

Nevlastní integrál

Lenka Příbylová

6. března 2007

Obsah

$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$	3
--	-------	---

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$$

V horní mezi má integrál singularitu vlivem meze. Navíc má singularitu uvnitř intervalu integrace v bodě $x = 1$, protože zde funkce není definovaná. Jde o výraz typu $\left\| \frac{1}{0} \right\|$. Nelze spočítat určitý integrál, protože v $x = 1$ neexistuje primitivní funkce a interval integrace je nekonečný.

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$$

Rozdělíme integrál na dva. První má singularitu v horní mezi vlivem funkce. Druhý má dvě singularity - v dolní mezi vlivem funkce, v horní mezi vlivem meze.

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \end{aligned}$$

Druhý integrál rozdělíme na **dva** např. v bodě $x = 2$. Každý integrál má nyní pouze jednu singularitu.

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln^2 x} dx \end{aligned}$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t z levého okolí $x = 1$ je nyní první integrál určitý, podobně další dva, lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli. Najdeme primitivní funkci v pomocném výpočtu.

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{\frac{1}{2}}^t + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_t^2 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^t \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \boxed{\frac{\ln x = t}{\frac{1}{x} dx = dt}} = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{\frac{1}{2}}^t + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_t^2 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \right) + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln t} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2} \right)\end{aligned}$$

Dosadíme meze.

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

Spočteme limity. Integrál diverguje.

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln t} = \left\| \frac{1}{0^-} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln t} = \left\| \frac{1}{0^+} \right\| = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln t} = \left\| \frac{1}{\infty} \right\| = 0$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \right) + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln t} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2} \right) \\ &= \infty + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} + \infty \end{aligned}$$

KONEC