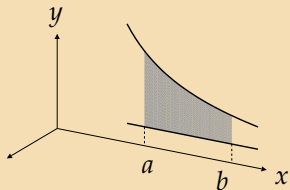


Objem dutého rotačního tělesa

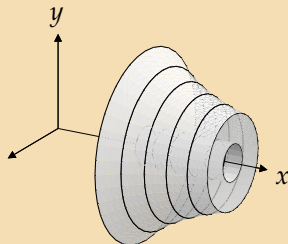
Lenka Příbylová

6. března 2007

Objem rotačního tělesa vzniklého rotací plochy omezené spojitými funkcemi $y = d(x)$ a $y = h(x)$, které na intervalu $\langle a, b \rangle$ splňují $d(x) \leq h(x)$, a přímkami $x = a$ a $x = b$:



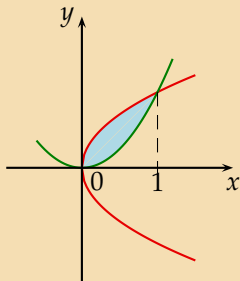
$$y = h(x), y = d(x)$$



$$V = \pi \int_a^b (h^2(x) - d^2(x)) dx$$

Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného křivkami $y^2 = x$ a $y = x^2$ kolem osy x .

$$y^2 = x, y = x^2, V = ?$$



Nakreslíme grafy obou funkcí. Jejich průsečíky buď vidíme na grafu nebo je dopočítáme:

$$\sqrt{x} = x^2$$

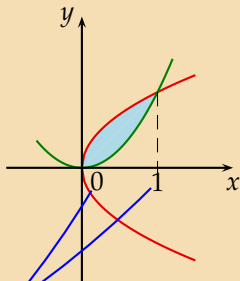
$$x = x^4$$

$$0 = x^4 - x$$

$$0 = x(x^3 - 1)$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

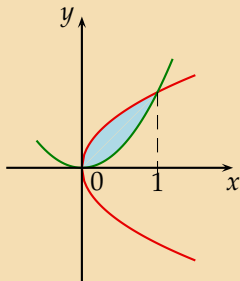
$$y^2 = x, y = x^2, V = ?$$



$$V = \pi \int_0^1$$

Vyjádříme objem rotačního tělesa jako $\pi \times$ určitý integrál.

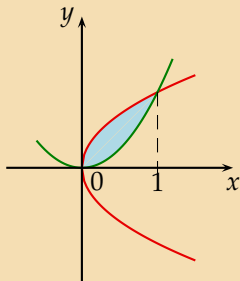
$$y^2 = x, y = x^2, V = ?$$



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2$$

Na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je horní funkcí $h(x) = \sqrt{x}$

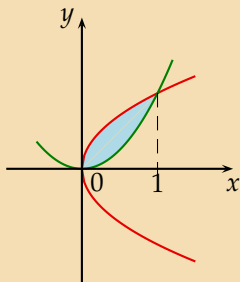
$$y^2 = x, y = x^2, V = ?$$



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 dx$$

a dolní $d(x) = x^2$.

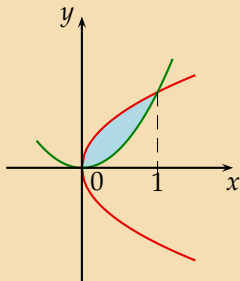
$$y^2 = x, y = x^2, V = ?$$



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x - x^4 dx$$

Upravíme.

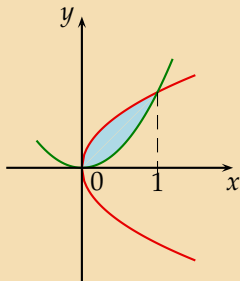
$$y^2 = x, y = x^2, V = ?$$



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x - x^4 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

Najdeme primitivní funkci.

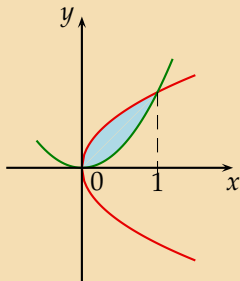
$$y^2 = x, y = x^2, V = ?$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x - x^4 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

Vypočítáme určitý integrál pomocí Newton-Leibnizovy formule. Dosadíme tedy meze.

$$y^2 = x, y = x^2, V = ?$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x - x^4 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi \end{aligned}$$

Dopočítáme.

KONEC