

# Racionální funkce

Robert Mařík

6. března 2007



Vyzkoušejte dva, tři nebo dvacet dalších mých kvízů a potom mi prosím vyplňte na webu. Děkuji!

Každou racionální funkci lze zintegrovat (alespoň teoreticky, musíme totiž být schopni rozložit jmenovatel na součin). Metody integrování se však pro jednotlivé typy racionálních funkcí liší. Není zde naštěstí nad čím váhat, zpravidla totiž okamžitě identifikujeme o jaký typ racionální funkce se jedná a potom postupujeme podle daného schématu, příslušného tomuto typu funkce.

# 1. Úvod

Racionální funkce je funkce tvaru  $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ , kde  $P_n(x)$  je polynom stupně  $n$  a  $Q_m(x)$  polynom stupně  $m$ .

Racionální funkce dělíme do několika skupin. V každé skupině integrujeme jiným způsobem a proto je nutno jednotlivé racionální funkce odlišovat.

- **Parciální zlomky** lze integrovat přímo použitím vzorců a případně algebraických úprav (u zlomků s kvadratickým výrazem ve jmenovateli).
- **Ryze lomené funkce**, které nejsou samy parciálními zlomky, lze rozložit na součet parciálních zlomků a pak integrujeme jednotlivé parciální zlomky samostatně.
- **Neryze lomené funkce** lze převést na součet polynomu a ryze lomené funkce (pomocí dělení polynomů). Každou ze dvou obdržených částí integrujeme samostatně.

## 1.1. Ryze a neryze lomené racionální funkce

Nechť  $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  je racionální funkce. Je-li  $n \geq m$ , nazývá se funkce  $R(x)$  **nerzye lomená**, je-li  $n < m$ , nazývá se funkce  $R(x)$  **ryze lomená**.

Ryze lomená funkce má tedy v čitateli polynom menšího stupně než ve jmenovateli.

## 1.2. Typy parciálních zlomků

Parciální zlomky jsou jedny z nejjednodušších *ryze lomených* funkcí. Jedná se o následující typy zlomků (vynecháváme případ násobných komplexních kořenů).

$$\frac{A_1}{x - a}, \quad \frac{A_n}{(x - a)^n}, \quad \frac{Ax + B}{x^2 + Mx + N}$$

$n \geq 2$  je přirozené číslo,  $x$  je proměnná a všechno ostatní jsou reálné konstanty takové, že polynom  $x^2 + Mx + N$  nemá reálné kořeny.



## 2. Test1

**Poznáte racionální funkce?** Ztrhněte správnou možnost. Zelená fajka značí správnou a červený křížek špatnou odpověď.

Kvíz.

- $\frac{x}{x^2 + 4}$
- $\frac{x}{x^2 - 4}$
- $\frac{x + 1}{(x - 1)^2}$
- $\frac{x}{(x - 1)^2}$
- $\frac{3}{(x - 1)^2}$
- $\frac{\sqrt{x}}{x^2 + x + 1}$
- $\frac{x^3 - 1}{x + 2}$
- $\frac{6x - 1}{x^2 + 8x + 100}$
- $\frac{1}{x^3 + 1}$
- $\frac{3}{x + 5}$

Ryze lomená a současně parciální zlomek

Ryze lomená funkce

Neryze lomená funkce

Není racionální funkce



11.  $\frac{x+2}{x^2+4x+6}$

12.  $\frac{x}{x^2+4x+6}$

13.  $\frac{x}{x^3+4x}$

14.  $\frac{x-1}{(x+2)^3}$

15.  $\frac{6}{(x-\sqrt{3})^4}$

16.  $\frac{x^2}{x+1}$

17.  $\frac{x-1}{x(x-2)(x-3)}$

18.  $\frac{x^3-1}{x(x-2)(x-3)}$

19.  $\frac{x^2-1}{x(x-2)^2}$

20.  $\frac{x}{x+1}$

21.  $\frac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{x-1}$

22.  $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Ryze lomená a současně parciální zlomek

Ryze lomená funkce

Neryze lomená funkce

Není racionální funkce



ROBERT MAŘÍK

Integrály - rac. funkce.

file volba.rif.tex

Úvod

Test1

Test2

Úvodní strana

Print

Titulní strana



Strana 6 z 7

Zpět

Full Screen

Zavřít

Konec

23.  $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x(x - 2)^2}$

24.  $\frac{x^{2/3}}{(x + 1)(x + 2)^2}$

25.  $\frac{6 - x}{x^2 + 3x + 9}$

26.  $\frac{1}{x^2 + 1}$

27.  $\frac{2x + 1}{(x + 1)^2}$

Ryze lomená a současně parciální zlomek

Ryze lomená funkce

Neryze lomená funkce

Není racionální funkce

### 3. Test2

Umíte dělit polynomy se zbytkem? Tato dovednost je nezbytná, pokud chcete integrovat neryze lomené funkce. Tyto funkce je totiž nutné nejprve upravit na podíl polynomu a ryze lomené funkce.

Do bílého políčka vepište podíl (polynom) a do žlutého zbytek (polynom stupně menšího než stupeň polynomu ve jmenovateli.)

Kvíz.

$$1. \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \boxed{\phantom{000000}} + \frac{\boxed{\phantom{000000}}}{x + 1}$$

$$2. \frac{x^2}{x + 2} = \boxed{\phantom{000000}} + \frac{\boxed{\phantom{000000}}}{x + 2}$$

$$3. \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 2} = \boxed{\phantom{000000}} + \frac{\boxed{\phantom{000000}}}{x^2 + 2}$$

$$4. \frac{x^2 + 4x + 1}{x - 2} = \boxed{\phantom{000000}} + \frac{\boxed{\phantom{000000}}}{x - 2}$$

$$5. \frac{x^4 + 3x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1} = \boxed{\phantom{000000}} + \frac{\boxed{\phantom{000000}}}{x^2 + 1}$$