

Integrace goniometrických funkcí.

Lenka Příbylová

6. března 2007

Obsah

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$	3
$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$	11
$\int \frac{1}{\sin x} dx$	20

Najděte $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$.

Najděte $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$$

Funkce je vzhledem k funkci $\cos x$ rac. lomená a v násobení se $\sin x$.

Najděte $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx =$$

$$\cos x = t$$

Zavedeme substituci $\cos x = t$.

Najděte $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx =$$

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x dx &= dt \end{aligned}$$

Diferencujeme.

Najděte $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx =$$

$$\cos x = t$$

$$-\sin x dx = dt$$

$$\sin x dx = -dt$$

Vyjádříme $\sin x dx$.

Najděte $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx =$$

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x dx &= dt \\ \sin x dx &= -dt \end{aligned}$$

$$= - \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx =$$

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x dx &= dt \\ \sin x dx &= -dt \end{aligned}$$

$$= - \int \frac{dt}{t^2 + 1} = -\operatorname{arctg} t + c$$

Integrujeme.

Najděte $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx =$$

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x dx &= dt \\ \sin x dx &= -dt \end{aligned}$$

$$= - \int \frac{dt}{t^2 + 1} = - \operatorname{arctg} t + c = - \operatorname{arctg}(\cos x) + c$$

Navrátíme se k původní proměnné.

Najděte $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx =$$

Najděte $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

Funkce, které jsou vzhledem ke $\cos x$ v liché mocnině, je vhodné rozepsat vytknutím $\cos x$

Najděte $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx\end{aligned}$$

a přepisem pomocí vzorce $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (analogicky pro $\sin x$).

Najděte $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \end{aligned}$$

$$\sin x = t$$

Zavedeme substituci $\sin x = t$.

Najděte $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \, dx &= dt \end{aligned}$$

Diferencujeme.

Najděte $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx =$$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \, dx &= dt \end{aligned}$$

$$= \int t^2 (1 - t^2) \, dt$$

Dosadíme.

Najděte $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx =$$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \, dx &= dt \end{aligned}$$

$$= \int t^2 (1 - t^2) \, dt = \int t^2 - t^4 \, dt$$

Roznásobíme.

Najděte $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx =$$

$$\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array}$$

$$= \int t^2 (1 - t^2) \, dt = \int t^2 - t^4 \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c$$

Integrujeme.

Najděte $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx =$$

$$\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array}$$

$$= \int t^2 (1 - t^2) \, dt = \int t^2 - t^4 \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

Navrátíme se k původní proměnné.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

Integrand je vzhledem k funkci $\sin x$ v liché mocnině, proto budeme volit substituci $t = \cos x$. Musíme tedy dostat do čitatele $\sin x$.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$$

Rozšíříme zlomek.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Jmenovatel přepíšeme pomocí vzorce $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

$$= \boxed{\cos x = t}$$

Zavedeme substituci $\cos x = t$.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

$$= \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array}$$

Diferencujeme.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

$$= \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array}$$

Vyjádříme $\sin x dx$.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$
$$= \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} = - \int \frac{dt}{1 - t^2}$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

$$= \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} = - \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c$$

Integrujeme.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

$$= \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} = - \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + c =$$

Navrátíme se k původní proměnné.

Najděte $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

$$= \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} = - \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + c$$

Lze upravit.

KONEC