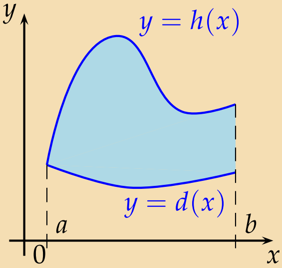
Obsah rovinného útvaru mezi dvěma křivkami

Robert Mařík a Lenka Přibylová

6. března 2007

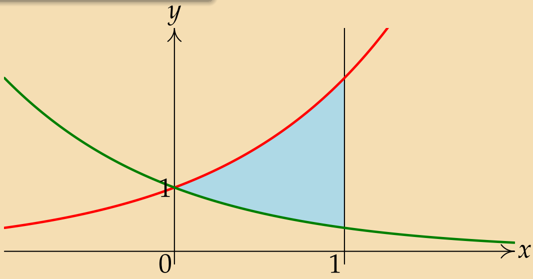
Obsah rovinné plochy omezené spojitými funkcemi $y = d(x)$ a $y = h(x)$, které na intervalu $\langle a, b\rangle$ splňují $d(x) \leq h(x)$, a přímkami $x = a$ a $x = b$:



$$S = \int_a^b h(x) - d(x)\,\mathrm{d}x$$

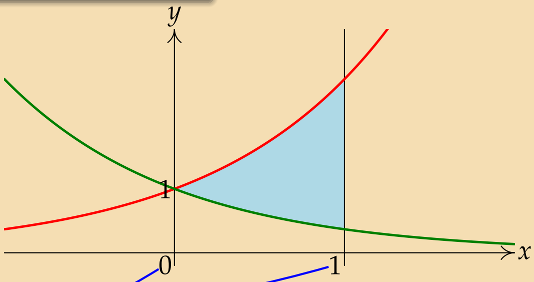
Určete obsah množiny mezi křivkami $y = e^x$ a $y = e^{-x}$ pro $x \in [0, 1]$.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$.



Zakreslíme křivky.

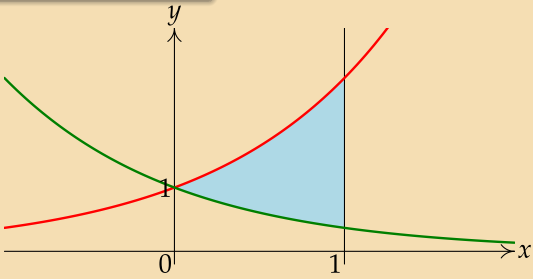
$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$.



$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

Vyjádříme obsah plochy jako určitý integrál.
$h(x) = e^x$, $d(x) = e^{-x}$

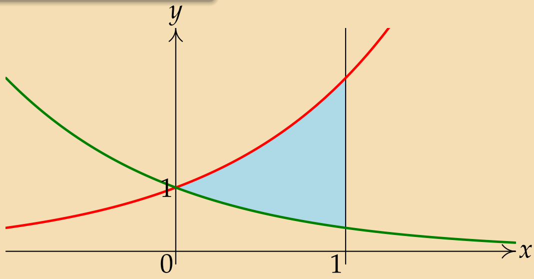
$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0,1]$, $S = ?$.



$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1$$

Vypočteme neurčitý integrál.

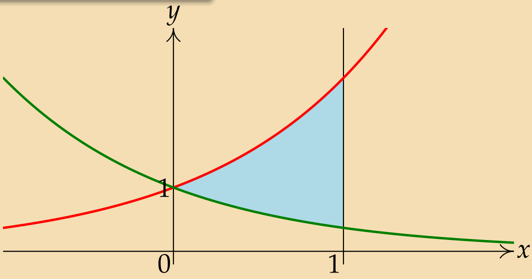
$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0,1]$, $S = ?$.



$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - \left[e^0 + e^0\right]$$

Vypočítáme určitý integrál pomocí Newtonovy–Leignizovy formule. Dosadíme tedy meze.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$.



$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - \left[e^0 + e^0\right] = e + \frac{1}{e} - 2$$

Dopočítáme.

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x - 1)^2$ a $x + y = 0$.

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

$$1 - (x-1)^2 = -x$$

- První z křivek je parabola, druhá z křivek je přímka $y = -x$.
- Křivky se protínají v bodě, jehož x-ová splňuje rovnici

$$1 - (x-1)^2 = -x$$

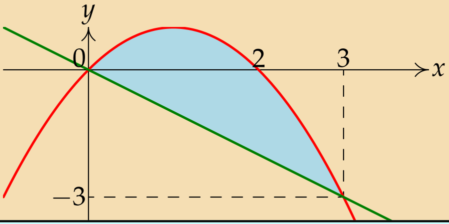
Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

$$1 - (x-1)^2 = -x$$
$$1 - (x^2 - 2x + 1) = -x$$
$$1 - x^2 + 2x - 1 = -x$$
$$3x - x^2 = 0$$
$$(3 - x)x = 0$$

Průsečíky křivek jsou body $[0, 0]$ a $[3, -3]$.

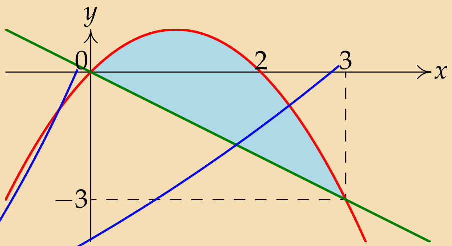
Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

$$1 - (x-1)^2 = -x$$
$$1 - (x^2 - 2x + 1) = -x$$
$$1 - x^2 + 2x - 1 = -x$$
$$3x - x^2 = 0$$
$$(3 - x)x = 0$$



$$y = 1 - (x-1)^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - x^2 = x(2 - x)$$

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

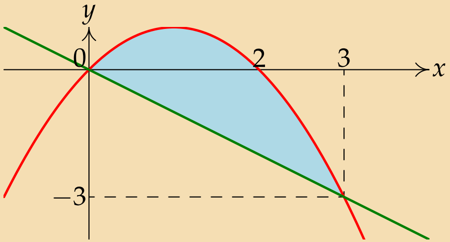


$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,dx$$

$h(x) = 1 - (x-1)^2$

$d(x) = -x$, protože $x + y = 0 \iff y = -x$

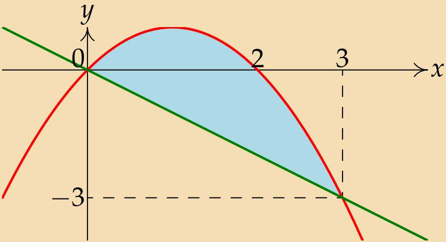
Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.



$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,\mathrm{d}x$$

Umocníme.

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

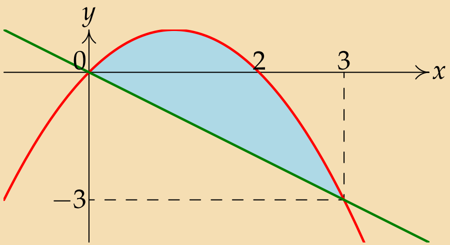


$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 -x^2 + 3x\,\mathrm{d}x$$

Upravíme integrand.

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

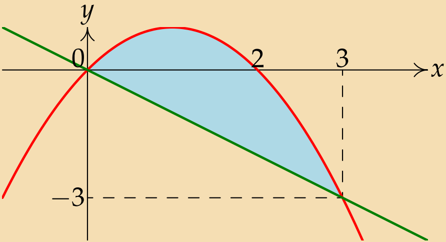


$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 -x^2 + 3x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

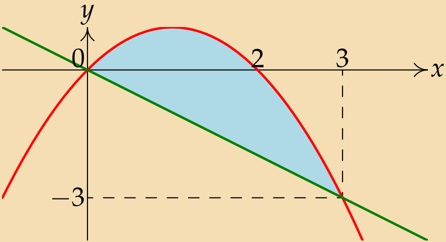


$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,dx = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,dx$$

$$= \int_0^3 -x^2 + 3x\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2}\right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2}\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.



$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 -x^2 + 3x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2}\right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2}\right]$$

$$= -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$$

Dopočítáme obsah množiny.

KONEC