

Průběh funkce

Lenka Příbylová

7. března 2007

Obsah

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$	3
$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$	43
$y = \ln\left(\frac{x^2}{x + 2}\right)$	91
$y = (x + 1)e^x$	156

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x$$

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R};$$

Definiční obor je celá množina \mathbb{R} .

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

$$f(-x) = (-x)^3 + 4(-x)^2 + 5(-x) = -x^3 + 4x^2 - 5x \neq \pm f(x)$$

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

Dosadíme $x = 0$ do předpisu funkce $f(x)$ a dostaneme průsečík s osou y .

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

Řešením rovnice $y = 0$ dostaneme průsečík s osou x .

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

Vytkneme x . Součin je roven nule právě tehdy, když některý z činitelů je roven nule. Červený činitel dává triviální řešení, zelený činitel vede na kvadratickou rovnici.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$

Kvadratická rovnice $x^2 + 4x + 5 = 0$ nemá reálné řešení, protože diskriminant je záporný: $D = 16 - 20$.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$

Průsečík s osou x je jediný: $x = 0$.

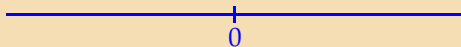
$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$



Na osu x zaneseme průsečík. Nemáme žádné body nespojitosti.

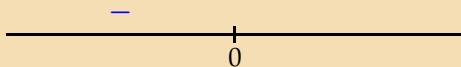
$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$



$$f(-1) = -1 + 4 - 5 = -2 < 0$$

Funkční hodnota $f(-1)$ je záporná a protože se znaménko na intervalu $(-\infty, 0)$ nemůže změnit, je funkce záporná na celém tomto intervalu.

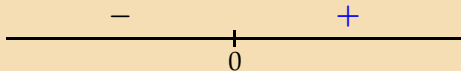
$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$



$$f(-1) = -1 + 4 - 5 = -2 < 0$$

$$f(1) = 10 > 0$$

Funkce je kladná v $x = 1$, tedy také na $(0, \infty)$.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

Vypočteme limity v $\pm\infty$. Začneme limitou v $+\infty$. Protože platí $\infty + \infty = \infty$, je výsledek zřejmý.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0,0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x$$

Pro $-\infty$ není výsledek na první pohled vidět, protože dostáváme neurčitý výraz $\infty - \infty$.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$$

Vytkneme-li nejvyšší mocninu x^3 , dostáváme

$$x^3 + 4x^2 + 5x = x^3 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right),$$

kde druhý činitel konverguje k jedné. Obecně platí pravidlo, že u polynomu (i racionální lomené funkce) se chování v nevlastních bodech nemění, jestliže zanedbáme členy s nižšími mocninami.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

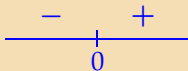
Asymptota bez směrnice neexistuje, protože je funkce definovaná na celém \mathbb{R} . Asymptota se směrnicí také neexistuje, protože

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 + 4x + 5 = \infty.$$

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

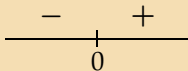
$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty$;



$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;



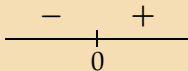
$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)'$$

Vyšetříme chování derivace.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty$;



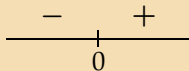
$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

Derivujeme každý člen zvlášť.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;



$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

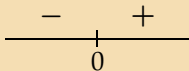
$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

Hledáme stacionární body, proto položíme derivaci rovnu nule.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;



$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

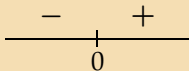
$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6}$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;



$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6}$$

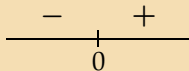
$$x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = -1$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

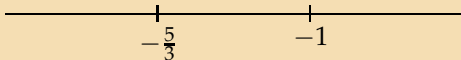
$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$



$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



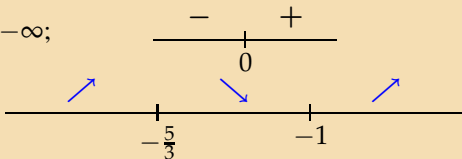
Na reálnou osu zaneseme stacionární body. Nemáme žádné body nespojitosti.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

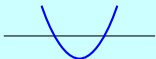
průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



Graf derivace je parabola:



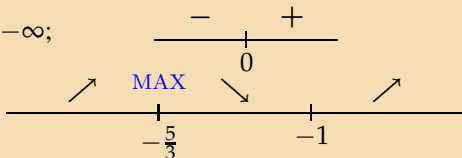
$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$

$$f(-5/3) = -\frac{50}{27}$$



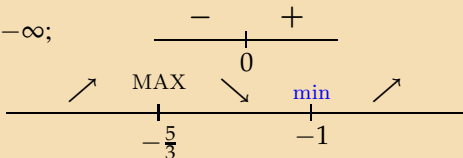
Ve stacionárním bodě $x = -\frac{5}{3}$ nastává lokální maximum. Dopočteme v tomto bodě funkční hodnotu.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

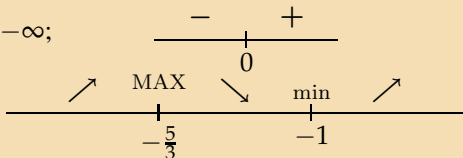
Ve stacionárním bodě $x = -1$ nastává lokální minimum. Dopočteme v tomto bodě funkční hodnotu.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8$$

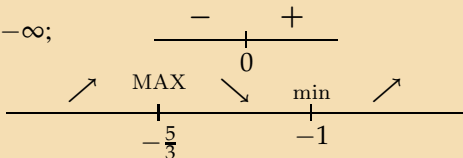
Spočteme druhou derivaci a vyšetříme její chování.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8$$

$$6x + 8 = 0$$

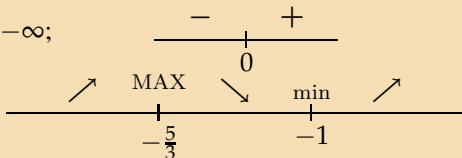
Položíme druhou derivaci nule.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0, 0]$

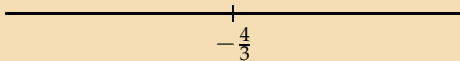
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8;$$



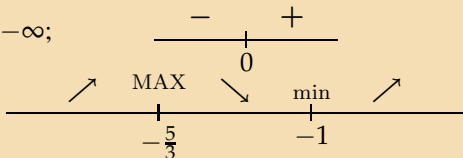
Nakreslíme reálnou osu s kritickým bodem. Nemáme žádný bod nespojitosti, proto se druhá derivace může měnit pouze v inflexním bodě.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0,0]$

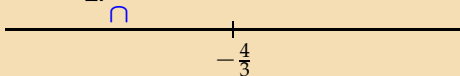
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8;$$



Funkce ke na intervalu $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ konkávní, protože

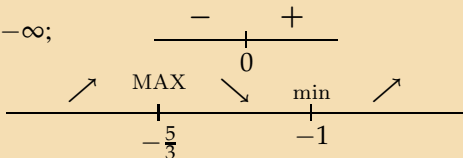
$$-2 \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \quad \text{a} \quad y''(-2) = 6 \cdot (-2) + 8 = -4 < 0.$$

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0, 0]$

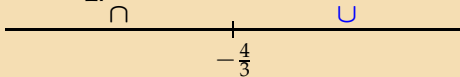
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8;$$



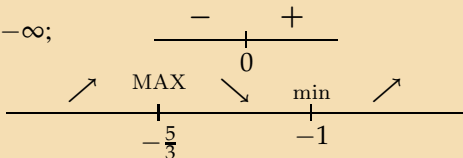
Funkce je konvexní na intervalu $\left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$, protože $0 \in \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$ a $y''(0) = 8 > 0$.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou y je $[0, 0]$

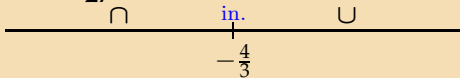
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



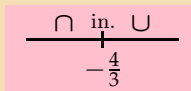
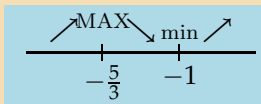
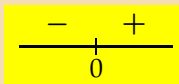
$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8;$$



$$f(-4/3) = -\frac{52}{27}$$

Bod $x = -\frac{4}{3}$ je tedy inflexní. Spočteme jeho funkční hodnotu.



$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

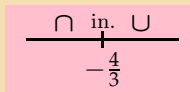
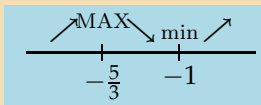
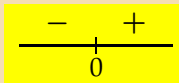
$$f(-\infty) = -\infty$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Shrňeme dosažené výpočty.



$$f(0) = 0$$

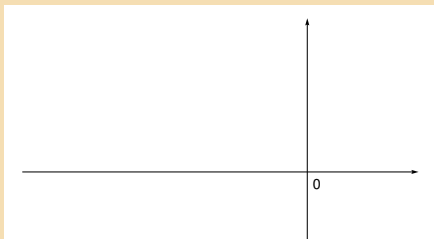
$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = -\infty$$

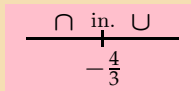
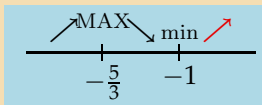
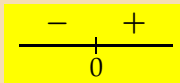
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



Nakreslíme souřadný systém.



$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = -\infty$$

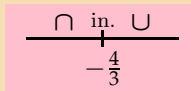
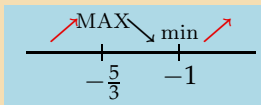
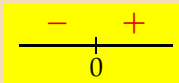
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Označíme průsečík s osou x : $x = 0$. Funkce v tomto bodě roste.





$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

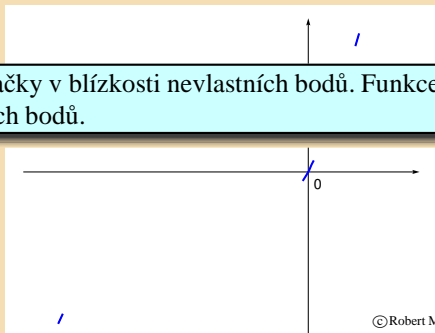
$$f(-\infty) = -\infty$$

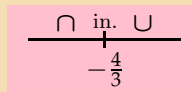
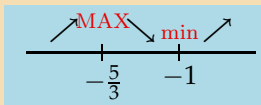
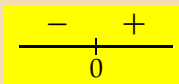
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Nakreslíme značky v blízkosti nevlastních bodů. Funkce roste v okolí obou nevlastních bodů.





$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

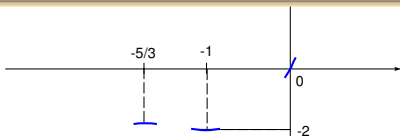
$$f(-\infty) = -\infty$$

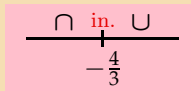
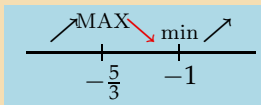
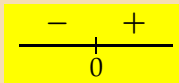
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Nakreslíme lokální minimum a maximum.





$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

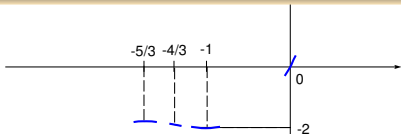
$$f(-\infty) = -\infty$$

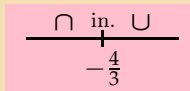
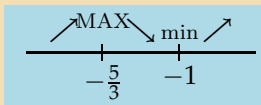
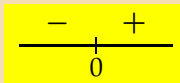
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Nakreslíme inflexní bod. Funkce v něm klesá.





$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

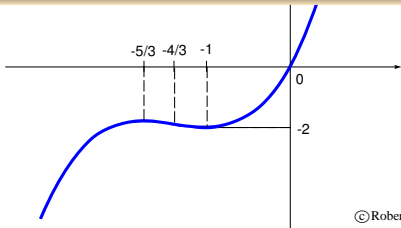
$$f(-\infty) = -\infty$$

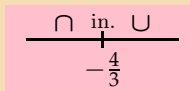
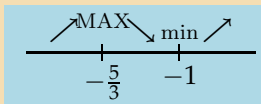
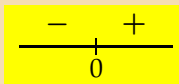
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Spojíme nakreslené části do grafu.





$$f(0) = 0$$

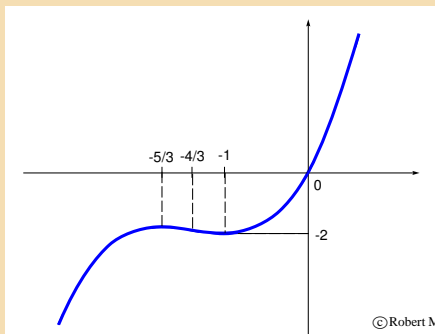
$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = -\infty$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

Určíme definiční obor z podmínky

$$x - 1 \neq 0.$$

Platí

$$x \neq 1.$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

$$y(0) = \frac{2(0 - 0 + 1)}{(0 - 1)^2} = 2$$

- Určíme průsečík s osou y .
- Dosadíme $x = 0$ a hledáme $y(0)$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2,$$

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = 0$$

- Určíme průsečík s osou x .
- Dosadíme $y = 0$ a řešíme rovnici

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2,$$

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Čitatel musí být nula.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = 0$$

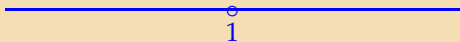
$$x^2 - x + 1 = 0$$

Tato kvadratická rovnice nemá řešení, protože má záporný diskriminant.

$$D = b^2 - 4ac = 2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -2 < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

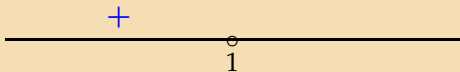
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x



Nakreslíme osu x a bod nespojitosti $x = 1$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

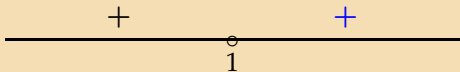
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x



Víme, že $y(0) = 2 > 0$. Funkce je kladná na $(-\infty, 1)$.

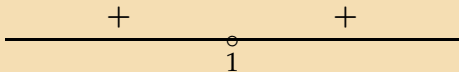
$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x



Vypočteme $y(2) = \frac{2(4 - 2 + 1)}{(2 - 1)^2} > 0$. Funkce je kladná na $(1, \infty)$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

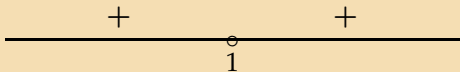


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

Ur\u010d\u00edme jednostrann\u00e9 limity v bod\u011b nespojitosti

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

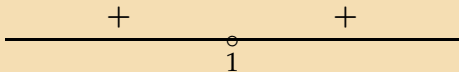


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{0} \right\|$$

Dosadíme $x = 1$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

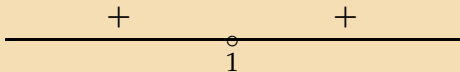


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

Jmenovatel je v obou případech kladné číslo.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$



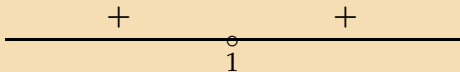
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

Ur\u010d\u00edme limity v $\pm\infty$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$



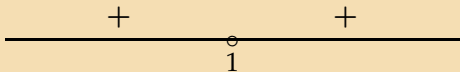
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} =$$

Uvažujeme jenom vedoucí členy.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u00fas. s osou } x$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1} = 2$$

Funkce má limitu v $\pm\infty$. P\u0159\u00edmka $y = 2$ je asymptotou ke grafu v $\pm\infty$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u00fas. s osou } x$$

$$y' = 2 \left(\frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)'$$

Vypo\u010dteme derivaci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left(\frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \end{aligned}$$

- Užijeme vzorec pro derivaci podílu. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Užijeme vzorec pro derivaci složené funkce při derivování výrazu $(x - 1)^2$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left(\frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \\ &= 2(x - 1) \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)2}{(x - 1)^4} \end{aligned}$$

Vytkneme $(x - 1)$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left(\frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \\ &= 2(x - 1) \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)2}{(x - 1)^4} \\ &= 2 \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

Rozn\u00e1sob\u00edme z\u00e1vorky a zkrát\u00edme $(x - 1)$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u00fas. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left(\frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \\ &= 2(x - 1) \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)2}{(x - 1)^4} \\ &= 2 \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^3} \\ &= 2 \frac{-x - 1}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left(\frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \\ &= 2(x - 1) \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)2}{(x - 1)^4} \\ &= 2 \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^3} \\ &= 2 \frac{-x - 1}{(x - 1)^3} = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3},$$

$$-2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3} = 0$$

Řešíme rovnici $y' = 0$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3},$$

$$-2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3} = 0$$

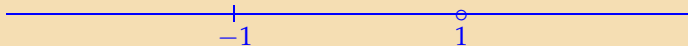
$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Čitatel musí být nula. Stacionárním bodem je tedy $x = -1$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1$$



Zakreslíme stacionární bod a bod nespojitosti.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1$$

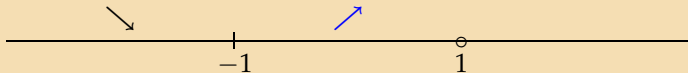


Určíme $y'(-2)$.

$$y'(-2) = -2 \frac{-2 + 1}{(-2 - 1)^3} = -2 \frac{\text{záporná hodnota}}{\text{záporná hodnota}} < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1$$

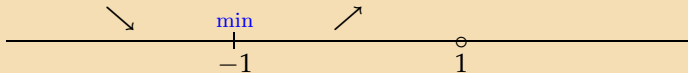


Určíme $y'(0)$.

$$y'(0) = -2 \frac{0 + 1}{(0 - 1)^3} = -2 \frac{\text{kladná hodnota}}{\text{záporná hodnota}} > 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

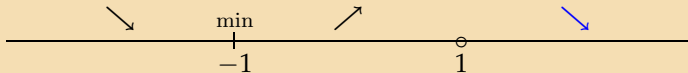


Lokální minimum pro $x = -1$. Funkční hodnota je

$$y(-1) = \frac{2((-1)^2 - (-1) + 1)}{(-1 - 1)^2} = \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$



$$y'(2) = -2 \frac{2 + 1}{(2 - 1)^3} = -2 \frac{3}{1} < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = -2 \left(\frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)'$$

Vypočteme druhou derivaci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \left(\frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)' \\ &= -2 \frac{1(x - 1)^3 - (x + 1)3(x - 1)^2(1 - 0)}{((x - 1)^3)^2} \end{aligned}$$

- Použijeme pravidlo pro derivaci podílu.
- Jmenovatel budeme derivovat jako složenou funkci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \left(\frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)' \\ &= -2 \frac{1(x - 1)^3 - (x + 1)3(x - 1)^2(1 - 0)}{((x - 1)^3)^2} \\ &= -2(x - 1)^2 \frac{(x - 1) - (x + 1)3}{(x - 1)^6} \end{aligned}$$

Vytkneme $(x - 1)^2$ v \u010ditateli.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u00fas. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \left(\frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)' \\ &= -2 \frac{1(x - 1)^3 - (x + 1)3(x - 1)^2(1 - 0)}{((x - 1)^3)^2} \\ &= -2(x - 1)^2 \frac{(x - 1) - (x + 1)3}{(x - 1)^6} \\ &= -2 \frac{-2x - 4}{(x - 1)^4} \end{aligned}$$

Uprav\u00edme.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \left(\frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)' \\ &= -2 \frac{1(x - 1)^3 - (x + 1)3(x - 1)^2(1 - 0)}{((x - 1)^3)^2} \\ &= -2(x - 1)^2 \frac{(x - 1) - (x + 1)3}{(x - 1)^6} \\ &= -2 \frac{-2x - 4}{(x - 1)^4} = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4} \end{aligned}$$

Obdrželi jsme druhou derivaci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4},$$

$$4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4} = 0$$

Řešíme $y'' = 0$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

$$4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4} = 0$$

$$x + 2 = 0$$

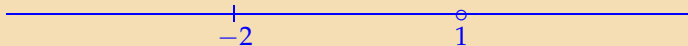
$$x = -2$$

Jedin\u00e9 \u0159e\u0161en\u00ed je $x = -2$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

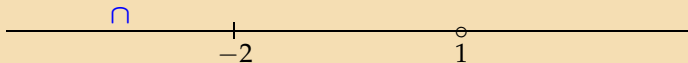


Určíme intervaly konvexnosti a konkavity.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

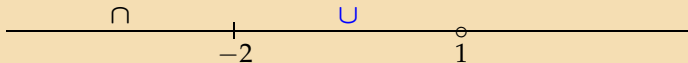


$$y''(-3) = 4 \frac{-3 + 2}{\text{kladná hodnota}} < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

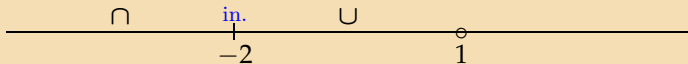


$$y''(0) = 4 \frac{0 + 2}{\text{kladná hodnota}} > 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$



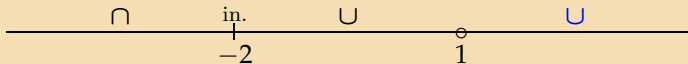
Inflexní bod v bodě $x = -2$. Funkční hodnota je

$$y(-2) = \frac{14}{9}.$$

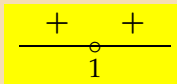
$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

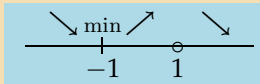


$$y''(2) = 4 \frac{2 + 1}{\text{kladná hodnota}} > 0$$



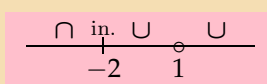
$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$



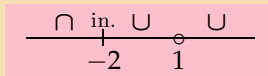
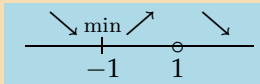
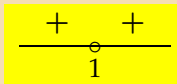
$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$



$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

Shrneme dosavadní znalosti.



$$f(0) = 2$$

$$f(1\pm) = +\infty$$

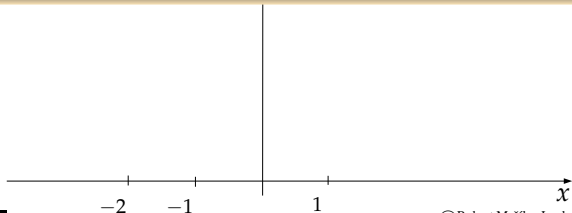
$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

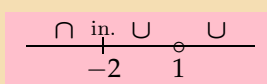
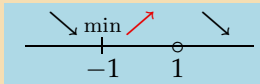
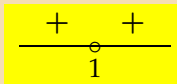
$$f(\pm\infty) = 2$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

y

Nakreslíme souřadnou soustavu.





$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

y

Vyznačíme průsečík s osou y .

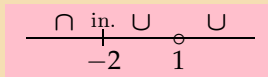
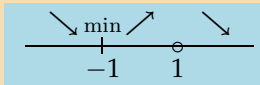
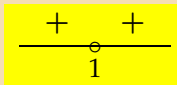
2

-2

-1

1

x



$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

y

Funkce v tomto bodě roste.

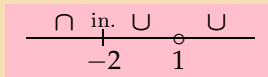
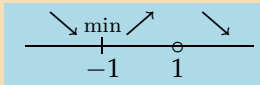
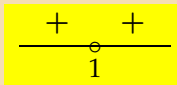
2

-2

-1

1

x



$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

y

A coordinate system with a vertical dashed line at x=1 representing a vertical asymptote. The y-axis has a tick mark at 2. The x-axis has tick marks at -2, -1, and 1. A light blue box with the text 'Nakreslíme funkci v okolí svislé asymptoty.' is overlaid on the graph.

Nakreslíme funkci v okolí svislé asymptoty.

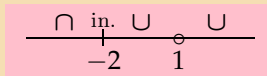
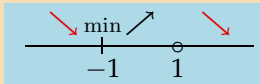
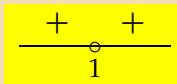
2

-2

-1

1

x



$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

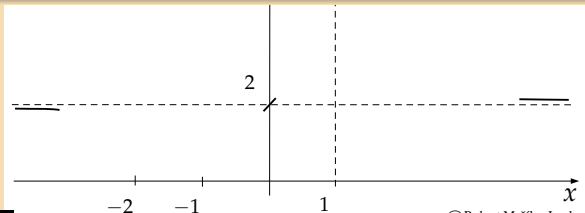
$$f(1\pm) = +\infty$$

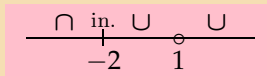
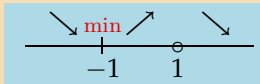
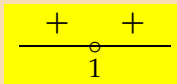
$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$



Nakreslíme funkci v okolí vodorovné asymptoty.





$$f(0) = 2$$

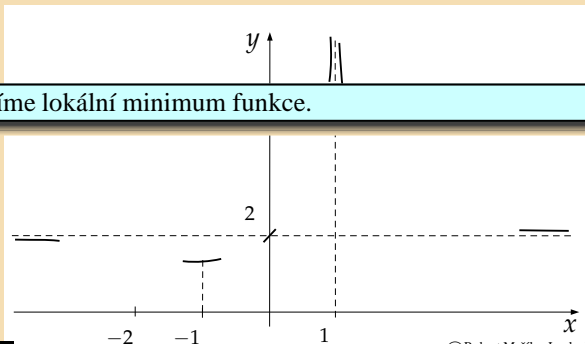
$$f(\pm\infty) = 2$$

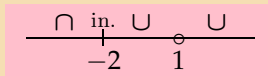
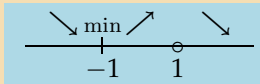
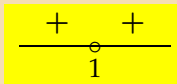
$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

Nakreslíme lokální minimum funkce.





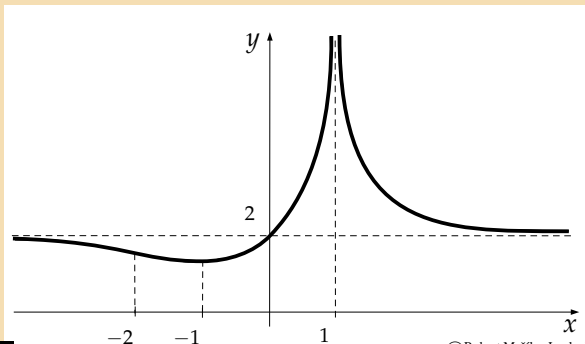
$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$



$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty);$$

Funkce $y(x)$ je definována pro $x + 2 \neq 0$ a $\frac{x^2}{x+2} > 0$.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

Plyne z nesymetričnosti definičního oboru.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0$$

Hledáme průsečíky s osou x .

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0$$

Položíme funkci $y(x)$ rovnu 0 .

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

Odlogaritmováním dostaneme kvadratickou rovnici.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

Vynásobíme jmenovatelem $x + 2$

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

a převedeme na levou stranu.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

Podle vzorce vypočítáme kořeny.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_1 = 2 \in D(f)$$

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

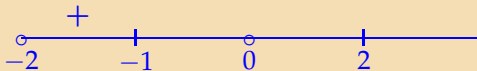
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_1 = 2 \in D(f)$$

$$x_2 = -1 \in D(f)$$

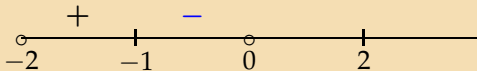
Oba leží v definičním oboru funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$



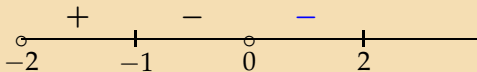
Na reálnou osu nanese se nulové body a body, kde funkce není definována

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$



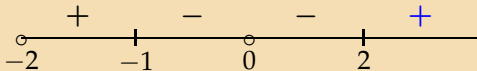
a dosazením bodů z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$



a dosazením bodů z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$



a dosazením bodů z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkce.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

Vypočteme limitu funkce v $+\infty$

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

Podle věty o limitě složené funkce zaměníme pořadí limity a logaritmu.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1}$$

Pro řešení limity použijeme např. L'Hospitalovo pravidlo.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

Funkce $\ln x$ pro $x \rightarrow \infty$ diverguje.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

Asymptotu se směrnicí pro $x \rightarrow \infty$ spočteme později, protože pro výpočet

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^2}{x+2}}{x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Čítec budeme stejně derivovat pro získání stacionárních bodů.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

Chování funkce na levém okraji definičního oboru určíme výpočtem limity funkce v bodě -2 zprava.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

Zaměníme pořadí limity a logaritmu,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4}{x+2}$$

částečně dosadíme a

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) &= \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{4}{x+2} \\ &= \ln \left\| \frac{4}{0+} \right\| \end{aligned}$$

dostáváme limitu typu $\left\| \frac{4}{0+} \right\|$,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \|\ln(\infty)\| = \infty$$

což je nekonečno.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$x \lim_{x \rightarrow -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \|\ln(\infty)\| = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Chování funkce v okolí dalšího nedefinovaného bodu 0 určíme výpočtem limity funkce v bodě 0 zprava a zleva.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$x \lim_{x \rightarrow -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \|\ln(\infty)\| = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Zaměníme pořadí limity a logaritmu,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$x \lim_{x \rightarrow -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \|\ln(\infty)\| = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \frac{x^2}{2}$$

částečně dosadíme a

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$x \lim_{x \rightarrow -2+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \ln \left\| \frac{4}{0+} \right\| = \|\ln(\infty)\| = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \frac{x^2}{2} = \ln \left\| \frac{0+}{2} \right\|$$

v obou případech dostáváme typ $\left\| \frac{0+}{2} \right\|$,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$x \lim_{x \rightarrow -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \|\ln(\infty)\| = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \frac{x^2}{2} = \ln \left\| \frac{0_{\pm}}{2} \right\| = -\infty$$

proto lze dosadit do logaritmu, který je definován pouze pro pravé okolí nuly.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2}$$

Funkce $y(x)$ je složená, proto nejdříve derivujeme vnější složku

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2}$$

a násobíme derivací vnitřní složky. Tu derivujeme jako podíl.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{x^2 + 4x}{x+2} \end{aligned}$$

Zelené části se zkrátí,

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{x^2 + 4x}{x+2} \\ &= \frac{x(x+4)}{x^2(x+2)} \end{aligned}$$

v čitateli vytkneme x

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{x^2 + 4x}{x+2} \\ &= \frac{x(x+4)}{x^2(x+2)} \\ &= \frac{x+4}{x(x+2)} \end{aligned}$$

a zkrátíme.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

Máme derivaci a než budeme počítat stacionární body, vrátíme se k výpočtu asymptoty se směrnici:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+4}{x(x+2)}}{1} = 0.$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x+2} = \infty.$$

Asymptota se směrnici neexistuje.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

Hledáme stacionární body.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = 0$$

Dosadíme vypočtenou derivaci funkce.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = 0$$

$$x+4 = 0$$

Zlomek je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeho čítel.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = 0$$

$$x+4 = 0$$

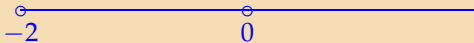
$$x = -4 \notin D(f)$$

Vypočtená hodnota neleží v definičním oboru funkce, proto funkce nemá žádný stacionární bod.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

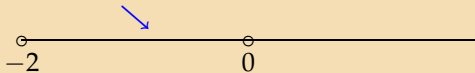


Znaménko derivace se tedy může měnit jen v bodech, kde není definována.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

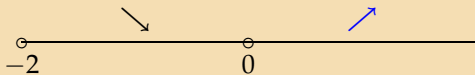


Do červeně označené derivace dosadíme body z jednotlivých intervalů. Kladné znaménko znamená, že zde funkce roste, záporné, že klesá.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$



Do červeně označené derivace dosadíme body z jednotlivých intervalů. Kladné znaménko znamená, že zde funkce roste, záporné, že klesá.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y'' = \left(\frac{x+4}{x(x+2)} \right)'$$

Druhou derivaci dostaneme derivací první,

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x+4}{x(x+2)} \right)' \\ &= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

kterou derivujeme jako podíl.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x+4}{x(x+2)} \right)' \\ &= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2x^2 - 8x - 2x - 8}{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

V čitateli nelze nic vytknout, proto jej roznásobíme

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x+4}{x(x+2)} \right)' \\ &= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2x^2 - 8x - 2x - 8}{x^2(x+2)^2} \\ &= -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

a příslušné mocniny sečteme.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$y'' = 0$$

Hledáme inflexní body.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

Dosadíme vypočtenou druhou derivaci funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

$$x^2+8x+8 = 0$$

Zlomek je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeho čítenel.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

$$x^2+8x+8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2}$$

Podle vzorce vypočítáme kořeny kvadratické rovnice.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

$$x^2+8x+8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{2}$$

$$x_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{2}$$

Upravíme.

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

x_1 není inflexní bod, protože neleží v definičním oboru funkce,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$

x_2 leží v definičním oboru funkce.

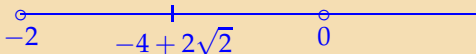
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



Znaménko druhé derivace se tedy může měnit jen v bodech, kde není definována a v bodě x_2 .

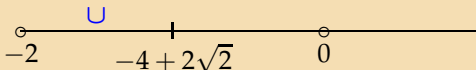
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



Do červeně označené druhé derivace dosadíme body z jednotlivých intervalů. Kladné znaménko znamená, že je zde funkce konvexní, záporné, že je konkávní.

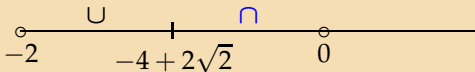
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



funkce se v x_2 mění z konvexní na konkávní,

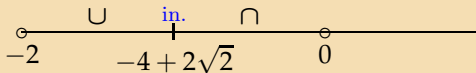
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



x_2 je proto inflexním bodem,

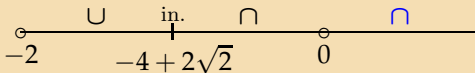
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

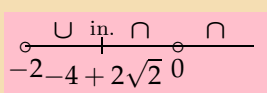
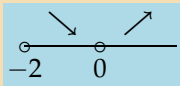
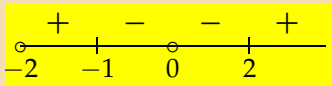
$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$





$$f(-1) = 0$$

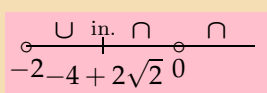
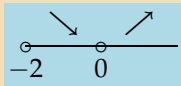
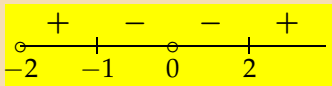
$$f(2) = 0$$

$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$

Vypíšeme nejdůležitější výsledky.



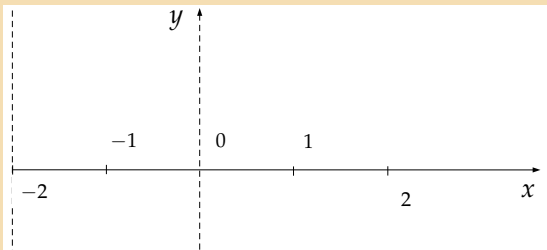
$$f(-1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

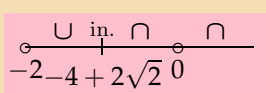
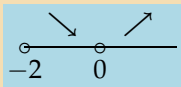
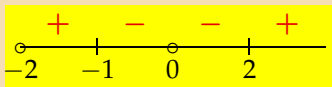
$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$



Zakreslíme souřadný systém. Pro hodnoty menší nebo rovny -2 a v 0 funkce není definována.



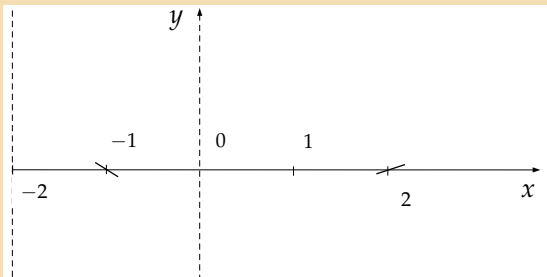
$$f(-1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

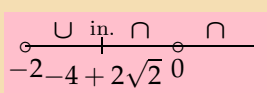
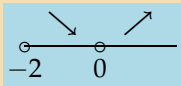
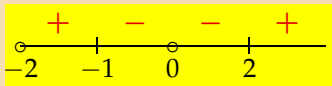
$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$



Vyznačíme průsečíky s osou x . Funkce klesá v bodě -1 a roste v bodě 2 .



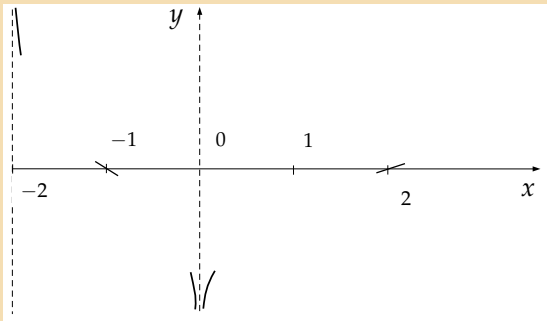
$$f(-1) = 0$$

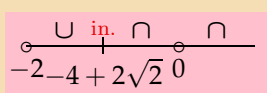
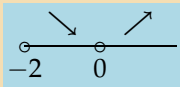
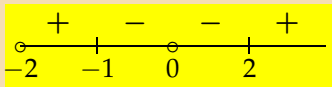
$$f(2) = 0$$

$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$





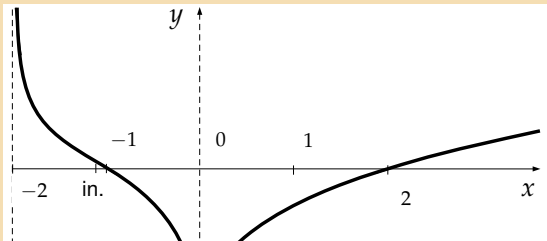
$$f(-1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

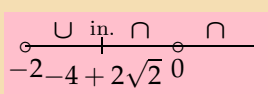
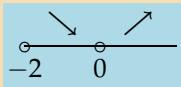
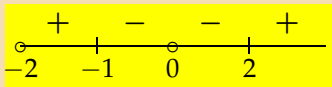
$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$



Vyznačíme inflexní bod a spojíme graf.



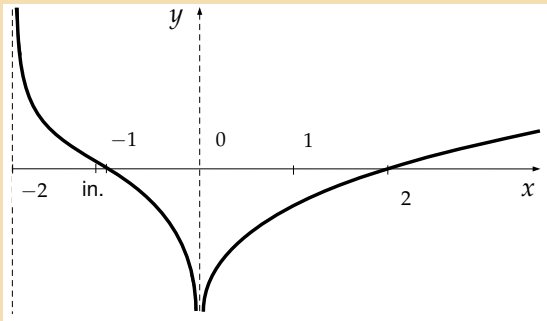
$$f(-1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$



$$y = (x + 1)e^x$$

$$y = (x + 1)e^x \quad D(f) = \mathbb{R};$$

Definiční obor je celá množina \mathbb{R} .

$$y = (x + 1)e^x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ průsečík s osou } y \text{ je } [0, 1],$$

Dosadíme $x = 0$ do předpisu funkce $f(x)$ a dostaneme průsečík s osou y .

$$y = (x + 1)e^x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ průsečík s osou } y \text{ je } [0, 1],$$

$$(x + 1)e^x = 0$$

Řešením rovnice $y = 0$ dostaneme průsečík s osou x .

$$y = (x + 1)e^x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ průsečík s osou } y \text{ je } [0, 1],$$

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

- Součin je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeden z činitelů.
- Činitel e^x je vždy kladné číslo.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Průsečík s osou x je $x = -1$.

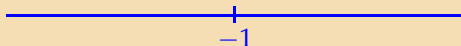
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$



- Na osu x zaneseme průsečík.
- Nemáme žádné body nespojitosti.

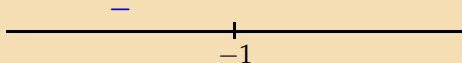
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$



$$f(-2) = (-2 + 1) \cdot e^{-2} = -e^{-2} < 0$$

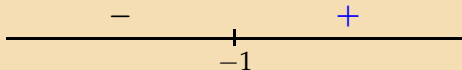
Funkční hodnota $f(-2)$ je záporná a protože se znaménko na intervalu $(-\infty, -1)$ nemůže změnit, je funkce záporná na celém tomto intervalu.

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$



$$f(-2) = (-2 + 1) \cdot e^{-2} = -e^{-2} < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

Funkce je kladná v $x = 0$, tedy také na $(-1, \infty)$.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

- Vypočteme limity v $\pm\infty$. Začneme limitou v $+\infty$.
- Platí $\infty + 1 = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

Vypočteme limitu v $-\infty$. "Dosadíme" $x = -\infty$ a dostaneme $-\infty + 1 = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Dostáváme neurčitý výraz $0 \times \infty$. K výpočtu tedy musíme použít jinou metodu.

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

- Přepíšeme výraz na zlomek $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$. Limita je ve tvaru, kdy je možno použít L'Hospitalovo pravidlo.

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}}$$

Použijeme L'Hospitalovo pravidlo (derivujeme zvlášť čitatel a jmenovatel). Funkci e^{-x} derivujeme jako složenou: $(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x} \cdot (-1)$

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x$$

Zjednodušíme.

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

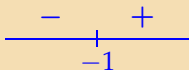
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = -e^{-\infty} = 0$$

Dosadíme. Z grafu funkce vidíme, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$.

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou

y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

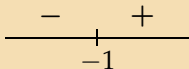


Vyšetříme chování derivace.

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou

y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;



$$y' = (x + 1)' \cdot e^x + (x + 1) \cdot (e^x)'$$

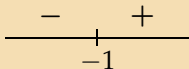
Funkci $y = (x + 1) \cdot e^x$ derivujeme jako součin:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

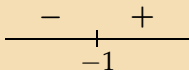


$$\begin{aligned} y' &= (x + 1)' \cdot e^x + (x + 1) \cdot (e^x)' \\ &= 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x \end{aligned}$$

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou

y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;



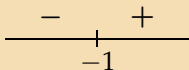
$$\begin{aligned}y' &= (x + 1)' \cdot e^x + (x + 1) \cdot (e^x)' \\ &= 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x \\ &= e^x(1 + x + 1)\end{aligned}$$

Vytkneme e^x .

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$\begin{aligned}y' &= (x + 1)' \cdot e^x + (x + 1) \cdot (e^x)' \\&= 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x \\&= e^x(1 + x + 1) \\&= e^x(x + 2)\end{aligned}$$

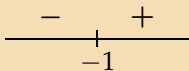
Zjednodušíme.

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou

y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$y' = e^x(x + 2)$;

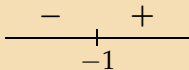


Dostáváme derivaci.

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou

y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;



$y' = e^x(x + 2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

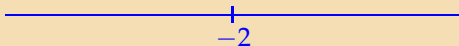
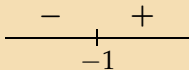
- Derivace je rovna nule právě tehdy, když $(x + 2) = 0$, jelikož $e^x \neq 0$. Dostáváme stacionární bod $x = -2$.
- Dosadíme $f(-2) = (-2 + 1)e^{-2} = -e^{-2}$ a s pomocí kalkulačtoru dostaneme $f(-2) \doteq -0.14$.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$

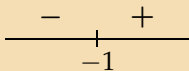


Na reálnou osu zaneseme stacionární bod. Nemáme žádné body nespojitosti.

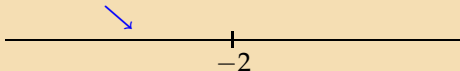
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



Zvolíme např. $x = -3$ a dosadíme do první derivace:

$$y'(-3) = e^{-3}(-3 + 2) = -e^{-3} < 0. \text{ Funkce v bodě } x = -3 \text{ klesá a}$$

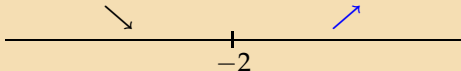
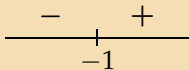
totéž platí na celém intervalu $(-\infty, -2)$.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



Dosazením $x = 0$ do první derivace máme

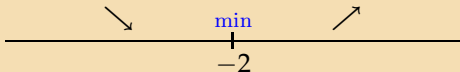
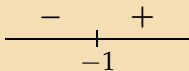
$y'(0) = e^0(0 + 2) = 2 > 0$. Funkce v bodě roste $x = 0$ a to také platí na celém intervalu $(-2, \infty)$.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



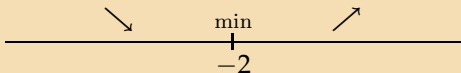
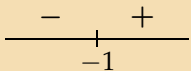
V bodě $x = -2$ má funkce lokální minimum.

$y = (x + 1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou

y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$y' = e^x(x + 2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$



$$y'' = e^x \cdot (x + 2) + e^x \cdot 1$$

Spočteme y'' . Derivujeme $y' = e^x \cdot (x + 2)$ jako součin

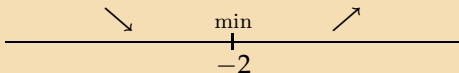
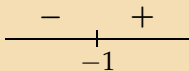
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$\begin{aligned} y'' &= e^x \cdot (x + 2) + e^x \cdot 1 \\ &= e^x(x + 2 + 1) \\ &= e^x(x + 3) \end{aligned}$$

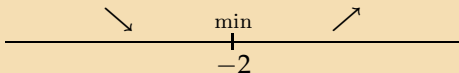
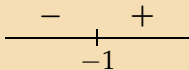
Zjednodušíme.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3);$$

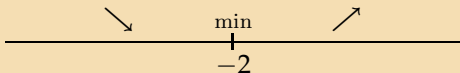
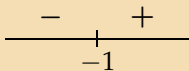
Máme druhou derivaci.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3); \quad y'' = 0 \text{ pro } x = -3, \quad f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$$

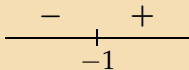
Hledáme bod, ve kterém platí $y'' = 0$. Protože e^x je vždy různá od nuly, musí platit $(x + 3) = 0$, proto $x = -3$.

$$f(-3) = (-3 + 1)e^{-3} = -2e^{-3} \doteq -0.01$$

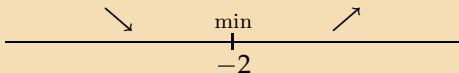
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

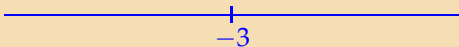
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3); \quad y'' = 0 \text{ pro } x = -3, \quad f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$$



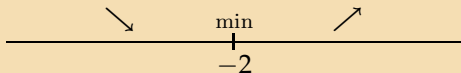
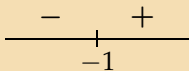
Nakreslíme reálnou osu s kritickým bodem. Nemáme žádný bod nespojitosti, proto se druhá derivace může měnit pouze v bodě $x = -3$.

$$y = (x + 1)e^x$$

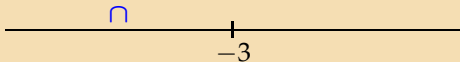
$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3); \quad y'' = 0 \text{ pro } x = -3, \quad f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$$

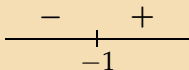


Funkce ke na intervalu $(-\infty, -3)$ konkávní, protože $-4 \in (-\infty, -3)$
a $y''(-4) = e^{-4}(-4 + 3) = -e^{-4} < 0$.

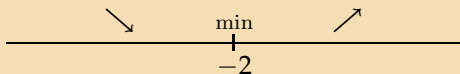
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

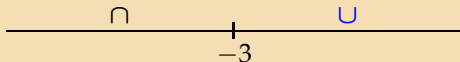
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3); \quad y'' = 0 \text{ pro } x = -3, \quad f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$$



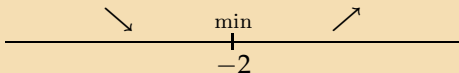
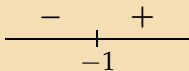
Funkce je konvexní na intervalu $(-3, \infty)$, protože $-2 \in (-3, \infty)$ a v bodě $x = -2$ je lok. minimum a $y''(-2) = e^{-2}(-2 + 3) = e^{-2} > 0$.

$$y = (x + 1)e^x$$

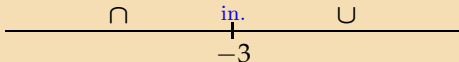
$D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou x je $[-1, 0]$,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

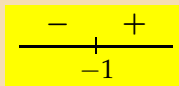
$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3); \quad y'' = 0 \text{ pro } x = -3, \quad f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$$

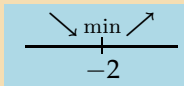


Bod $x = -3$ je tedy inflexní.



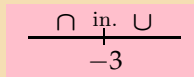
$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$



$$f(-2) \doteq -0.14$$

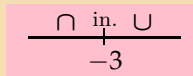
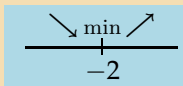
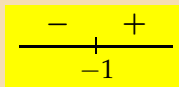
$$f(-3) \doteq -0.01$$



$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Shrňeme dosažené vypočty.



$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

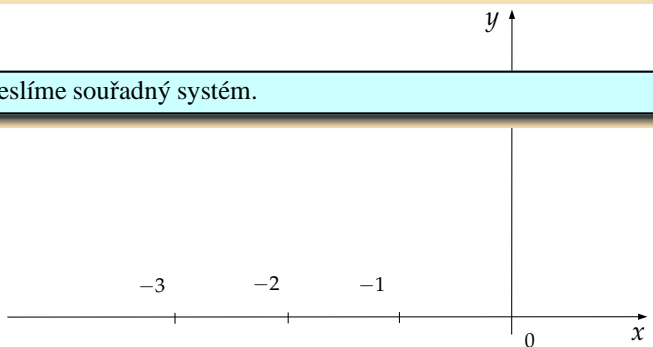
$$f(-2) \doteq -0.14$$

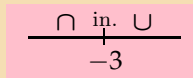
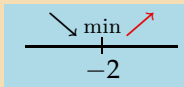
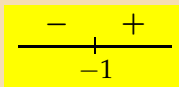
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Nakreslíme souřadný systém.





$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

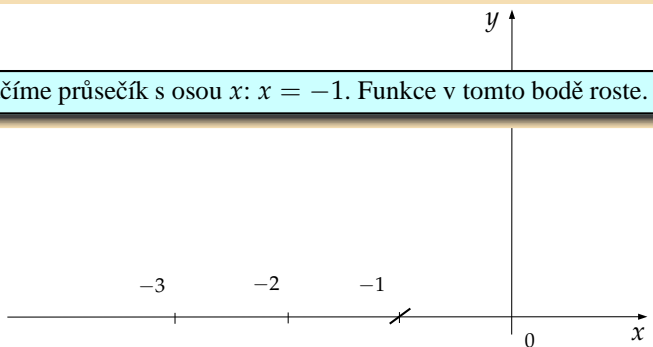
$$f(-2) \doteq -0.14$$

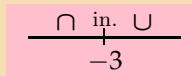
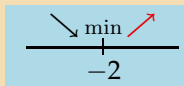
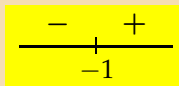
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Označíme průsečík s osou x : $x = -1$. Funkce v tomto bodě roste.





$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

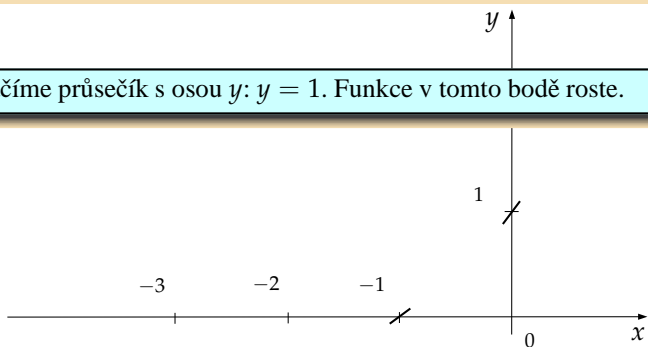
$$f(-2) \doteq -0.14$$

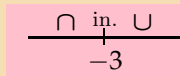
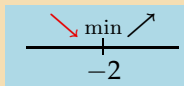
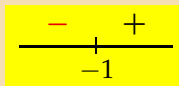
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Označíme průsečík s osou y : $y = 1$. Funkce v tomto bodě roste.





$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

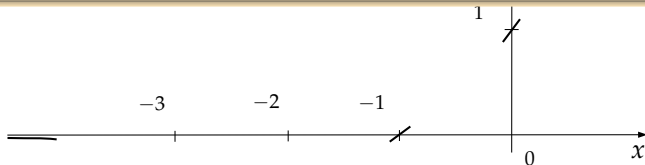
$$f(-2) \doteq -0.14$$

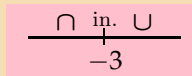
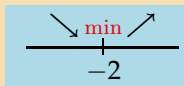
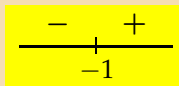
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Nakreslíme značky v blízkosti asymptoty v $-\infty$. Je třeba si uvědomit, že v blízkosti $-\infty$ je funkce záporná a klesající, proto bude graf pod asymptotou.





$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

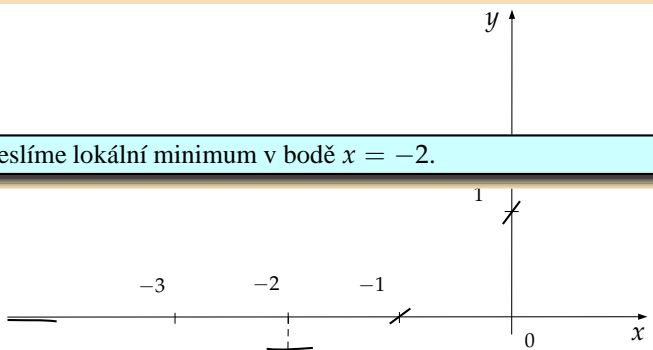
$$f(-2) \doteq -0.14$$

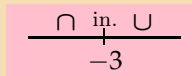
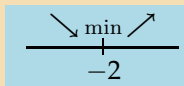
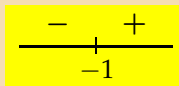
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Nakreslíme lokální minimum v bodě $x = -2$.



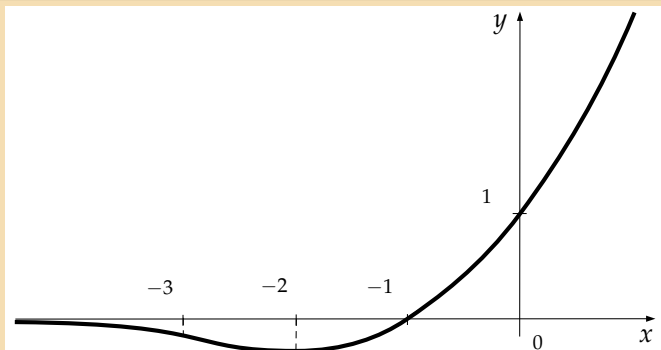


$$f(0) = 1$$

$$f(-2) \doteq -0.14$$

$$f(+\infty) = \infty$$

Spojíme nakreslené části do grafu.



KONEC