

Užití I' Hospitalova pravidla

Robert Mařík a Lenka Příbylová

6. března 2007

Obsah

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$	3
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$	8
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$	14
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$	21
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$	27

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Dosadíme. Protože $\arcsin 0 = 0$ a $e^0 = 1$, dostáváme neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \underline{\underline{\text{l'H}}}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x}$$

Podle tohoto pravidla platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x)'}{(1 - e^x)'},$$

pokud limita vpravo existuje (ať konečná nebo nekonečná).

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x} = -1$$

Dosazením dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-0}}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

- Protože $\sin 0 = 0$ a v pravém okolí nuly má $\sin x$ kladné hodnoty, je $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \sin x = \infty$.
- Stejně jako ve jmenovateli vyjde i limita v čitateli. Výraz je typu $\left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$.

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin 2x} \cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{\sin x} \cos x}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo a derivujeme zvlášť čitatel a zvlášť jmenovatel jako složené funkce.

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} &= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin 2x} \cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{\sin x} \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos 2x}{2 \sin x \cos x} \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

Výraz upravíme.

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} &= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin 2x} \cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{\sin x} \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos 2x}{2 \sin x \cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \end{aligned}$$

- Zkrátíme $\sin x$
- Protože $\cos x$ a $\cos 2x$ jsou v nule spojité funkce a jsou v nule rovny jedné, je možné použít větu o součinu limit a vynést je před znak limity jako číslo 1.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\left\| \frac{\infty \ln \infty}{\infty} \right\| = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|.$$

Jedná se o neurčitý výraz.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{2x + 1}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Při derivování dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x \ln x)'}{(x^2 + x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x \frac{1}{x}}{2x + 1}.$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{2x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\left\| \frac{\ln \infty + 1}{\infty} \right\| = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{2x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

Použijeme ještě jednou l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{2x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = 0$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{\left\| \frac{1}{\infty} \right\|}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

Po dosazení dostáváme neurčitý výraz $\left\| \frac{0}{0} \right\|$. Připomeňme, že $\operatorname{arctg} 0 = 0$. Použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Dosadíme a dostáváme neurčitý výraz $\left\| \frac{0}{0} \right\|$.

Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{upr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)}$$

Nejprve upravíme:

$$\frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{x^2}{(1+x^2)3x^2} = \frac{1}{3(1+x^2)}$$

Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{upr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

Dosadíme.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\left\| \frac{0 - \sin 0}{\sin^3 0} \right\| = \left\| \frac{0}{0} \right\|.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x}$$

- Užijeme l'Hospitalovo pravidlo.
- Podle pravidla pro derivaci složené funkce platí

$$(\sin^3(x))' = 3 \sin^2 x (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cos x.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Dosadíme. Protože $\cos 0 = 1$ a $\sin 0 = 0$, dostáváme stále $\left\| \frac{0}{0} \right\|$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x}$$

Užijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou. Ve jmenovateli dostáváme

$$(3 \sin^2 x \cdot \cos x)' = 3 \cdot 2 \sin x \cos x \cos x + 3 \sin^2 x (-\sin x)$$

(**derivace součinu** a **derivace složené funkce**).

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Dosadíme. Stále $\left\| \frac{0}{0} \right\|$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6 \cos^3 x - 6.2 \sin^2 x \cos x - 9 \sin^2 x \cos x}$$

Užijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6 \cos^3 x - 6.2. \sin^2 x \cos x - 9 \sin^2 x \cos x} = \frac{1}{6}$$

Dostáváme funkci, která je spojitá v $x = 0$. Dosazením dostáváme definovaný výraz a máme výsledek.