

Rozklad na parciální zlomky

Lenka Příbylová

6. března 2007

Obsah

$\frac{x+3}{x^2+x-2}$	3
$\frac{x^2-x+4}{x^2+2x+1}$	13
$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$	24

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x + 3}{x^2 + x - 2}$

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x + 3}{x^2 + x - 2}$

$$\frac{x + 3}{x^2 + x - 2}$$

Funkce je ryze lomená, protože stupeň polynomu v čitateli je menší, než ve jmenovateli.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x+3}{x^2+x-2}$

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$$

Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele. Použijeme buď vzorec pro kořeny kvadratické rovnice, Hornerovo schema nebo odhad součinu.

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x+3}{x^2+x-2}$

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Každému kořenovému činiteli přísluší jeden parciální zlomek.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x+3}{x^2+x-2}$

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$x+3 = A(x+2) + B(x-1)$$

Vynásobíme rovnici společným jmenovatelem $(x-1)(x+2)$.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x+3}{x^2+x-2}$

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$x+3 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x=1 : 4 = A \cdot 3$$

Rovnost platí pro každé x , tedy i pro kořen $x=1$.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x+3}{x^2+x-2}$

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$x+3 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x=1 : 4 = A \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4}{3}$$

Můžeme vyjádřit A .

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x+3}{x^2+x-2}$

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$x+3 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x=1 : 4 = A \cdot 3 \Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

$$x=-2 : 1 = B \cdot -3$$

Dosadíme $x = -2$.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x+3}{x^2+x-2}$

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$x+3 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x=1 : 4 = A \cdot 3 \Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

$$x=-2 : 1 = B \cdot -3 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

Můžeme vyjádřit B .

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x+3}{x^2+x-2}$

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$x+3 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x=1 : 4 = A \cdot 3 \Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

$$x=-2 : 1 = B \cdot -3 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{4}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

Máme rozklad na parciální zlomky.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

Funkce není ryze lomená, protože stupeň polynomu v čitateli je stejný (nebo větší), než ve jmenovateli.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

$$(x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) =$$

Podělíme polynomy v čitateli a jmenovateli

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

$$(x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$
$$-(x^2 + 2x + 1)$$
$$-3x + 3$$

a dostáváme polynom a ryze lomenou funkci.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

$$\begin{aligned} (x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) &= 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x + 1} \\ -(x^2 + 2x + 1) & \\ -3x + 3 & \\ \frac{-3x + 3}{(x + 1)^2} & \end{aligned}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat jen ryze lomený zbytek.
Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele podle vzorce.

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

$$(x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$
$$-(x^2 + 2x + 1)$$
$$-3x + 3$$

$$\frac{-3x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

Každému kořenovému činiteli včetně násobnosti přísluší jeden parciální zlomek.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

$$(x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$
$$-(x^2 + 2x + 1)$$
$$-3x + 3$$

$$\frac{-3x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

$$-3x + 3 = A(x + 1) + B$$

Vynásobíme rovnici společným jmenovatelem $(x + 1)^2$.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

$$(x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$
$$-(x^2 + 2x + 1)$$
$$-3x + 3$$

$$\frac{-3x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

$$-3x + 3 = A(x + 1) + B$$

$$x = -1 : \quad 6 = B$$

Rovnost platí pro každé x , tedy i pro kořen $x = -1$. Dostáváme hodnotu B .

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

$$(x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$
$$-(x^2 + 2x + 1)$$
$$-3x + 3$$

$$\frac{-3x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

$$-3x + 3 = A(x + 1) + B$$

$$x = -1 : \quad 6 = B$$
$$x^0 : \quad 3 = A + B = A + 6$$

Další kořeny nemáme. Buď dosadíme jiné číslo nebo porovnáme koeficienty. U x^0 stojí na obou stranách rovnice stejné koeficienty.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

$$(x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$
$$-(x^2 + 2x + 1)$$
$$-3x + 3$$

$$\frac{-3x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

$$-3x + 3 = A(x + 1) + B$$

$$x = -1 : \quad 6 = B$$
$$x^0 : \quad 3 = A + B = A + 6 \quad \Rightarrow A = -3$$

Můžeme vyjádřit A .

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

$$(x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$
$$-(x^2 + 2x + 1)$$
$$-3x + 3$$

$$\frac{-3x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

$$-3x + 3 = A(x + 1) + B$$

$$x = -1 : \quad 6 = B$$

$$x^0 : \quad 3 = A + B = A + 6 \quad \Rightarrow A = -3$$

$$\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 1 - \frac{3}{x + 1} + \frac{6}{(x + 2)^2}$$

Máme rozklad na parciální zlomky.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$$

Funkce je ryze lomená, protože stupeň polynomu v čitateli je menší, než ve jmenovateli. Jmenovatel již je rozložen na kořenové činitele, protože $x^2 + 2 = 0$ má pouze komplexní kořeny.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Každému kořenovému činiteli přísluší jeden parciální zlomek, nerozložitelnému kvadratickému činiteli také.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

Vynásobíme rovnici společným jmenovatelem $(x-1)(x^2+2)$.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x = 1 : 1 = A \cdot 3$$

Rovnost platí pro každé x , tedy i pro kořen $x = 1$.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x = 1 : \quad 1 = A \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}$$

Můžeme vyjádřit A .

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x = 1 : \quad 1 = A \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}$$

$$x^2 : \quad 0 = A + B = \frac{1}{3} + B$$

Další kořeny nemáme. Buď dosadíme jiné číslo nebo porovnáme koeficienty. U x^2 stojí na obou stranách rovnice stejné koeficienty.

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x = 1 : \quad 1 = A \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}$$

$$x^2 : \quad 0 = A + B = \frac{1}{3} + B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{3}$$

Můžeme vyjádřit B .

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x = 1 : \quad 1 = A \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}$$

$$x^2 : \quad 0 = A + B = \frac{1}{3} + B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$x^1 : \quad 1 = -B + C = \frac{1}{3} + C$$

Zbývá vyjádřit C . Protože C se objevuje u první i nulté mocniny x , můžeme si mocninu vybrat. Vezmeme např. x^1 .

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x = 1 : \quad 1 = A \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}$$

$$x^2 : \quad 0 = A + B = \frac{1}{3} + B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$x^1 : \quad 1 = -B + C = \frac{1}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{3}$$

Dostáváme C .

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x = 1 : \quad 1 = A \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}$$

$$x^2 : \quad 0 = A + B = \frac{1}{3} + B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$x^1 : \quad 1 = -B + C = \frac{1}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{-x+2}{3(x^2+2)}$$

Máme rozklad na parciální zlomky.

KONEC