\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} = \int -\frac{1-t^2}{t^3} \, dt = \int \frac{t^2-1}{t^3} \, dt = \int \frac{1}{t} - t^{-3} \, dt$$

$$= \ln |t| + \frac{1}{2} t^{-2}$$

Nyní integrujeme pomocí vzorců.

Vypočtete $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$$\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} = \int -\frac{1-t^2}{t^3} \, dt = \int \frac{t^2-1}{t^3} \, dt = \int \frac{1}{t} - t^{-3} \, dt$$

$$= \ln |t| + \frac{1}{2} t^{-2} = \ln |\cos x| + \frac{1}{2 \cos^2 x} + C$$

Po integraci provedeme návrat k původní proměnné a přidáme integrační konstantu.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$$

Lichá mocnina je ve jmenovateli.

Vypočtete $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx$$

Vynásobíme a současně vydělíme výrazem $\sin x$. Tím se funkce nezmění a lichá mocnina je v čitateli.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} \sin x dx$$

Převědeme druhou mocninu funkce $\sin x$ na $\cos x$. Použijeme vzorec

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} \sin x dx$$

$$\cos x = t$$

Budeme používat substituci $\cos x = t$.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ \sin x dx &= -dt \end{aligned}$$

Najdeme vztah mezi diferenciály.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ \sin x dx &= -dt \end{aligned}$$

$$= - \int \frac{1}{(2 + t)(1 - t^2)} dt$$

Dosadíme ze substituce.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} \sin x dx \quad \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array}$$
$$= - \int \frac{1}{(2 + t)(1 - t^2)} dt = \int \frac{1}{(2 + t)(1 + t)(t - 1)} dt$$

Rozložíme jmenovatel na součin.

Vypočtete $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} \sin x dx \quad \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array}$$

$$= - \int \frac{1}{(2 + t)(1 - t^2)} dt = \int \frac{1}{(2 + t)(1 + t)(t - 1)} dt$$

$$= \int -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{6} \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{2 + t} dt$$

Rozložíme na parciální zlomky (tato pasáž je zde přeskočena, vyžaduje další a delší počítání).

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} \sin x dx \quad \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array}$$

$$= - \int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)} dt = \int \frac{1}{(2+t)(1+t)(t-1)} dt$$

$$= \int -\frac{1}{2} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{6} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{2+t} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |1+t| + \frac{1}{6} \ln |t-1| + \frac{1}{3} \ln |2+t|$$

Užijeme vzorce k integraci.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} \sin x dx \quad \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array}$$

$$= - \int \frac{1}{(2 + t)(1 - t^2)} dt = \int \frac{1}{(2 + t)(1 + t)(t - 1)} dt$$

$$= \int -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{6} \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{2 + t} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |1 + t| + \frac{1}{6} \ln |t - 1| + \frac{1}{3} \ln |2 + t|$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + \frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) + \frac{1}{3} \ln(2 + \cos x) + C$$

Pomocí substitučního vztahu se vrátíme k původní proměnné.

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$3x+2 = t^2$$

- Člen $3x+2$ je pod odmocninou. Užijeme substituci, která umožní tuto odmocninu odstranit.
- Budeme dosazovat $3x+2 = t^2$.

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$3x+2 = t^2$$

$$3 dx = 2t dt$$

Nalezneme vztah mezi dx a dt .

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$3x+2 = t^2$$

$$3 dx = 2t dt$$

$$dx = \frac{2}{3}t dt$$

Vyjádříme dx .

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$3x+2 = t^2$$

$$3 dx = 2t dt$$

$$dx = \frac{2}{3}t dt$$

$$x = \frac{1}{3}(t^2 - 2)$$

Vyjádříme proměnnou x .

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$3x+2 = t^2$$

$$3 dx = 2t dt$$

$$dx = \frac{2}{3}t dt$$

$$x = \frac{1}{3}(t^2 - 2)$$

$$t = \sqrt{3x+2}$$

Přichystáme si zpětnou substituci. Vyjádříme t pomocí x .

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$3x+2 = t^2$$

$$3 dx = 2t dt$$

$$dx = \frac{2}{3}t dt$$

$$x = \frac{1}{3}(t^2 - 2)$$

$$t = \sqrt{3x+2}$$

$$= \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1} \cdot \frac{2}{3}t dt$$

Provedeme substituci.

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$3x+2 = t^2$$

$$3 dx = 2t dt$$

$$dx = \frac{2}{3}t dt$$

$$x = \frac{1}{3}(t^2 - 2)$$

$$t = \sqrt{3x+2}$$

$$= \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1} \cdot \frac{2}{3}t dt$$

$$= 2 \int \frac{t-1}{t^2+1} \cdot t dt$$

Upravíme.

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3 dx &= 2t dt \\ dx &= \frac{2}{3}t dt \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1} \cdot \frac{2}{3}t dt$$
$$= 2 \int \frac{t-1}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2-t}{t^2+1} dt$$

Převědeme na jeden zlomek.

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$3x+2 = t^2$
$3 dx = 2t dt$
$dx = \frac{2}{3}t dt$
$x = \frac{1}{3}(t^2 - 2)$
$t = \sqrt{3x+2}$

$$= \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1} \cdot \frac{2}{3}t dt$$
$$= 2 \int \frac{t-1}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2-t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{-t-1}{t^2+1} dt$$

Vydělíme, protože funkce není ryze lomená.

$$\frac{t^2-t}{t^2+1} = \frac{(t^2+1) + (-t-1)}{t^2+1} = 1 + \frac{-t-1}{t^2+1}$$

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$3x+2 = t^2$$

$$3 dx = 2t dt$$

$$dx = \frac{2}{3}t dt$$

$$x = \frac{1}{3}(t^2 - 2)$$

$$t = \sqrt{3x+2}$$

$$= \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1} \cdot \frac{2}{3}t dt$$

$$= 2 \int \frac{t-1}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2-t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{-t-1}{t^2+1} dt$$

$$= 2 \int 1 - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt$$

Získaná funkce je přímo parciální zlomek. Tento typ zlomku integrujeme rozdělíme na součet zlomku, který má v čitateli derivaci jmenovatele, a zlomku, který má v čitateli jen konstantu. Oba zlomky pak snadno zintegrujeme.

Vypočtete $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3 dx &= 2t dt \\ dx &= \frac{2}{3}t dt \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1} \cdot \frac{2}{3}t dt$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int \frac{t-1}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2-t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{-t-1}{t^2+1} dt \\ &= 2 \int 1 - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \left(t - \frac{1}{2} \ln |t^2+1| - \operatorname{arctg} t \right) + C \end{aligned}$$

Integrace je již snadná. Užijeme vztah

$$\int \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2+1).$$

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3 dx &= 2t dt \\ dx &= \frac{2}{3}t dt \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \end{aligned}$$

$$= \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1} \cdot \frac{2}{3}t dt$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int \frac{t-1}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2-t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{-t-1}{t^2+1} dt \\ &= 2 \int 1 - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \left(t - \frac{1}{2} \ln |t^2+1| - \arctg t \right) + C \\ &= 2\sqrt{3x+2} - \ln |3x+3| - 2 \arctg \sqrt{3x+2} + C \end{aligned}$$

Roznásobíme závorku a provedeme **zpětnou substituci** pro návrat k proměnné x .

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

Funkce obsahuje odmocninu z lineárního výrazu – zavedeme substituci na odstranění odmocniny.

Vypočtěte $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx =$$

$$x - 1 = t^2$$

Výraz pod odmocninou je druhá mocnina nové proměnné.

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx =$$

$$x - 1 = t^2$$

$$dx = 2t dt$$

Nalezneme vztah mezi diferenciály dx a dt

- $(x - 1)' = 1$ (derivace podle x)
- $(t^2)' = 2t$ (derivace podle t)

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx =$$

$$x - 1 = t^2$$

$$dx = 2t dt$$

$$x = t^2 + 1$$

$$\sqrt{x-1} = t$$

Nalezneme x a $\sqrt{x-1}$ ze substitučního vztahu.

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx = \begin{array}{l} x-1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 1 \\ \sqrt{x-1} = t \end{array} = \int \frac{1 + \sqrt{t^2}}{t^2 + 1} \cdot 2t dt$$

Dosadíme podle substituce.

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx = \begin{array}{l} x-1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 1 \\ \sqrt{x-1} = t \end{array} = \int \frac{1 + \sqrt{t^2}}{t^2 + 1} \cdot 2t dt$$
$$= 2 \int \frac{1+t}{t^2+1} \cdot t dt$$

Odmocníme t^2 a vytkneme konstantu před integrál.

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx = \begin{array}{l} x - 1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 1 \\ \sqrt{x-1} = t \end{array} = \int \frac{1 + \sqrt{t^2}}{t^2 + 1} \cdot 2t dt$$
$$= 2 \int \frac{1+t}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt$$

Převědeme na jeden zlomek – násobíme čitatele.

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx = \begin{array}{l} x - 1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 1 \\ \sqrt{x-1} = t \end{array} = \int \frac{1 + \sqrt{t^2}}{t^2 + 1} \cdot 2t dt$$
$$= 2 \int \frac{1+t}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{t-1}{t^2+1} dt$$

Vydělíme čítec jmenovatelem.

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx = \begin{array}{l} x-1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 1 \\ \sqrt{x-1} = t \end{array} = \int \frac{1 + \sqrt{t^2}}{t^2 + 1} \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int \frac{1+t}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{t-1}{t^2+1} dt$$
$$= 2 \int 1 + \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt$$

Rozdělíme zlomek na dva jednodušší.

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx = \begin{array}{l} x - 1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 1 \\ \sqrt{x-1} = t \end{array} = \int \frac{1 + \sqrt{t^2}}{t^2 + 1} \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int \frac{1+t}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{t-1}{t^2+1} dt$$
$$= 2 \int 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt$$

“Vytvoříme” v čitateli derivaci jmenovatele pomocí multiplikativní konstanty 2.

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx = \boxed{\begin{array}{l} x-1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 1 \\ \sqrt{x-1} = t \end{array}} = \int \frac{1 + \sqrt{t^2}}{t^2 + 1} \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int \frac{1+t}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{t-1}{t^2+1} dt$$

$$= 2 \int 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= 2 \left[t + \frac{1}{2} \ln |t^2+1| - \arctg t \right]$$

Zintegrujeme podle vzorců a podle vztahu $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$.

Vypočtete $\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx &= \boxed{\begin{array}{l} x - 1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 1 \\ \sqrt{x-1} = t \end{array}} = \int \frac{1 + \sqrt{t^2}}{t^2 + 1} \cdot 2t dt \\ &= 2 \int \frac{1+t}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{t-1}{t^2+1} dt \\ &= 2 \int 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= 2 \left[t + \frac{1}{2} \ln |t^2+1| - \operatorname{arctg} t \right] \\ &= 2 \left[\sqrt{x-1} + \frac{1}{2} \ln |x| - \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} \right] + C \end{aligned}$$

Použijeme zpětnou substituci pro návrat k proměnné x .

6 Další ...

Jednotlivé metody je pochopitelně někdy nutno kombinovat.

Vypočtěte $\int \arcsin x \, dx$

$$\int \arcsin x \, dx$$

$$u = \arcsin x \quad u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v' = 1 \quad v = x$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x \, dx &= dt \\ x \, dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$= x \arcsin x - \int \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{t}$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

KONEC