Metoda per partes

Robert Mařík a Lenka Přibylová

6. března 2007

Obsah

Metoda per partes

Vypočtěte $\int (x+1) \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$

Funkce je součinem polynomu a logaritmické funkce $\rightarrow$ per partes.

$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x+1)\cdot \ln x \,\mathrm{d}x}$

$$\int (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \\ & \\ v' = x+1 & v = \end{array}}$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x+1$.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x+1)\cdot \ln x \, \mathrm{d}x}$$

$$\int (x+1)\ln x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{matrix} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{matrix}}$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x + 1$.

$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x+1)\cdot \ln x \,dx}$

$$\int (x+1)\ln x\,dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}}$$

$$= \ln x\left(\frac{x^2}{2}+x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)dx$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x+1$.

Vypočtěte $\int (x+1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x+1) \ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx$$

Roznásobíme závorku.

Vypočtěte $\int (x+1)\cdot \ln x \,\mathrm{d}x$

$$\int (x+1)\ln x \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + x\right) + c$$

Dokončíme integraci.

$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x+1)\cdot \ln x \,\mathrm{d}x}$

$$\int (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}}$$

$$= \ln x\left(\frac{x^2}{2}+x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \int \left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+x\right) + c$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \frac{1}{4}x^2 - x + c$$

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} u = x & u' = \\ & \\ v' = \sin x & v = \\ \hline \end{array}$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = x$ a $v' = \sin x$.

$\boxed{\text{Vypočtěte } \int x \sin x \, \mathrm{d}x}$

$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

kde $u = x$ a $v' = \sin x$.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int x \sin x \,\mathrm{d}x}$$

$$\int x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \,\mathrm{d}x$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \,\mathrm{d}x$$

kde $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

Upravíme.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int x \sin x \, \mathrm{d}x}$$

$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, \mathrm{d}x$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

Integruje druhou část: $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x$

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

Funkce je součinem polynomu a sinu $\rightarrow$ per partes.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x-2)\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = \\ & \\ v' = \sin(2x) & v = \end{array}}$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

kde $u = x-2$ a $v' = \sin(2x)$.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x-2)\cdot \sin(2x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array}}$$

Platí

$$v = \int v'(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x),$$

protože

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \qquad \text{a} \qquad \int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b).$$

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x-2)\cdot \sin(2x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}}$$

$$= (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x-2)\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{matrix} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}}$$

$$= (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

Vytkneme konstantu $\left(-\frac{1}{2}\right)$ z integrálu.

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}}$$

$$= (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) + c$$

Platí $\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, protože

$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$ a $\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}}$$

$$= (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) + c$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

Upravíme.

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$$

Jedná se o součin polynomu a funkce arkustangens.

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ & \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

Budeme integrovat metodou per partes. Budeme integrovat polynom a derivovat arkustangens.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int x \operatorname{arctg} x \, dx.}$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \quad = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$$

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ & \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

Racionální funkci, která není ryze lomená, dělíme:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) - 1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\text{Vypočtěte } \int x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ & \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} x \right) + c.$$

K dokončení zbývá integrovat jedničku a jeden parciální zlomek. To provedeme pomocí příslušných vzorců.

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int \ln x \, dx}$$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \\ & \\ v' = 1 & v = \end{array}}$$

Funkci je součinem polynomu a logaritmické funkce:

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx.$$

Integrujeme per partes při volbě $u = \ln x$ a $v' = 1$.

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} \hline u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = 1 & v = x \\ \hline \end{array}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$\int 1 \, dx = x$$

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int \ln x \, \mathrm{d}x}$$

$$\int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x$$

$$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

Užijeme vztah $\dfrac{1}{x} x = 1$.

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \boxed{\begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix}} = x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} \quad = x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

$$= x(\ln x - 1) + c$$

Hotovo.

Vícenásobná per partes

Vypočtěte $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \, \mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x \, \mathrm{d}x \quad \begin{array}{|ll|} u = x^2+1 & u' = \\ & \\ v' = \sin x & v = \end{array}$$

- Funkce je součinem polynomu a funkce sinus.
- Budeme integrovat per partes podle vzorce

$$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

při volbě $u = (x^2+1)$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$(x^2+1)' = 2x$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \, dx$

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x \, dx \qquad \begin{array}{|ll|} \hline u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \\ \hline \end{array}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x \cdot \cos x \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Konstantní násobek 2 a znaménko minus dáme před integrál.

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = \\ v' = \cos x & v = \end{array}}$$

Ještě jednou integrujeme per partes. Nyní $u = x$ a $v' = \cos x$.

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \, dx$

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x \cdot \cos x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$x' = 1$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x}$$

$$\int (x^2+1)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \quad \begin{array}{|ll|} \hline u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \\ \hline \end{array}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{|ll|} \hline u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \\ \hline \end{array}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cdot \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\Big(x\sin x - (-\cos x)\Big) + c$$

Integrujeme sinus: $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{matrix} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\Big(x\sin x - (-\cos x)\Big) + c$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + c$$

Upravíme.

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integruje součin polynomu a exponenciální funkce.

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

- Integrujeme per partes.
- Polynom budeme derivovat a exponencielu integrovat.
- Nezapomeňme, že $\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}$.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x.}$$

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$u = x^2+1$	$u' = 2x$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Vzorec je

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

.

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

- Opět polynom krát exponenciální funkce.
- Opět integrujeme per partes. Opět derivujeme polynom.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x.}$$

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \begin{array}{|ll|} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \\ \end{array}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \begin{array}{|ll|} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \\ \end{array}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

Vzorec pro červenou část je $\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$, zbytek zůstane.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x.}$$

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \begin{array}{|ll|} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \begin{array}{|ll|} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + c$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}$$

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + c = -e^{-x}(x^2+2x+3) + c,$$

Vytkneme $(-e^{-x})$.

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \\ & \\ v' = 1 & v = \end{array}}$$

- Je zde součin polynomu a druhé mocniny logaritmu.
- Upravíme funkci $\ln^2 x$ na součin $(1) \cdot (\ln^2 x)$ a integrujeme per partes při volbě $u = \ln^2 x$ a $v' = 1$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx$$

$u = \ln^2 x$	$u' = \dfrac{2\ln x}{x}$
$v' = 1$	$v = x$

$$(\ln^2 x)' = 2\ln x (\ln x)' = 2\ln x \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{matrix} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = \ln x & u' = \\ v' = 1 & v = \end{matrix}}$$

Tento trik již známe: Napíšeme funkci $\ln x$ jako součin $(1) \cdot \ln x$ a integrujeme per partes při volbě $u = \ln x$ a $v' = 1$.

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{matrix} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int \ln^2 x \, \mathrm{d}x}$$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, \mathrm{d}x \quad \begin{array}{|ll|} \hline u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \\ \hline \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{|ll|} \hline u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \\ \hline \end{array}$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x\right)$$

$$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

$\boxed{\text{Vypočtěte } \int \ln^2 x \, dx}$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int 1 \, dx\right)$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - x\right) + c$$

Dopočítáme integrál z jedničky.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int \ln^2 x \, \mathrm{d}x}$$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x\right)$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - x\right) + c$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$$

Upravíme. Hotovo.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx = \boxed{\begin{array}{l} u = x^3 \xrightarrow{\text{derivace}} 3x^2 \xrightarrow{\text{derivace}} 6x \xrightarrow{\text{derivace}} 6 \xrightarrow{\text{derivace}} 0 \\ \\ v' = \sin x \xrightarrow{\text{integrace}} -\cos x \xrightarrow{\text{integrace}} -\sin x \xrightarrow{\text{integrace}} \cos x \xrightarrow{\text{integrace}} \sin x \end{array}}$$

- Třikrát integrujeme per partes, ale všechno zapíšeme do jednoho schematu.
- Žlutá šipka reprezentuje derivování. Derivujeme až na nulu.
- Červená šipka reprezentuje integrování.

$$\boxed{\text{Najděte } \int x^3 \sin x \, dx.}$$

$$\int x^3 \sin x \, dx = \begin{array}{|ccccccccc|} \hline u = x^3 & & 3x^2 & & 6x & & 6 & & 0 \\ & \searrow^{\text{součin}} & & \searrow^{\text{součin}} & & \searrow^{\text{součin}} & & \searrow^{\text{součin}} & \\ v' = \sin x & & -\cos x & & -\sin x & & \cos x & & \sin x \\ \hline \end{array}$$

$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x + c$$

Násobíme ve směru šipek. Součinům ve směru žlutých šipek znaménko ponecháme, součinům ve směru červených šipek znaménko změníme a všechny součiny sečteme.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx = \boxed{\begin{array}{lllll} u = x^3 & 3x^2 & 6x & 6 & 0 \\ & & & & \\ v' = \sin x & -\cos x & -\sin x & \cos x & \sin x \end{array}}$$

$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x + c$$

$$= (-x^3 + 6x)\cos(x) + (3x^2 - 6)\sin x + c$$

Upravíme.

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\displaystyle\int (x^3+2)e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int (x^3+2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{l} u = x^3+2x \xrightarrow{\text{derivace}} 3x^2+2 \xrightarrow{\text{derivace}} 6x \xrightarrow{\text{derivace}} 6 \xrightarrow{\text{derivace}} 0 \\[2em] v' = e^{-x} \xrightarrow{\text{integrace}} -e^{-x} \xrightarrow{\text{integrace}} e^{-x} \xrightarrow{\text{integrace}} -e^{-x} \xrightarrow{\text{integrace}} e^{-x} \end{array}}$$

- Třikrát integrujeme per partes, ale všechno zapíšeme do jednoho schematu.
- Žlutá šipka reprezentuje derivování. Derivujeme až na nulu.
- Červená šipka reprezentuje integrování.

Najděte $\displaystyle\int (x^3+2)e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int (x^3+2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{lllll} u = x^3+2x & 3x^2+2 & 6x & 6 & 0 \\ & \text{součin} & \text{součin} & \text{součin} & \text{součin} \\ v' = e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^3+2x)e^{-x} - (3x^2+2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x} + c$$

Násobíme ve směru šipek. Součinům ve směru žlutých šipek znaménko ponecháme, součinům ve směru červených šipek znaménko změníme a všechny součiny sečteme.

Najděte $\int (x^3+2)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^3+2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{ccccc} u = x^3+2x & 3x^2+2 & 6x & 6 & 0 \\ & & & & \\ v' = e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^3+2x)e^{-x} - (3x^2+2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x} + c$$

$$= -e^{-x}(x^3+2x+3x^2+2+6x+6)+c$$

$$= -e^{-x}(x^3+3x^2+8x+8)+c$$

Upravíme.

Řešení pomocí rovnice

Vypočtěte $\int e^x \cos x \, dx$.

Vypočtěte $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$.

$$\int e^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$$

Integrujeme součin exponenciální a goniometrické funkce.

Vypočtěte $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

- Integrujeme per partes.
- Je jedno, jak zvolíme u a v'.

Vypočtěte $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Vzorec je

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int e^x \cos x \, dx.}$$

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

- Opět součin exponenciální a goniometrické funkce.
- Integrujeme per partes, nyní musíme zachovat stejnou volbu u a v'.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int e^x \cos x \, dx.}$$

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, dx \right)$$

Vzorec pro červenou část je $\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$, zbytek zůstane.

Vypočtěte $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$.

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Po dvou per partes jsme se dostali zpátky k integrálu, který chceme spočítat.

Vypočtěte $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c$$

Řěšíme jako rovnici s neznámým integrálem, proto jej převedeme na levou stranu. Připíšeme integrační konstantu.

Vypočtěte $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$.

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$2\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x + e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$$

Dělíme dvěma a dostáváme výsledek.

Konec