Lineární algebra
Operace s vektory a maticemi

Robert Mařík

6. března 2007

Obsah

Definice (algebraický vektorový prostor): Množinu $\mathbb{R}^n$ uspořádaných n-tic reálných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ s operacemi sčítání a násobení reálným číslem definovanými

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$
$$c \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n)$$

pro všechna $c \in \mathbb{R}$ a $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *reálným algebraickým vektorovým prostorem*. Prvky tohoto prostoru, tj. uspořádané n-tice reálných čísel nazýváme *algebraickými vektory*. Čísla $a_1, \dots, a_n$ nazýváme *složky vektoru* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Číslo n nazýváme *dimenze prostoru* $\mathbb{R}^n$.

Řádkové algebraické vektory.

$\vec{a} = (1, 2, 1), \quad \vec{b} = (3, 0, -1), \quad \vec{c} = (2, 1, 0), \quad \vec{o} = (0, 0, 0)$

$\vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c}$

$\vec{a} + \vec{o}$

$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$

$\vec{a} + \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$

Řádkové algebraické vektory.

$\vec{a} = (1,2,1), \quad \vec{b} = (3,0,-1), \quad \vec{c} = (2,1,0), \quad \vec{o} = (0,0,0)$

$$\begin{aligned}\vec{a} + 2\cdot\vec{b} - \vec{c} &= (1,2,1) + 2\cdot(3,0,-1) - (2,1,0)\\ &= (1,2,1) + (6,0,-2) - (2,1,0)\end{aligned}$$

$$\vec{a} + \vec{o}$$

$$0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c}$$

Dosadíme za vektory a vynásobíme vektor $\vec{b}$ dvěma (násobíme tedy každý prvek tohoto vektoru dvěma).

Řádkové algebraické vektory.

$\vec{a} = (1,2,1), \qquad \vec{b} = (3,0,-1), \qquad \vec{c} = (2,1,0), \qquad \vec{o} = (0,0,0)$

$$\begin{aligned}\vec{a} + 2\cdot\vec{b} - \vec{c} &= (1,2,1) + 2\cdot(3,0,-1) - (2,1,0)\\ &= (1,2,1) + (6,0,-2) - (2,1,0)\\ &= (1+6-2, 2+0-1, 1-2-0)\end{aligned}$$

$$\vec{a} + \vec{o}$$

$$0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{b} - 2\cdot\vec{c}$$

Sečteme (odečteme) odpovídající si komponenty vektorů.

Řádkové algebraické vektory.

$$\vec{a} = (1,2,1), \qquad \vec{b} = (3,0,-1), \qquad \vec{c} = (2,1,0), \qquad \vec{o} = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned}\vec{a} + 2\cdot\vec{b} - \vec{c} &= (1,2,1) + 2\cdot(3,0,-1) - (2,1,0)\\ &= (1,2,1) + (6,0,-2) - (2,1,0)\\ &= (1+6-2, 2+0-1, 1-2-0)\\ &= (5,1,-1)\end{aligned}$$

$$\vec{a} + \vec{o}$$

$$0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{b} - 2\cdot\vec{c}$$

Upravíme.

Řádkové algebraické vektory.

$$\vec{a} = (1,2,1), \qquad \vec{b} = (3,0,-1), \qquad \vec{c} = (2,1,0), \qquad \vec{o} = (0,0,0)$$

$$\vec{a} + \vec{o} = (1,2,1) + (0,0,0) = (1,2,1) = \vec{a}$$

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$$

Přičteme-li k libovolnému vektoru nulový vektor, původní vektor se nemění (protože ke každé komponentě přičteme nulu).

Řádkové algebraické vektory.

$\vec{a} = (1, 2, 1), \qquad \vec{b} = (3, 0, -1), \qquad \vec{c} = (2, 1, 0), \qquad \vec{o} = (0, 0, 0)$

$$\vec{a} + \vec{o} = (1, 2, 1) + (0, 0, 0) = (1, 2, 1) = \vec{a}$$

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{a} + \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$$

Výsledkem triviální lineární kombinace je nulový vektor, protože každý vektor po vynásobení nulou přejde na nulový vektor a součet nulových vektorů je opět nulový vektor.

Řádkové algebraické vektory.

$$\vec{a} = (1,2,1), \qquad \vec{b} = (3,0,-1), \qquad \vec{c} = (2,1,0), \qquad \vec{o} = (0,0,0)$$

$$\vec{a} + \vec{o} = (1,2,1) + (0,0,0) = (1,2,1) = \vec{a}$$

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} - 2 \cdot \vec{c} &= (1,2,1) + (3,0,-1) - (4,2,0) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Někdy nulový vektor dostaneme i jako netriviální lineární kombinaci. V tomto případě říkáme, že vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ jsou lineárně závislé.

Definice: Nechť je dána konečná posloupnost vektorů. Řekneme, že vektory jsou lineárně závislé, jestliže alespoň jedna jejich netriviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.

Naopak, je-li každá netriviální lineární kombinace nenulová, říkáme, že vektory jsou lineárně nezávislé.

Testování lineární (ne-)závislosti

- Je-li v posloupnosti vektorů některý vektor násobkem jiného vektoru, jedná se o lineárně závislou posloupnost vektorů.
- *Dva vektory* jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z vektorů je násobkem druhého.
- Je-li vektorů větší počet, než je dimenze prostoru, jsou tyto vektory lineárně závislé.

V ostatních případech nelze na otázku o případné lineární závislosti nebo nezávislosti vektorů dát okamžitou odpověď, ale je potřeba odpovídajícím způsobem rozhodnout, např. pomocí pojmu hodnost matice, který uvedeme později.

Sloupcové algebraické vektory

$$\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\4\\1\\-3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\5\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-4\\-6\end{pmatrix}$$

Používáme-li sloupcové vektory, je počítání poněkud přehlednější, protože sčítáme prvky, které leží ve "stejné výšce".

Definice (matice):

Maticí řádu $m \times n$ rozumíme schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} pro $i = 1..m$ a $j = 1..n$ jsou reálná čísla. Množinu všech matic řádu $m \times n$ označujeme symbolem $\mathbb{R}^{m\times n}$. Zkráceně zapisujeme též $A = (a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ nebo pouze $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$. Je-li $m = n$ nazývá se matice A *čtvercová matice*, jinak *obdélníková matice*. Je-li A čtvercová matice, nazýváme prvky tvaru a_{ii}, tj. prvky, jejichž řádkový a sloupcový index jsou stejné, *prvky hlavní diagonály*.

Definice (matice transponovaná)**:** Buď $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matice

$$A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

se nazývá *matice transponovaná k matici A*.

Transponujte matici A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- První sloupec transponované matice obsahuje prvky z prvního řádku matice původní.
- Totéž platí i pro všechny ostatní sloupce a řádky.
- Je-li $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- Je-li $A = (a_{ij})$, je $A^T = (a_{ji})$.

Definice (operace s maticemi):

- Buďte $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Součtem matic A a B* rozumíme matici $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Zapisujeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $t \in \mathbb{R}$. *Součinem čísla t a matice A* rozumíme matici $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, kde $d_{ij} = t.a_{ij}$. Zapisujeme $\mathbf{D} = \mathbf{tA}$.

Sečtěte matice a vynásobte reálným číslem.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Při sčítání sčítáme odpovídající komponenty zvlášť.
- Je-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$, pak $C = A + B$ je matice $C = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. (Za předpokladu, že matice A a B jsou stejného typu, tj. že mají stejný počet řádků a sloupců.)

Sečtěte matice a vynásobte reálným číslem.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 9 & 3 & -6 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Při násobení matice číslem násobíme každou položku matice samostatně.
- Je-li $A = (a_{ij})$ a $t \in \mathbb{R}$, pak $C = t \cdot A$ je matice $C = (t \cdot a_{ij})$.

Definice (maticový součin): $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$. *Součinem matic A a B (v tomto pořadí)* rozumíme matici $G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$, kde

$$g_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

pro všechna $i = 1..m$, $j = 1..p$. Zapisujeme $\mathbf{G} = \mathbf{AB}$ (v tomto pořadí).

Skalární součin vektorů Ze střední školy víte, že skalárním součinem vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i.$$

Přímo z definice součinu plyne, že maticový součin

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

je jiným zápisem téhož.

Vynásobte matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C, \quad c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

Vynásobte matice

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 3 & 2\cdot 4-1\cdot 2+2\cdot 1\\ 3\cdot 2+1\cdot(-1)-2\cdot 3 & 3\cdot 4+1\cdot 2-2\cdot 1\\ 2\cdot 2+0\cdot(-1)+1\cdot 3 & 2\cdot 4+0\cdot 2+1\cdot 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Na místě ij ve výsledné matici C je skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B. Uvedený maticový součin je tedy možno chápat jako šest skalárních součinů.

Vynásobte matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 3 & 2\cdot 4 - 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 2\cdot 3 & 3\cdot 4 + 1\cdot 2 - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 & 2\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -1 & 12 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vynásobte matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 3 & 2\cdot 4 - 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 2\cdot 3 & 3\cdot 4 + 1\cdot 2 - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 & 2\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -1 & 12 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{2} & \color{red}{4} \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \color{red}{2} & -1 & 2 \\ \color{red}{3} & 1 & -2 \\ \color{red}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \color{blue}{= \text{není definováno}}$$

Porovnejte následující maticový součin a lineární kombinaci vektorů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Porovnejte následující maticový součin a lineární kombinaci vektorů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} +2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Věta 1 (vlastnosti maticového součinu). Součin matic je asociativní a distributivní zprava i zleva vzhledem ke sčítání, tj. platí

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{(asociativita)}$$
$$A(B+C) = AB + AC \qquad \text{(levý distributivní zákon)}$$
$$(B+C)A = BA + CA \qquad \text{(pravý distributivní zákon)}$$

vždy, když tyto operace mají smysl.

Definice (jednotková matice): *Jednotkovou maticí řádu n* rozumíme čtvercovou matici typu $\mathbb{R}^{n\times n}$, která má v hlavní diagonále jedničky a mimo hlavní diagonálu nuly. Označujeme ji $\mathbf{I_n}$.

Příklad 1. Jednotková matice řádu 3 má tvar

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta 2 (vlastnost jednotkové matice). Buď A matice. Pak platí $IA = A$ a $AI = A$, vždy, když je tento součin definovaný.

Konec, pokračování zde.