Integrace rac. lomené funkce typu $$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Robert Mařík a Lenka Přibylová

6. března 2007

Obsah

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \quad \frac{x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

- Derivace jmenovatele je $2x$, v čitateli však není násobek této funkce.
- Vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ nelze přímo použít.
- Rozdělíme zlomek na dva.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

- V prvním zlomku je v čitateli polovina derivace jmenovatele.
- Proto první zlomek vynásobíme a vydělíme dvěma.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 5\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A}$

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{(2x-4)}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

V čitateli potřebujeme derivaci jmenovatele, tj. výraz $(2x-4)$.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

- Musíme upravit zlomek tak, aby se zlomky v prvním a druhém integrálu rovnaly.
- K těmto úpravám použijeme jenom multiplikativní a aditivní konstanty (nenadělají "moc velkou neplechu" při integraci).
- Přidáním násobku $\frac{1}{2}$ máme ve druhém zlomku v čitateli výraz $\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$. Koeficient u x je v pořádku.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- $\displaystyle\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\displaystyle\frac{1}{2}(2x-4)+2 = x$
- Nyní je v čitateli jenom x. Chybí číslo 5.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

- $\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\frac{1}{2}(2x-4) + 2 = x$
- $\frac{1}{2}(2x-4) + 2 + 5 = x + 5$
- První a druhý zlomek jsou stejné, nedopustili jsme se žádné úpravy, která by změnila hodnotu zlomku.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x.$

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

Rozdělíme zlomek na dva.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Doplníme na čtverec ve jmenovateli druhého zlomku.

$$x^2-4x+9 = x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2-4+9 = (x-2)^2+5$$

$$\boxed{\text{Najděte } \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x.}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1}
\end{aligned}$$

$\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A}$, kde v našem případě $A=\sqrt{5}$,
$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a=1$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \cdot\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C
\end{aligned}
$$

Upravíme.

KONEC