

# Nevlastní integrál vlivem funkce

Lenka Příbylová

6. března 2007

# Obsah

**Definice - singularita v horní mezi** 3

$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$  . . . . . 3

**Definice - singularita v dolní mezi** 10

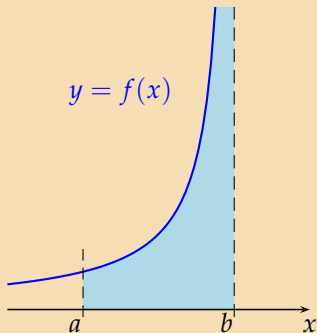
$\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}} dx$  . . . . . 10

**Definice - singularita uvnitř intervalu integrace** 18

$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$  . . . . . 18

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  . . . . . 26

# Definice - singularita v horní mezi



$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow b^-} [F(t) - F(a)]$$

Najděte  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ .

Najděte  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ .

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$$

V horní mezi má integrál singularitu vlivem funkce, protože pro  $x = 1$  funkce není definovaná. Jde o výraz typu  $\left\| \frac{1}{0} \right\|$ . Nelze spočítat určitý integrál, protože v  $x = 1$  neexistuje primitivní funkce.

Najděte  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ .

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x} dx$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná  $t$  z levého okolí  $x = 1$  je nyní integrál určitý,

Najděte  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ .

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} [-\ln |1-x|]_0^t$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} [-\ln |1-x|]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (-\ln |1-t| + \ln 1)\end{aligned}$$

Dosadíme meze.



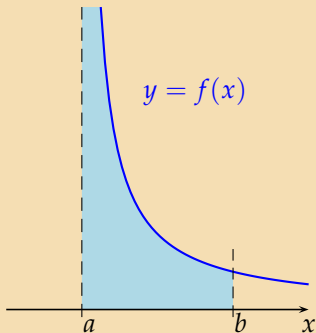
Najděte  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} [-\ln |1-x|]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (-\ln |1-t| + \ln 1) = \infty\end{aligned}$$

Spočteme limitu. Integrál diverguje.

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln |1-t| = \ln |0^+| = \infty$$

# Definice - singularita v dolní mezi



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} [F(b) - F(t)]$$

Najděte  $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ .

Najděte  $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ .

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

V dolní mezi má integrál singularitu vlivem funkce, protože pro  $x = 0$  funkce není definovaná. Jde o výraz typu  $\left\| \frac{1}{0} \right\|$ . Nelze spočítat určitý integrál, protože v  $x = 0$  neexistuje primitivní funkce.

Najděte  $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ .

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná  $t$  z pravého okolí  $x = 0$  je nyní integrál určitý,

Najděte  $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ .

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{2/3}}{2/3} \right]_t^8$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte  $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{2/3}}{2/3} \right]_t^8 \\ &= \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \sqrt[3]{x^2} \right]_t^8\end{aligned}$$

Zjednodušíme zlomek. Konstantu lze vytknout až před limitu.

Najděte  $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{2/3}}{2/3} \right]_t^8 \\ &= \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \sqrt[3]{x^2} \right]_t^8 = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( 4 - \sqrt[3]{t^2} \right)\end{aligned}$$

Dosadíme meze.



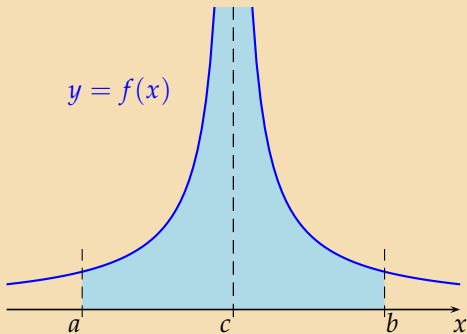
Najděte  $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{2/3}}{2/3} \right]_t^8 \\ &= \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \sqrt[3]{x^2} \right]_t^8 = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( 4 - \sqrt[3]{t^2} \right) = 6\end{aligned}$$

Spočteme limitu.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{t^2} = 0$$

# Definice - singularita uvnitř intervalu integrace



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Najděte  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ .

Najděte  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ .

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$$

Integrál má singularitu uvnitř intervalu integrace. Funkce není definovaná pro  $x = 1$ . Nelze spočítat určitý integrál, protože zde funkce není ohraničená.

Najděte  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ .

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$$

Rozdělíme na dva nevlastní integrály s jednou singularitou.

Najděte  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx\end{aligned}$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná  $t$  v levém resp. pravém okolí  $x = 1$  jsou nyní integrály určité,

Najděte  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[ 3\sqrt[3]{x-1} \right]_0^t + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[ 3\sqrt[3]{x-1} \right]_t^2\end{aligned}$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[ 3\sqrt[3]{x-1} \right]_0^t + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[ 3\sqrt[3]{x-1} \right]_t^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (3\sqrt[3]{t-1} + 3) + \lim_{t \rightarrow 1^+} (3 - 3\sqrt[3]{t-1})\end{aligned}$$

Dosadíme meze.



Najděte  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[ 3\sqrt[3]{x-1} \right]_0^t + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[ 3\sqrt[3]{x-1} \right]_t^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (3\sqrt[3]{t-1} + 3) + \lim_{t \rightarrow 1^+} (3 - 3\sqrt[3]{t-1}) = 6\end{aligned}$$

Spočteme limity.

Najděte  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

Najděte  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

Integrál má singularitu uvnitř intervalu integrace. Funkce není definovaná pro  $x = 0$ . Nelze spočítat určitý integrál, protože zde funkce není ohraničená.

Najděte  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

Rozdělíme na dva nevlastní integrály s jednou singularitou.

Najděte  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x} dx + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx\end{aligned}$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná  $t$  v levém resp. pravém okolí  $x = 0$  jsou nyní integrály určité,

Najděte  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x} dx + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} [\ln |x|]_{-1}^t + \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln |x|]_t^1\end{aligned}$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x} dx + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} [\ln |x|]_{-1}^t + \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln |x|]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} (\ln |t| - \ln 1) + \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln |t|)\end{aligned}$$

Dosadíme meze.

Najděte  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x} dx + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} [\ln |x|]_{-1}^t + \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln |x|]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} (\ln |t| - \ln 1) + \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln |t|)\end{aligned}$$

Spočteme limity.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln |t| = -\infty$$

Integrál neexistuje.



KONEC