



Tiskový výstup

# POČETNÍ PRAKTIKUM

Mgr. Ing. arch. Petr Kurfürst, Ph.D.



MASARYKOVA UNIVERZITA  
ELPORTÁL



# Obsah

## Úvod

<b>Kapitola 1</b>	<b>Diferenciální a integrální počet</b>	1
1.1	Derivace funkcí jedné proměnné . . . . .	1
1.2	Neurčité integrály funkcí jedné proměnné . . . . .	4
1.3	Určité integrály funkcí jedné proměnné . . . . .	8
1.4	Geometrické a fyzikální aplikace integrace funkce jedné proměnné . . . . .	9
<b>Kapitola 2</b>	<b>Základy vektorové a tenzorové algebry</b>	13
2.1	Vektory a matice . . . . .	13
2.2	Báze a jejich transformace . . . . .	18
2.3	Tenzorový počet . . . . .	23
<b>Kapitola 3</b>	<b>Obyčejné diferenciální rovnice</b>	35
3.1	Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu . . . . .	35
3.1.1	Rovnice separovatelné a homogenní . . . . .	35
3.1.2	Nehomogenní rovnice . . . . .	37
3.1.3	Bernoulliiova rovnice . . . . .	38
3.1.4	Rovnice exaktní . . . . .	39
3.2	Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu . . . . .	40
3.2.1	Rovnice s konstantními koeficienty . . . . .	40
3.2.2	Rovnice s nekonstantními koeficienty . . . . .	44
3.3	Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic . . . . .	45
3.3.1	Homogenní soustavy s konstantními koeficienty . . . . .	45
3.3.2	Nehomogenní soustavy s konstantními koeficienty . . . . .	48
<b>Kapitola 4</b>	<b>Křivkový integrál</b>	51
4.1	Křivkový integrál 1. druhu . . . . .	51
4.2	Křivkový integrál 2. druhu . . . . .	55
<b>Kapitola 5</b>	<b>Skalární a vektorové funkce více proměnných</b>	59
5.1	Parciální a směrové derivace, úplný diferenciál . . . . .	59
5.2	Kmenová funkce . . . . .	62
5.3	Diferenciální operátory . . . . .	65
<b>Kapitola 6</b>	<b>Dvojný a trojný integrál</b>	69
6.1	Plošný integrál 1. druhu . . . . .	70
6.2	Plošný integrál 2. druhu . . . . .	76
6.3	Objemový integrál . . . . .	78
6.4	Geometrické a fyzikální charakteristiky útvarů . . . . .	79

<b>Kapitola 7</b>	<b>Integrální věty</b>	85
7.1	Greenova věta . . . . .	85
7.2	Stokesova věta . . . . .	87
7.3	Gaussova věta . . . . .	90
<b>Kapitola 8</b>	<b>Taylorův rozvoj</b>	95
8.1	Rozvoj funkce jedné proměnné . . . . .	95
8.2	Rozvoj funkce více proměnných . . . . .	98
<b>Kapitola 9</b>	<b>Fourierovy řady</b>	101
9.1	Diskrétní Fourierovy řady . . . . .	103
9.2	Fourierova analýza . . . . .	105
<b>Kapitola 10</b>	<b>Úvod do komplexní analýzy</b>	109
<b>Kapitola 11</b>	<b>Kombinatorika</b>	115
<b>Kapitola 12</b>	<b>Počet pravděpodobnosti</b>	121
<b>Příloha A</b>	<b>Křivočaré souřadnice</b>	127
A.1	Kartézská soustava . . . . .	127
A.1.1	Diferenciální operátory . . . . .	128
A.1.2	Plochy, objemy . . . . .	130
A.1.3	Vektory polohy, rychlosti a zrychlení . . . . .	131
A.2	Válcová soustava . . . . .	131
A.2.1	Diferenciální operátory . . . . .	133
A.2.2	Plochy, objemy . . . . .	134
A.2.3	Vektory polohy, rychlosti a zrychlení . . . . .	135
A.3	Kulová soustava . . . . .	136
A.3.1	Diferenciální operátory . . . . .	138
A.3.2	Plochy, objemy . . . . .	139
A.3.3	Vektory polohy, rychlosti a zrychlení . . . . .	140
A.4	Eliptická soustava . . . . .	141
A.5	Parabolická soustava . . . . .	143
A.6	„Anuloidová“ soustava . . . . .	145
A.7	Příklad neortogonální soustavy . . . . .	146
A.7.1	Diferenciální operátory . . . . .	149
A.7.2	Plochy, objemy . . . . .	151
A.7.3	Vektory polohy, rychlosti a zrychlení . . . . .	151
<b>Příloha B</b>	<b>Stručný úvod do parciálních diferenciálních rovnic</b>	153
B.1	Parciální diferenciální rovnice 1. řádu . . . . .	153
B.1.1	Homogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu . . . . .	153
B.1.2	Nehomogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu . . . . .	155
B.2	Parciální diferenciální rovnice 2. řádu . . . . .	158
B.2.1	Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu . . . . .	158
B.2.2	Metoda fundamentálního řešení (metoda Greenovy funkce) . . . . .	159
B.2.3	Řešení parabolických parciálních diferenciálních rovnic Fourierovou metodou (metodou separace proměnných) . . . . .	161
B.2.4	Jednoduché příklady prostorových úloh . . . . .	167

B.2.5	Řešení hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic Fourierovou metodou . . . . .	169
B.2.6	Ukázka možných způsobů řešení jednoduchých eliptických parciálních diferenciálních rovnic . . . . .	171
<b>Příloha C</b>	<b>Praktické základy numerických výpočtů</b>	175
C.1	Numerické metody lineární algebry . . . . .	175
C.2	Interpolace a regrese . . . . .	177
C.2.1	Kubický interpolační splajn . . . . .	178
C.2.2	Lineární regrese metodou nejmenších čtverců . . . . .	181
C.2.3	Polynomiální regrese metodou nejmenších čtverců . . . . .	183
C.2.4	Robustní regrese . . . . .	185
C.3	Numerické metody výpočtů funkcí jedné proměnné . . . . .	186
C.3.1	Hledání kořene funkce jedné proměnné - Newtonova metoda . . . . .	186
C.3.2	Numerické derivování . . . . .	188
C.3.3	Numerické integrování . . . . .	189
C.3.4	Jednoduché numerické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic .	190
C.4	Numerické metody výpočtů funkcí více proměnných - řešení parciálních diferenciálních rovnic . . . . .	193
C.4.1	Hledání kořenů soustavy funkcí více proměnných Newtonova-Raphsonova metoda . . . . .	193
C.4.2	Principy konečných diferencí . . . . .	195
C.4.3	von Neumannova analýza stability . . . . .	198
C.4.4	Laxova metoda . . . . .	198
C.4.5	Metoda zpětného kroku (Upwind method) . . . . .	199
C.4.6	Laxova-Wendroffova metoda . . . . .	200
C.4.7	Implicitní schéma . . . . .	200
C.4.8	Příklad pokročilejšího numerického schématu . . . . .	201
C.4.9	Příklady modelování reálných fyzikálních procesů . . . . .	204
C.5	Paralelizace výpočetních algoritmů . . . . .	207
<b>Reference</b>		209



# Úvod

Protože matematika je nejdůležitějším pracovním nástrojem a zároveň vyjadřovacím jazykem fyziky, patří znalost základních matematických postupů, uváděných v této sbírce, k neodmyslitelné výbavě každého, kdo se chce fyzikou hlouběji zabývat. Souhrnný předmět [Početní praktikum 1](#), [Početní praktikum 2](#) představuje praktický kurz, určený studentům prvních semestrů bakalářského studia, bezprostředně navazující na předměty [Základní matematické metody ve fyzice 1](#), [Základní matematické metody ve fyzice 2](#). Smysl početního praktika, jak už samotný název napovídá, spočívá především v praktickém počítání a v detailním procvičování znalostí, získaných ve výše uvedených přednáškách.

Tato sbírka představuje souborný studijní materiál, usnadňující výběr příkladů, souvisejících s danými tématy. Je členěná do dvanácti základních kapitol, řazených zhruba podle časové posloupnosti přednášené problematiky, doplněných třemi přílohami, určenými zájemcům o širší znalost základů některých důležitých okruhů matematiky, potenciálně využitelných v dalším studiu i ve fyzikální praxi. Jednotlivé kapitoly jsou vždy uvedeny stručným teoretickým shrnutím daného tématu, které si neklade za cíl podávat matematicky přesný a vyčerpávající výklad (doplněný větami, důkazy, atd.), nýbrž pokud možno jednoduchým a přehledným způsobem zrekapitulovat hlavní zásady pro praktické počítání příslušného problému. Pokud je někde výklad zjednodušen do té míry, že například opomíjí některé předpoklady nebo některá řešení uvedené rovnice, je to v textu uvedeno. Jádro každé kapitoly tvoří potom soubor příkladů, které v dostatečném rozsahu pokrývají danou problematiku. U každého příkladu je také uvedený výsledek, který podle mého názoru studentům, kteří se s danou látkou teprve seznamují, umožní správnou orientaci při počítání. Pro jednodušší zacházení je celá sbírka vybavena modře zvýrazněnými hypertextovými odkazy, umožňujícími v elektronické verzi se kliknutím ihned přesunout na odkazované místo a stejně zvýrazněnými odkazy URL, které po kliknutí automaticky otevřou uvedenou webovou stránku.

Ani sebelepší studijní materiál nenahradí vlastní píli a odhodlání těch, kteří o získání znalostí a dovedností usilují, může jim pouze více nebo méně práci usnadnit. Velmi proto uvítám, pokud ti, kteří budou s touto sbírkou pracovat, mně sdělí svoje případné názory, podněty nebo výhrady např. ke srozumitelnosti výkladu nebo obtížnosti příkladů a zároveň mě kdykoli upozorní na jakoukoli nepřesnost nebo nedostatek, který v příkladech nebo v textu odhalí.

Petr Kurfürst





# Kapitola 1

## Diferenciální a integrální počet

### 1.1 Derivace funkcí jedné proměnné

- *Derivace* je jedním ze základních pojmů diferenciálního počtu a matematické analýzy vůbec. Pomocí předem definovaného pojmu limita je derivace funkce jedné proměnné definována jako

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ kde } h = \Delta x \text{ je přírůstek nezávisle proměnné } x. \quad (1.1)$$

- Následující výčet shrnuje derivace elementárních funkcí jedné proměnné:

$$(Cx^n)' = Cnx^{n-1}, \text{ kde } C \in \mathbb{R} \text{ je konstanta, } n \in \mathbb{R} \text{ je konstanta,} \quad (1.2)$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (1.3)$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = a^x \ln a, \text{ kde } a > 0 \text{ je konstanta,} \quad (1.4)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad (1.5)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0, \text{ kde } a > 0, a \neq 1 \text{ je konstanta,} \quad (1.6)$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (1.7)$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (1.8)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.9)$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.10)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad (1.11)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad (1.12)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (1.13)$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (1.14)$$

$$(\sinh x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \quad (1.15)$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (1.16)$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x, \quad (1.17)$$

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x, \quad x \neq 0. \quad (1.18)$$

Z rovnice (1.15) lze odvodit následující identity pro hyperbolometrické funkce (funkce inverzní k hyperbolickým funkcím):

$$\operatorname{argsinh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad \text{a tedy} \quad (\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (1.19)$$

$$\operatorname{argcosh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad \text{a tedy} \quad (\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1, \quad (1.20)$$

$$\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad \text{a tedy} \quad (\operatorname{argtanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1 \quad (1.21)$$

$$\operatorname{argcoth} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad \text{a tedy} \quad (\operatorname{argcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1. \quad (1.22)$$

- Pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu funkcí jedné proměnné:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \text{pro libovolné funkce } f \text{ a } g \text{ a konstanty } \alpha \text{ a } \beta, \quad (1.23)$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{pro libovolné funkce } f \text{ a } g, \quad (1.24)$$

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \left[ f \left( \frac{1}{g} \right) \right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{pro libovolné funkce } f \text{ a } g, \quad g \neq 0. \quad (1.25)$$

- Pravidlo pro derivování složené funkce  $f(\phi(x))$ , kde  $f$  je vnější a  $\phi$  je vnitřní funkce proměnné  $x$  (tzv. řetězové pravidlo pro derivace):

$$[f(\phi)]' = \frac{df}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{df}{d\phi} \phi'. \quad (1.26)$$

Pro budoucí praktické počítání (a to nejen derivací, ale víceméně ve všech oblastech matematiky), případně pro kontrolu správnosti mechanických výpočtů, lze využít analytické programové balíčky, například Wolfram Alpha: Computational Knowledge Engine <https://www.wolframalpha.com/>, jehož základní aplikace jsou volně dostupné, velmi pokročilý je také program Sage (SageMath) <http://www.sagemath.org/>, atd. V žádném případě to ovšem nenahrazuje vlastní dovednosti, pouze je doplňuje a pomáhá rychle a bezchybně zvládat, zjednodušovat a kontrolovat i velmi rozsáhlé, na mechanické počítání pracné výrazy.

### • Příklady:

Vypočítejte derivace uvedených funkcí a výsledky zjednodušte. V případě, že  $D_f$  je pouze podmnožinou  $\mathbb{R}$ , určete průnik definičních oborů zadaných i vypočítaných funkcí. **Výsledek je u každého příkladu uveden červenou barvou.**

$$1.1 \quad \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2} \quad \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$1.2 \quad \frac{1}{\sin 2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \ln \frac{1+x \cos 2}{1-x \cos 2} \cotg 2 \quad \frac{2 \sin 2}{(1-x^2)(1-x^2 \cos^2 2)}, \quad x \in (-1, 1)$$

- 1.3  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}$   $-\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$
- 1.4  $\sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$   $-\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x)$
- 1.5  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$   $\frac{1 + \sqrt{x} \left(2 + 4\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}, x > 0$
- 1.6  $x(\sin \ln x - \cos \ln x)$   $2 \sin \ln x, x > 0$
- 1.7  $\sqrt{1+x^2} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$   $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, x \neq 0$
- 1.8  $\frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}$   $-\frac{\arccos x}{x^2}, x \in \langle -1, 1 \rangle, x \neq 0$
- 1.9  $x^{x^x}$   $x^{x^x} [x^{x-1} + x^x \ln x (\ln x + 1)], x > 0$
- 1.10  $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arccotg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$   $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}, x > 0$
- 1.11  $x^{\sin^2 x}$   $x^{\sin^2 x} \left(\frac{\sin^2 x}{x} + 2 \sin x \cos x \ln x\right), x > 0$
- 1.12  $x \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$   $\arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x^2 + 1}$
- 1.13  $5^{x \log_{10} x}$   $5^{x \log x} \ln 5 \left(\log x + \frac{1}{\ln 10}\right), x > 0$
- 1.14  $\log_7 \frac{x^2 - 1}{x - 1}$   $\frac{1}{(x+1) \ln 7}, x > -1$
- 1.15  $x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}} + e^{-x} \operatorname{arctg} e^x$   $\frac{2e^x - (1 + e^{2x}) \operatorname{arctg} e^x}{e^{3x} + e^x}$
- 1.16  $x^{\sin x} + \ln \cos \sqrt{e^x + 1}$   
 $x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) - \frac{e^x \operatorname{tg} \sqrt{e^x + 1}}{2\sqrt{e^x + 1}}, x > 0$
- 1.17  $x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x$   
 $\ln^2(x + \sqrt{1+x^2})$
- 1.18  $\frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x}$   
 $\frac{\frac{2}{3}(x^2 - 2) \sin x - 7x(x^2 + 1) \cos x}{\sqrt[3]{x^7} \sin^8 x}, x \neq 0$

1.19  $f'(2\pi)$  funkce  $f(x) = x^2(\cos x)^{-\sin x}$ .

$$f'(2\pi) = (\cos x)^{-\sin x} \left\{ 2x + x^2 \left[ \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x \ln(\cos x) \right] \right\} \Big|_{2\pi} = 4\pi, \quad x \in (4k-1, 4k+1) \frac{\pi}{2},$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

1.20  $x^{\ln(\sin x)} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$x^{\ln(\sin x)} \left[ \frac{\ln(\sin x) + x \ln x \cotg x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \right], \quad x > 0 \wedge x \in (2k, 2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.21  $x^{\sin(\ln x)} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

$$x^{\sin(\ln x)} \frac{(x^2+1) [\sin(\ln x) + \ln x \cos(\ln x)] - 1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0$$

1.22  $e^{ax \cos x} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{ax^2 + b^2}}$ , kde  $a, b$  jsou kladné konstanty.

$$e^{ax \cos x} \left[ \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{ax^2 + b^2}} \left( a \cos x - ax \sin x - \frac{ax}{ax^2 + b^2} \right) + \frac{ab \cos bx + b^2 \sin bx}{\sqrt{ax^2 + b^2}} \right]$$

1.23  $x^{ax \sin x} \frac{a \sin \sqrt{bx} - b \cos \sqrt{bx}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , kde  $a, b$  jsou kladné konstanty.

$$\frac{\sqrt{b} \cos \sqrt{bx}}{\sqrt{a^2 + b^2}} x^{ax \sin x} \left[ \frac{a \sin x}{\sqrt{b}} (1 + \ln x + x \ln x \cotg x) (a \operatorname{tg} \sqrt{bx} - b) + \frac{a + b \operatorname{tg} \sqrt{bx}}{2\sqrt{x}} \right],$$

$x > 0$ . Proč není nutná podmínka  $x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ?

1.24  $(ax \sin x)^{\frac{b \sin x}{x}}$ , kde  $a, b$  jsou kladné konstanty.

$$b (ax \sin x)^{\frac{b \sin x}{x}} \left[ \frac{\sin x + x \cos x}{x^2} + \ln(ax \sin x) \left( \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) \right],$$

$x > 0 \wedge x \in (2k, 2k+1)\pi$   
 $x < 0 \wedge x \in (2k-1, 2k)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

1.25  $(ax e^x)^{\frac{b \ln x}{x^2}}$ , kde  $a, b$  jsou kladné konstanty.

$$\frac{b}{x^3} (ax e^x)^{\frac{b \ln x}{x^2}} [(1+x) \ln x + \ln(ax e^x) (1-2 \ln x)], \quad x > 0$$

1.26  $(x e^x)^{\frac{a}{x \ln x}}$ , kde  $a$  je kladná konstanta.

$$-\frac{a(x + \ln^2 x)}{x^2 \ln^2 x} e^{\frac{a(x + \ln x)}{x \ln x}}, \quad x > 0, \quad x \neq 1.$$

## 1.2 Neurčité integrály funkcí jedné proměnné

- *Neurčitým integrálem* nazýváme nekonečně velkou množinu funkcí, tvořenou součtem libovolné reálné konstanty  $C$  s tzv. *primitivní funkcí*  $F(x)$  k dané původní funkci  $f(x)$ ,

pro niž platí  $F'(x) = f(x)$ . V případě funkce jedné proměnné lze psát

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.27)$$

Integrace je tedy inverzním procesem k derivování, neurčité integrály (anglicky také *antiderivatives*) některých elementárních funkcí můžeme vyčíst přímo z rovnic (1.2)-(1.22).

- Následující výčet shrnuje neurčité integrály elementárních funkcí jedné proměnné<sup>1</sup>:

$$\int C_1 x^n dx = C_1 \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \text{jsou konstanty,} \quad (1.28)$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ je konstanta,} \quad (1.29)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \text{ je konstanta,} \quad (1.30)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C_1 = \ln(C_2|x|), \quad x \neq 0, \quad C_2 > 0, \quad C_1 = \ln C_2, \quad (1.31)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad (1.32)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad (1.33)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.34)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.35)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2, \quad -1 < x < 1, \quad (1.36)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2, \quad (1.37)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C, \quad (1.38)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C, \quad (1.39)$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C, \quad (1.40)$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{coth} x + C, \quad x \neq 0, \quad (1.41)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C = \operatorname{argsinh} x + C, \quad (1.42)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C = \operatorname{argcosh} x + C, \quad x > 1, \quad (1.43)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = \operatorname{argtanh} x + C, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C = \operatorname{argcoth} x + C, & |x| > 1, \end{cases} \quad (1.44)$$

<sup>1</sup>neurčité integrály jsou vyčerpávajícím způsobem tabelovány například v Bartsch (2008), Rektorys (2009).

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C. \quad (1.45)$$

- Součin dvou funkcí  $u(x)$  a  $v'(x)$  nezávisle proměnné  $x$  můžeme integrovat metodou *per partes*, která je integrálem rovnice (1.24):

$$uv = \int (uv)' dx = \int (u'v + uv') dx \quad \text{a tedy} \quad \int uv' dx = uv - \int u'v dx. \quad (1.46)$$

- *Substituční metodou* můžeme integrovat složenou funkci (viz rovnice (1.26)), kdy vnitřní funkci lze nahradit novou proměnnou, anebo můžeme integrovat jednoduchou funkci, kdy nezávisle proměnnou nahrazujeme novou vnitřní funkcí:

- Substituční metodu 1. typu lze použít při integraci složené funkce  $f[\phi(x)]$  nezávisle proměnné  $x$  ve tvaru

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x) dx = \int f(z) dz = F(z) + C = F[\phi(x)] + C, \quad (1.47)$$

kde můžeme nahradit (substituovat) vnitřní funkci novou proměnnou:  $\phi(x) = z$ ,  $\phi'(x) dx = dz$ . Substituční metodou 1. typu je i univerzální substituce  $\text{tg}(x/2) = z$ , pomocí které lze libovolnou goniometrickou funkci převést na funkci racionální.

- Substituční metodu 2. typu lze použít při integraci jednoduché funkce  $f(x)$  nezávisle proměnné  $x$  způsobem

$$\int f(x) dx = \int f[\phi(z)]\phi'(z) dz = F(z) + C = F[\phi^{-1}(x)] + C, \quad (1.48)$$

kde můžeme nahradit původní proměnnou novou vnitřní funkcí nové proměnné:  $x = \phi(z)$ ,  $dx = \phi'(z) dz$  a kde výraz  $\phi^{-1}$  znamená inverzní funkci k  $\phi$ . Typickým příkladem této metody je substituce  $x = \sin z$ , pomocí níž lze iracionální funkce typu  $\sqrt{1 - x^2} dx$  anebo  $dx/\sqrt{1 - x^2}$  v integrandu nahradit v prvním případě goniometrickou funkcí  $\cos^2 z dz$ , ve druhém případě pouze  $dz$ .

- Racionální funkci ve tvaru

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad (1.49)$$

kde  $P_m(x)$  a  $Q_n(x)$  jsou polynomy stupně  $m$  a  $n$  (kdy  $m \geq n$ ), lze rozložit na součet polynomu a ryze racionální funkce (kdy  $m < n$ ). Racionální funkci lze vyjádřit buď jako součet parciálních zlomků, nebo, v případě kdy např.  $f(x) = 1/Q_2(x)$ , kde  $Q_2(x)$  je polynom 2. stupně dále nerozložitelný v  $\mathbb{R}$ , provedeme úpravu (tzv. doplnění na čtverec)  $b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = [\sqrt{b_2} x + b_1/(2\sqrt{b_2})]^2 + b_0 - b_1^2/(4b_2)$ , vedoucí na integrál ve tvaru rovnice (1.37).

- Obdobným způsobem můžeme řešit integrály iracionálních funkcí typu  $f(x) = 1/\sqrt{Q_2(x)}$ , kde  $Q_2(x)$  je polynom 2. stupně, jehož doplnění na čtverec vede na integrály ve tvaru rovnic (1.36), (1.42) nebo (1.43). Vyčerpávajícím způsobem jsou metody analytických výpočtů neurčitých integrálů funkcí všech typů tabelovány např. ve sbornících: [Bartsch \(2008\)](#), [Rektorys \(2009\)](#), atd.

## • Příklady:

- 1.27  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx$   $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C, x > 0$
- 1.28  $\int \frac{x^4}{x^2-3} dx$   $\frac{x^3}{3} + 3x + \frac{3\sqrt{3}}{2} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + C, x \neq \pm\sqrt{3}$
- 1.29  $\int \frac{3x-4}{x^2-4} dx$   $\ln \left[ (x+2)^{\frac{5}{2}} \sqrt{x-2} \right] + C, x > 2$
- 1.30  $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$   $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left( \frac{4x-3}{5} \right) + C, x \in \left( -\frac{1}{2}, 2 \right)$
- 1.31  $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$   $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x+3}{\sqrt{3}} \right) + C$
- 1.32  $\int (-x^2+x)e^{3x} dx$   $\left( -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{9} - \frac{5}{27} \right) e^{3x} + C$
- 1.33  $\int \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} dx$   $\sqrt{x^2+1} + \ln \left( x + \sqrt{x^2+1} \right) + C$
- 1.34  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \right) dx$   $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \operatorname{argsinh} \frac{x}{\sqrt{2}} + C, |x| < \sqrt{2}$
- 1.35  $\int x^2 \sin x dx$   $(2-x^2) \cos x + 2x \sin x + C$
- 1.36  $\int \frac{dx}{\sin x}$   $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 1.37  $\int \operatorname{tg}^3 x dx$   $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\cos x| + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- 1.38  $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x} dx$   $\ln \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1+\cos x}{2 \sin^2 x} + C, x \in (2k, 2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 1.39  $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$   $\ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, x \neq (4k+2, 4k+3)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- 1.40  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx$   $x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C, x \geq \frac{1}{2}$
- 1.41  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$   $-2 \operatorname{cotg} (2x) + C, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- 1.42  $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$   $\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C, |x| < 2$
- 1.43  $\int \ln(x^2+1) dx$   $x \ln(x^2+1) + 2 \operatorname{arctg} x - 2x + C$

$$1.44 \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \frac{3}{7} (\sqrt[4]{x} + 1)^{\frac{4}{3}} (4\sqrt[4]{x} - 3) + C, \quad x > 0$$

$$1.45 \int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} dx \quad 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{2}} + C, \quad x \geq 1$$

$$1.46 \int \frac{\sqrt[4]{x-1}}{x+1} dx \\ 4\sqrt[4]{x-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \ln \frac{\sqrt{2(x-1)} - 2\sqrt[4]{2(x-1)} + 2}{\sqrt{2(x-1)} + 2\sqrt[4]{2(x-1)} + 2} + 2^{3/4} \operatorname{arctg} [1 - \sqrt[4]{2(x-1)}] - \\ 2^{3/4} \operatorname{arctg} [1 + \sqrt[4]{2(x-1)}] + C, \quad x \geq 1$$

### 1.3 Určité integrály funkcí jedné proměnné

Určitý integrál funkce  $f(x)$  spojitě na intervalu  $a \leq x \leq b$ , je definován předpisem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1.50)$$

kde  $F(a)$ ,  $F(b)$  jsou funkční hodnoty primitivní funkce  $F(x)$  v bodech  $x = a$ ,  $x = b$ . Geometrický význam určitého integrálu funkce jedné proměnné je dán velikostí celkové plochy v rovině  $xy$ , kde  $y = f(x)$ , která je ohraničená grafem funkce  $f(x)$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$  a  $x = b$ . Velikosti dílčích ploch nad osou  $x$ , tj. kde  $f(x) > 0$ , přispívají k velikosti celkové plochy, velikosti dílčích ploch pod osou  $x$ , kde  $f(x) < 0$ , se od velikosti celkové plochy odečítají.

#### • Příklady:

$$1.47 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad [x(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) + \ln(\sin x \cos x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$1.48 \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin\left(\frac{x^2}{4}\right) \cos\left(\frac{x^2}{4}\right) dx \quad \left[\sin^2\left(\frac{x^2}{4}\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$$

$$1.49 \int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-4x+5} dx \quad [\ln(x^2-4x+5) + 3 \operatorname{arctg}(x-2)]_2^3 = \ln 2 + \frac{3\pi}{4}$$

$$1.50 \int_{-1}^1 \sqrt{4x^2+1} dx \\ \left[ \frac{\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{4} + \frac{x\sqrt{4x^2+1}}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{\ln(\sqrt{5}+2)}{2} + \sqrt{5} \approx 2.96$$

$$1.51 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [(x \operatorname{tg} x + a) \operatorname{tg} x + 1] dx, \quad a \text{ je konstanta.} \quad \left[ x \operatorname{tg} x + (1-a) \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$



$$1.52 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x + a) \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 dx, \text{ a je konstanta.}$$

$$\left[ x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} + a \operatorname{tg} x - ax \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2a \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1.53 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x dx}{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2} \quad \left[ \frac{x}{2} \operatorname{tg}(2x) + \ln \sqrt[4]{\cos(2x)} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2 \right)$$

$$1.54 \int_0^1 x \operatorname{arctg}(x^2 + 1) dx$$

$$\left[ \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg}(x^2 + 1) - \ln \sqrt[4]{x^4 + 2x^2 + 2} \right]_0^1 = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{2}{5}$$

$$1.55 \int_0^1 x^3 \ln(x^2 + 1) dx \quad \left[ \frac{(x^4 - 1) \ln(x^2 + 1)}{4} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

## 1.4 Jednoduché geometrické a fyzikální aplikace integrace funkce jedné proměnné<sup>2</sup>

V následujících příkladech je vždy třeba sestavit určitý integrál funkce jedné proměnné. Pokud je v příkladu zadána spojitě proměnná tzv. intenzivní fyzikální veličina (hustota, tlak, hustota náboje, atd.), pomocí níž se má na dané oblasti stanovit odpovídající extenzivní veličina (hmotnost, tlaková síla, velikost náboje, ...), výpočet provádíme jako integrál intenzivní veličiny přes tuto oblast. Například hmotnost  $m$  kruhové desky o poloměru  $R$  s plošnou hustotou  $\sigma = \sigma(r)$ , kde  $r$  je vzdálenost od středu desky, určíme pomocí integrálu

$$m = \int_S \sigma(r) dS = \int_0^R \sigma(r) 2\pi r dr. \quad (1.51)$$

### • Příklady:

1.56 Spočítejte velikost plochy, ohraničené „zespoda“ parabolou  $y = x^2$  a „shora“ křivkou  $y = \sqrt{x}$ .

$$\frac{1}{3}$$

1.57 Spočítejte velikost plochy, ohraničené „zespoda“ parabolou  $y = x^2$  a „shora“ přímkou  $y = x/2 + 5$ .

$$\frac{243}{16}$$

1.58 Rychlost hmotného bodu v jednorozměrném případě je dána vztahem

$$v = 3t - \frac{18}{(t+1)}.$$

<sup>2</sup>Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

Určete dráhu, kterou projde hmotný bod v časovém intervalu od  $t = 0$  do zastavení. Bude hmotný bod v tomto časovém intervalu zrychlovat nebo brzdit (tj. bude se zvyšovat nebo snižovat velikost jeho rychlosti) ?

$s = 6(1 - 3 \ln 3)$ , hmotný bod bude brzdit, vektor zrychlení má opačný směr než vektor rychlosti.

- 1.59 Přehradní hráz je tvořena svislou betonovou zdí tvaru obdélníku, jehož délka je  $L$ . Hloubka vodní nádrže je v celé délce hráze přesně  $H$ . Jaká je celková tlaková síla, kterou voda působí na hráz ?

$$F_p = \left( \frac{\rho g H}{2} + p_0 \right) LH, \text{ kde } p_0 \text{ je atmosférický tlak na hladině.}$$

- 1.60 Válcová nádoba o poloměru  $R$  a výšce  $H$  je zcela naplněna plynem, jehož hustota směrem od osy válce klesá. Pokles hustoty je vyjádřen funkcí

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{r^2}{10}},$$

kde  $\rho_0$  je hustota plynu v ose válce,  $r$  je vzdálenost od osy válce.

- Vypočítejte hmotnost plynu v nádobě.
- Vypočítejte celkovou tlakovou sílu, kterou působí plyn na všechny stěny nádoby, pokud tlak  $p = a^2 \rho$ , kde  $a$  je konstantní (izotermická) rychlost zvuku.
- Jaká bude celková hmotnost a celková tlaková síla, pokud by poloměr vzrostl „nade všechny meze“ ( $R \rightarrow \infty$ ) ?

$$(a) m = 10\pi\rho_0 H \left( 1 - e^{-\frac{R^2}{10}} \right)$$

$$(b) F_p = 2\pi a^2 \rho_0 \left[ 10 + e^{-\frac{R^2}{10}} (RH - 10) \right]$$

$$(c) m = 10\pi\rho_0 H, F_p = 20\pi a^2 \rho_0$$

- 1.61 Válcová nádoba o poloměru  $R$  a výšce  $H$  je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem vzhůru klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí

$$p = p_0 e^{-\frac{h}{20}},$$

kde  $p_0$  je tlak plynu na dně válce,  $h$  je svislá vzdálenost ode dna válce. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na všechny stěny nádoby.

$$F_p = 40p_0\pi R \left( 1 - e^{-\frac{H}{20}} \right) + p_0\pi R^2 \left( 1 + e^{-\frac{H}{20}} \right)$$

- 1.62 Válcová nádoba o poloměru  $R$  a výšce  $H$  je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem od osy válce klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí

$$p = \frac{p_0}{1 + \left( \frac{r}{10} \right)^2},$$

kde  $p_0$  je tlak plynu v ose válce,  $r$  je vzdálenost od osy válce. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na všechny stěny nádoby.

$$F_p = 200\pi p_0 \left[ \frac{RH}{100 + R^2} + \ln \left( 1 + \frac{R^2}{100} \right) \right]$$

- 1.63 Nádoba ve tvaru kvádrů o čtvercovém půdorysu s délkou strany  $A$  a výšce  $H$  je zcela vyplněna plynem, jehož vertikální pokles tlaku je vyjádřen funkcí

$$p = \frac{p_0}{\frac{h}{10} + 1},$$

kde  $p_0$  je tlak plynu na dně nádoby,  $h$  je svislá vzdálenost ode dna nádoby. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na (všechny) stěny nádoby.

$$F_p = p_0 A \left[ 2A \frac{H+5}{H+10} + 40 \ln \left( \frac{H}{10} + 1 \right) \right]$$

- 1.64 Kruhová deska o poloměru  $R$  je elektricky nabitá s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ . Vypočítejte celkový elektrický náboj  $Q$  desky (velikost náboje by v případě  $\sigma = \text{konst.}$  byla dána jejím součinem s velikostí příslušné plochy,  $Q = \sigma S$ ), pokud

- (a)  $\sigma = A e^{Br^2}$ ,
- (b)  $\sigma = A \ln(r^2 + B)$ ,
- (c)  $\sigma = A e^{-\frac{r^2}{3}} + Br$ ,
- (d)  $\sigma = A \ln(3r^2 + B) + Ar$ ,

kde  $A, B$  jsou kladné konstanty a  $r$  je vzdálenost od středu desky.

- (a)  $Q = \frac{\pi A}{B} (e^{BR^2} - 1)$
- (b)  $Q = \pi A \{ (R^2 + B) [\ln(R^2 + B) - 1] - B(\ln B - 1) \}$
- (c)  $Q = 3\pi A \left( 1 - e^{-\frac{R^2}{3}} \right) + \frac{2}{3} \pi B R^3$
- (d)  $Q = \frac{\pi A}{3} [(3R^2 + B) \ln(3R^2 + B) - B \ln B + 2R^3 - 3R^2]$

- 1.65 Tenká přímá tyč (zanedbatelného průřezu) o délce  $L$  je kladně nabitá s homogenní délkovou nábojovou hustotou  $\tau$ . Koncové body tyče se nacházejí v bodech  $(0, 0, 0)$ ,  $(L, 0, 0)$ . Určete elektrostatický potenciál  $\phi$  buzený nábojem tyče a vektor intenzity elektrického pole v bodě  $P \equiv (-D, 0, 0)$ ,  $D > 0$  (v případě bodového náboje  $Q$  je elektrostatický potenciál  $\phi = Q/(4\pi\epsilon r)$  a velikost intenzity elektrického pole je určena jako  $E = Q/(4\pi\epsilon r^2)$ , kde konstanta  $\epsilon$  je tzv. permitivita a  $r$  je vzdálenost náboje od daného bodu  $P$ ). Výsledek vyjádřete pomocí celkového náboje  $Q$  tyče.

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} \ln \left( \frac{L+D}{D} \right), \quad \vec{E} = \left( -\frac{Q}{4\pi\epsilon D(L+D)}, 0, 0 \right).$$

- 1.66 Tenká přímá tyč (zanedbatelného průřezu) o délce  $L$  je kladně nabitá s homogenní délkovou nábojovou hustotou  $\tau$ . Koncové body tyče se nacházejí v bodech  $(0, 0, 0)$ ,  $(L, 0, 0)$ . Určete elektrostatický potenciál  $\phi$  buzený nábojem tyče v bodě  $P \equiv (0, D, 0)$ ,  $D > 0$ .

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} \ln \left( \frac{L + \sqrt{L^2 + D^2}}{D} \right)$$

1.67 Pro stejný případ tyče z příkladu 1.66 určete složky  $E_x$  a  $E_y$  vektoru intenzity elektrického pole v bodě  $P \equiv (0, D, 0)$ ,  $D > 0$ .

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} \left( \frac{1}{\sqrt{L^2 + D^2}} - \frac{1}{D} \right), \quad E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon D \sqrt{L^2 + D^2}}.$$

1.68 Pro stejný případ tyče z příkladu 1.66 určete elektrostatický potenciál  $\phi$  a složky  $E_x$  a  $E_y$  vektoru intenzity elektrického pole v bodě  $P \equiv (L/2, D, 0)$ ,  $D > 0$ .

$$\phi = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln \left( \frac{L + \sqrt{L^2 + 4D^2}}{2D} \right), \quad E_x = 0, \quad E_y = \frac{Q}{2\pi\epsilon D \sqrt{L^2 + 4D^2}}.$$

1.69 Tenká oblouková tyč zanedbatelného průřezu s konstantním poloměrem  $R$  je kladně nabitá s homogenní délkovou nábojovou hustotou  $\tau$ . Koncové body tyče se nacházejí (v polárních souřadnicích) v bodech  $(R, 4\pi/3, 0)$ ,  $(R, 5\pi/3, 0)$ . Určete elektrostatický potenciál  $\phi$  a složky  $E_x$  a  $E_y$  vektoru intenzity elektrického pole buzené nábojem tyče v bodě  $P \equiv (0, 0, 0)$ . Výsledek vyjádřete pomocí délkové hustoty  $\tau$  i pomocí celkového náboje  $Q$  tyče.

$$\phi = \frac{\tau}{12\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \quad E_x = 0, \quad E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon R} = \frac{3Q}{4\pi^2\epsilon R^2}.$$

1.70 Předpokládejme hypotetické homogenní ( $\rho = \text{konst.}$ ) kulové astronomické těleso o poloměru  $R$ . Gravitační potenciální energie libovolné vnitřní kulové slupky o poloměru  $r \in (0, R)$  je  $mgr$ , kde  $m$  je hmotnost kulové slupky a  $g = GM_r/r^2$  je velikost gravitačního zrychlení v místě slupky ( $G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  je gravitační konstanta). Veličina  $M_r$  značí hmotnost koule o poloměru  $r$ . Jak velká bude celková gravitační potenciální energie homogenní koule o poloměru  $R$ ? Výsledek vyjádřete pomocí hmotnosti celé koule  $M$  a jejího poloměru  $R$ .

$$E_p = \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}$$

## Kapitola 2

# Základy vektorové a tenzorové algebry

### 2.1 Vektory a matice

- **Vektorový počet:**

Základní operace s vektory lze (v ortonormálních bázích - viz odstavec 2.2) stručně zapsat následujícím způsobem:

- *Norma* (velikost) vektoru  $\vec{a}$  je definovaná (v  $\mathbb{R}^3$ ) jako

$$\|\vec{a}\| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_i a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

kde poslední forma zápisu předpokládá, že index  $i$  postupně „běží“ přes všechny složky 1, 2, 3, respektive  $x, y, z$  vektoru  $\vec{a}$ . Tato konvence pro tzv. *volné indexy* umožňuje podstatně stručnější zápis operací s vektory a maticemi (v této kapitole zatím pro jednoduchost nezavádíme tzv. *kovariantní* formu zápisu s horními a dolními indexy).

- *Vektorový součet* dvou vektorů  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$ , jehož explicitní forma zápisu je

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 = c_1, c_2, c_3, \quad (2.2)$$

lze pomocí uvedené konvence s použitím volného indexu  $i$  zapsat jako

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a_i \vec{e}_i + b_i \vec{e}_i = c_i \vec{e}_i, \quad \text{se složkami } a_i + b_i = c_i \text{ (vektor)}, \quad (2.3)$$

kde  $\vec{e}_i$  jsou vektory ortogonální (resp. ortonormální) báze (podrobněji viz odstavec 2.2).

- *Skalární součin* dvou vektorů  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  má v ortogonální bázi (viz odstavec 2.2) tvar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = \alpha \text{ (skalár)}, \quad (2.4)$$

kde indexy  $i, j$  opět „běží“ přes všechny složky obou vektorů a kde symbol  $\delta_{ij}$  (tzv. *Kroneckerovo delta* - podrobněji viz odstavec 2.3) nabývá hodnot  $\delta_{ij} = 1$  pro  $i = j$  a  $\delta_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ . Navíc je zde zavedena tzv. *Einsteinova sčítací* (sumační) *konvence*, která říká, že pokud se některý index v nějakém členu vektorové rovnice opakuje dvakrát (tzv. *sčítací*

*index*), členy s tímto indexem sčítáme a sumační symbol  $\sum$  je tak možné vynechat. Geometrický význam skalárního součinu v Eukleidovském prostoru lze zapsat jako

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi, \quad (2.5)$$

kde  $\varphi$  je úhel mezi oběma vektory.

- *Vektorový součin* dvou vektorů  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  je (obdobnou formou jako v rovnici (2.4)) v ortogonální bázi (viz odstavec 2.2) definován jako

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i = c_i \vec{e}_i \text{ (vektor)}, \quad (2.6)$$

kde indexy  $i, j, k$  označují jednotlivé složky vektorů  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Symbol  $\varepsilon_{ijk}$  (tzv. *Levi-Civita symbol* - podrobněji viz odstavec 2.3) nabývá hodnot  $\varepsilon_{ijk} = +1$  pro sudé permutace indexů (tj. 123, 231, 312),  $\varepsilon_{ijk} = -1$  pro liché permutace indexů (tj. 132, 213, 321) a  $\varepsilon_{ijk} = 0$  pro nulové permutace indexů (tj. pokud se některý z indexů opakuje). Geometrický význam velikosti vektorového součinu v Eukleidovském prostoru lze zapsat jako

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi, \quad (2.7)$$

kde  $\varphi$  je úhel mezi oběma vektory. Velikost vektorového součinu vyjadřuje plochu rovnoběžníka, jehož dvě sousední strany tvoří vektory  $\vec{a}, \vec{b}$ .

- *Smíšený součin* tří vektorů  $\vec{a}, \vec{b}$  a  $\vec{c}$  má, analogicky k rovnicím (2.4) a (2.6), v ortogonální bázi tvar

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \alpha \text{ (skalár)}, \quad (2.8)$$

kde indexy  $i, j, k$  označují jednotlivé složky vektorů  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Jeho hodnota vyjadřuje objem rovnoběžnostěny, jehož tři strany se společným vrcholem tvoří vektory  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

### • Maticový počet:

Základní pojmy maticového počtu a základní operace s maticemi lze stručně zapsat následujícím způsobem:

- *Násobení matice číslem*: Vynásobíme-li matici  $\mathbf{A}$  typu  $m \times n$  ( $m$  řádků a  $n$  sloupců) číslem  $\lambda \in \mathbb{C}$ , výsledkem bude matice  $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}$  typu  $m \times n$ , kdy pro každý prvek  $b_{ij}$  matice  $\mathbf{B}$  (prvek na  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci) platí

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}. \quad (2.9)$$

- *Součet matic*: Součtem dvou matic  $\mathbf{A}$  typu  $m \times n$  a  $\mathbf{B}$  typu  $m \times n$  bude matice  $\mathbf{C}$  typu  $m \times n$ , kdy pro každý prvek  $c_{ij}$  matice  $\mathbf{C}$  platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (2.10)$$

- *Násobení matic*: Součinem dvou matic  $\mathbf{A}$  typu  $m \times \ell$  a  $\mathbf{B}$  typu  $\ell \times n$  bude matice  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  typu  $m \times n$ , kdy pro každý prvek  $c_{ij}$  matice  $\mathbf{C}$  platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj}, \quad (2.11)$$

kde poslední výraz je zapsán pomocí Einsteinovy sumační konvence. Násobení matic není komutativní, obecně tedy platí  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ .

- *Hodnost matice* lze definovat jako počet lineárně nezávislých řádků, tj. počet nenulových řádků po provedení tzv. Gaussovy eliminace (úpravě na schodovitý tvar). Je-li hodnost  $h$  čtvercové matice  $\mathbf{A}$  (typu  $n \times n$ )  $h(\mathbf{A}) < n$ , jde o matici *singulární*, pokud  $h(\mathbf{A}) = n$ , jde o matici *regulární*.
- *Stopu čtvercové matice*  $\mathbf{A}$  lze definovat jako součet prvků na hlavní diagonále matice, tj. pro každý prvek  $a_{ij}$  matice  $\mathbf{A}$  platí

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{ij} = \sum_i a_{ii} = a_{ii}, \quad (2.12)$$

kde poslední výraz je zapsán pomocí Einsteinovy sumační konvence. Platí-li navíc  $\mathbf{A} = a_{ij} \delta_{ij}$ , jde o tzv. *diagonální* matici, platí-li  $\mathbf{A} = \delta_{ij}$ , jedná se o jednotkovou matici (značíme ji  $\mathbf{E}$  nebo  $\mathbf{1}$ ).

- *Transponovaná matice*  $\mathbf{A}^T$  vznikne z matice  $\mathbf{A}$  vzájemnou výměnou řádků a sloupců, pro jednotlivé prvky transponované matice platí  $a_{ij}^T = a_{ji}$ . Pokud platí  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , pak matici  $\mathbf{A}$  označujeme jako *symetrickou*, kde pro každý prvek platí  $a_{ij} = a_{ji}$ . Matici  $\mathbf{A}$  označujeme jako *antisymetrickou*, pokud pro každý její prvek platí  $a_{ij} = -a_{ji}$ , pro všechny prvky na hlavní diagonále proto musí platit  $a_{ij} \delta_{ij} = 0$  a tedy také  $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0$ .
- *Determinantem* čtvercové matice  $\mathbf{A}$  typu  $n \times n$  bude skalár  $\det \mathbf{A}$ , který lze obecně určit např. pomocí Levi-Civitova symbolu:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}, \quad (2.13)$$

dostáváme tak  $\det \mathbf{A} = a_{11}$  pro  $n = 1$ , pro  $n = 2$  bude  $\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$ , pro  $n = 3$  bude  $\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{31} a_{22} a_{13}$  (tzv. *Sarussovo pravidlo*). Determinant singulární matice  $\det \mathbf{A} = 0$ , determinant regulární matice  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

- *Inverzní maticí* k regulární čtvercové matici  $\mathbf{A}$  bude matice  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ , pokud platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}. \quad (2.14)$$

- *Hermiteovský sdružená matice* (značená obvykle  $\mathbf{A}^H$  v lineární algebře,  $\mathbf{A}^\dagger$  případně  $\mathbf{A}^+$  v kvantové mechanice) je označení pro matici komplexně sdruženou a transponovanou,

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T. \quad (2.15)$$

Pokud  $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$ , jedná se o matici reálnou. Pokud  $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ , mluvíme o tzv. *Hermiteovské matici*.

- *Unitární matice*  $\mathbf{U}$  je regulární čtvercová matice, jejíž hermiteovský sdružená matice je současně maticí inverzní, tj.  $\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^{-1}$  a tedy

$$\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{1}. \quad (2.16)$$

Reálná unitární matice  $\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^T$  je tzv. maticí *ortogonální*, kdy její řádky, respektive sloupce, tvoří *ortonormální* soustavu vektorů (viz kapitola 2.2).

- Číslo  $\lambda$  nazýváme *vlastní hodnotou* (vlastním číslem) a nenulový vektor  $\vec{v}$  nazýváme (pravým) *vlastním vektorem* čtvercové matice  $\mathbf{A}$  typu  $n \times n$ , pokud je splněna podmínka

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad (2.17)$$

matice  $\mathbf{A}$  tedy působí na vlastní vektor jako skalár, tj. nemění jeho směr (v případě tzv. levých vlastních vektorů bude mít podmínka (2.17) podobu  $\vec{v}\mathbf{A} = \lambda\vec{v}$ ). Z rovnice (2.17) přímo vyplývá relace pro určení vlastních hodnot matice  $\mathbf{A}$ , kdy soustava  $n$  lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{v} = \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}, \quad \text{tedy} \quad \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})v_j = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

má nenulové řešení právě tehdy, pokud je matice této soustavy singulární, tj. pokud

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \quad (2.19)$$

Vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním hodnotám potom určíme z rovnice (2.18). Pravé vlastní vektory budou mít tvar  $c_r(v_{1r}, v_{2r}, \dots, v_{nr})^T$ , levé vlastní vektory budou  $c_\ell(v_{1\ell}, v_{2\ell}, \dots, v_{n\ell})$ , kde  $c_r$  a  $c_\ell$  jsou libovolné konstanty.

- *Submatici* matice  $\mathbf{A}$  obdržíme vynecháním vybraných řádků a/nebo sloupců v matici  $\mathbf{A}$ . Determinant regulární čtvercové submatice se nazývá *subdeterminant* nebo také *minor*.

### • Příklady:

- 2.1 Jsou dány vektory  $\vec{a} = (0, 2, 4)$ ,  $\vec{b} = (1, 3, 5)$  a  $\vec{c} = (6, 1, 3)$ . Vypočítejte  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $|\vec{c}|$ ,  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ,  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ,  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$ ,  $(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} - \vec{b})$ ,  $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{c} \times \vec{a})^2$ .

$$\sqrt{20}, \sqrt{35}, \sqrt{46}, (-142, 16, -8), (14, -6, -26), -8, (4, -1, -3), 1400$$

- 2.2 Vypočítejte obsah rovnoběžníku, jehož vrcholy tvoří body A[0, 0, 0], B[1, 2, 3], C a D[3, 2, 1]. Dopačítejte souřadnice bodu C.

$$4\sqrt{6}, [4, 4, 4]$$

- 2.3 Body A[2, 1, 0], B[2, 2, 3], C[0, 1 +  $\sqrt{40}$ , 0] tvoří vrcholy trojúhelníku. Pomocí vektorového součinu najděte jeho obsah.

$$10$$

- 2.4 Body A[4, 1, 0], B[4, -2, -3], C[1, -5, -3] tvoří vrcholy trojúhelníku. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku a pomocí vektorového součinu vypočítejte jeho obsah.

$$\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

- 2.5 Body A[2, -4, 9], B[-1, -4, 5], C[6, -4, 6] tvoří vrcholy trojúhelníku. Pomocí vektorového součinu vypočítejte jeho obsah a určete velikost úhlu  $\alpha$ .

$$\frac{25}{2}, \frac{\pi}{4}$$



2.6 Jsou dány matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Vypočítejte  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ .

$$\begin{pmatrix} -12 & 37 \\ 48 & -33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 & 55 & 6 \\ 18 & -47 & 16 \\ 4 & -1 & 18 \end{pmatrix}$$

2.7 Vypočítejte inverzní matici k matici  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.8 Jsou dány matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Vypočítejte inverzní matici  $\mathbf{A}^{-1}$  a matici  $\mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ .

$$\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & 11 & -3 \\ 2 & -10 & 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -23 & 15 \end{pmatrix}$$

2.9 Vypočítejte determinant matice  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .  $2$

2.10 Vypočítejte determinant matice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .  $294$

2.11 Vypočítejte determinant matice  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 3 & 8 & 13 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ .  $120$

2.12 Vypočítejte hodnost matice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .  $2$

2.13 Vypočítejte hodnost matice  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .  $3$

2.14 Jsou dány matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 9 & 3 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Vypočítejte matice  $\mathbf{A} - \mathbf{B}^T - 3\mathbf{C}$ ,  $(3\mathbf{A}^T + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$  a determinanty  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{C}$ .

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -18 \\ -4 & -16 & -31 \\ -4 & -13 & -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 20 & 38 \\ 10 & 68 & 165 \\ 25 & 74 & 147 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 298 & 348 & 60 \\ 678 & 788 & 136 \\ 334 & 391 & 68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 71 & 216 & 443 \\ 187 & 556 & 1121 \\ 87 & 260 & 527 \end{pmatrix},$$

1, -174, 2

## 2.2 Báze a jejich transformace

Bázi vektorového prostoru  $V$  můžeme definovat jako množinu lineárně nezávislých vektorů, které tzv. generují vektorový prostor  $V$ , tj. kdy každý vektor z vektorového prostoru  $V$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto (bázových) vektorů. Významnou roli při praktických výpočtech hrají báze ortogonální, resp. ortonormální. *Ortogonalní báze* je speciálním případem obecné báze, kdy různé bázové vektory jsou na sebe kolmé. Pro bázové vektory  $\vec{x}_i, \vec{x}_j, i \neq j$  tedy platí

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = x_i x_j = 0, \quad \text{případně v algebraické notaci,} \quad (\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0. \quad (2.20)$$

*Ortonormální báze* je speciálním případem ortogonální báze, kdy všechny bázové vektory (značíme je v tomto případě  $\vec{e}_i$ , často se také používá  $\hat{\mathbf{x}}_i$ ) mají navíc jednotkovou velikost,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad \text{případně,} \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}. \quad (2.21)$$

Na příkladu obrázku 2.1 zkonstruujeme matice přechodu mezi bázemi a ukážeme princip reprezentace vektoru v různých bázích v  $\mathbb{R}^2$  (v případě vyšší dimenze vektorového prostoru bude postup zcela analogický). Jsou zavedeny dvě báze  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{F}$ , černá a červená, s bázovými vektory  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  a  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ , kdy černá báze je ortonormální, červená báze je zcela obecná. Přechod z černé báze  $\mathcal{E}$  do červené báze  $\mathcal{F}$  je zde dán vztahy (popisujícími vektorový součet)

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= 2,5 \vec{e}_1 + 0,5 \vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 &= 0,3 \vec{e}_1 + \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Můžeme tedy ihned napsat matici přechodu  $\mathbf{T}$  z báze  $\mathcal{E}$  do báze  $\mathcal{F}$ :

$$\mathbf{T}(\mathcal{E} \mapsto \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

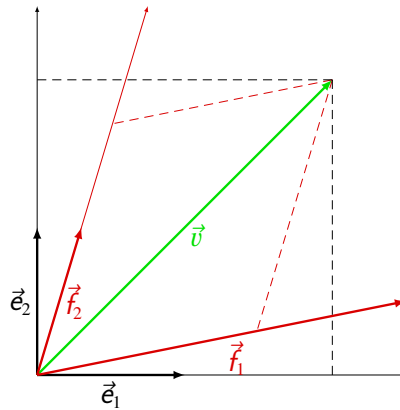
Matici přechodu (2.23, i všechny další) lze zapsat také pomocí sloupcového formalismu, tj. vektory  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$  budou zapsány jako sloupce. V takovém případě bude „sloupcově“ zapsaná matice přechodu násobit libovolný, rovněž sloupcový vektor (viz rovnice (2.29) v dalším výkladu), zapsaný za maticí. Ostatní dále popsané principy zůstanou nezměněné.

Z rovnic (2.22) snadno odvodíme rovnice pro  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , tedy rovnice opačného přechodu z červené báze  $\mathcal{F}$  do černé báze  $\mathcal{E}$ :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{20}{47} \vec{f}_1 - \frac{10}{47} \vec{f}_2, \\ \vec{e}_2 &= -\frac{6}{47} \vec{f}_1 + \frac{50}{47} \vec{f}_2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

V maticovém zápisu půjde o zpětnou matici přechodu  $\mathbf{S}$ , která je inverzní vůči matici  $\mathbf{T}$ , tedy  $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}$ :

$$\mathbf{S}(\mathcal{F} \mapsto \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \frac{20}{47} & -\frac{10}{47} \\ \frac{6}{47} & \frac{50}{47} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$



Obrázek 2.1: Schéma reprezentace vektoru  $\vec{v}$ , vyznačeného zelenou barvou, ve dvou různých bázích v  $\mathbb{R}^2$ , v černě vyznačené ortonormální bázi s bázovými vektory  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  a v červeně vyznačené obecné bázi s bázovými vektory  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ . Přechod z černé do červené báze je dán vztahy:  $\vec{f}_1 = 2,5\vec{e}_1 + 0,5\vec{e}_2$ ,  $\vec{f}_2 = 0,3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ . V černě vyznačené bázi má vektor  $\vec{v}$  složky o velikosti  $(2, 2)$ , velikost složek je zde znázorněna průmětem vektoru  $\vec{v}$  do směrů jednotlivých vektorů báze, zvýrazněným černými čárkovanými čarami a znamená poměr velikosti těchto průmětů ku velikosti příslušných bázových vektorů. Totéž platí v červeně vyznačené bázi, kde velikost složek je dána průmětem vektoru  $\vec{v}$  do směrů jednotlivých bázových vektorů, zvýrazněným červenými čárkovanými čarami. Velikost složek vektoru  $\vec{v}$  v červené bázi bude  $\left(\frac{28}{47}, \frac{80}{47}\right) \approx (0,6; 1,7)$ .

Daný (zelený) vektor  $\vec{v}$  má vodorovnou a svislou složku v černé bázi  $\mathcal{E}$  znázorněnou průmětem vektoru do vodorovné a svislé osy, tj. do směrů, které odpovídají bázovým vektorům  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ . Velikosti těchto složek budou odpovídat poměru délek těchto průmětů (vyznačených čárkované černě) a příslušných bázových vektorů, můžeme tedy vektor  $\vec{v}$  zapsat jako vektorový součet (v tomto případě předem zvolených) násobků vektorů báze  $\mathcal{E}$ , nebo pouze pomocí složek:

$$\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \text{nebo} \quad \vec{v} = (2, 2), \quad (2.26)$$

kdy ve druhém případě implicitně předpokládáme, že se „pohybujeme“ v bázi  $\mathcal{E}$ . Určení složek vektoru  $\vec{v}$  v červené bázi  $\mathcal{F}$  bude zcela obdobné. Průměty vektoru  $\vec{v}$  do směrů bázových vektorů  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$  jsou znázorněné čárkované červeně, velikosti složek budou opět odpovídat poměru délek těchto průmětů a příslušných bázových vektorů. Uvědomíme-li si, že vektor  $\vec{v}$  je jen jeden a tedy vektorový součet jeho složek musí být stejný bez ohledu na to ze které báze se na něj „díváme“, můžeme pro stanovení jeho složek v bázi  $\mathcal{F}$  například nejprve analogicky k rovnici (2.26) obecně napsat

$$\vec{v} = a\vec{f}_1 + b\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2. \quad (2.27)$$

Dosažením za vektory  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  z rovnice (2.24) dopočítáme velikosti složek  $a, b$ :

$$\vec{v} = \frac{28}{47}\vec{f}_1 + \frac{80}{47}\vec{f}_2, \quad \text{nebo} \quad \vec{v} = \left(\frac{28}{47}, \frac{80}{47}\right), \quad (2.28)$$

kdy ve druhém případě opět implicitně předpokládáme, že se „pohybujeme“ v bázi  $\mathcal{F}$ . Stejný výsledek dostaneme, vynásobíme-li vektor  $\vec{v}$ , zapsaný pomocí jeho složek v černé bázi  $\mathcal{E}$ , maticí

S přechodu z červené báze  $\mathcal{F}$  do černé báze  $\mathcal{E}$ :

$$(a, b) = (2, 2) \begin{pmatrix} \frac{20}{47} & -\frac{10}{47} \\ \frac{6}{47} & \frac{50}{47} \end{pmatrix} = \left( \frac{28}{47}, \frac{80}{47} \right). \quad (2.29)$$

Zpětnou transformaci můžeme ověřit vynásobením takto získaných složek  $(a, b)$  vektoru  $\vec{v}$  v bázi  $\mathcal{F}$  maticí  $\mathbf{T}$  přechodu z černé báze  $\mathcal{E}$  do červené báze  $\mathcal{F}$ , výsledkem musí být původní složky vektoru  $\vec{v}$  v bázi  $\mathcal{E}$ :

$$\left( \frac{28}{47}, \frac{80}{47} \right) \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 1 \end{pmatrix} = (2, 2). \quad (2.30)$$

V případě ortonormálních bází budou matice přechodu mezi nimi maticemi pouze rotačními, tedy ortogonálními. Musí tedy platit:  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$  a zároveň:  $\det \mathbf{T} = \det \mathbf{T}^{-1} = \pm 1$  (pokud  $\det \mathbf{T} = \det \mathbf{T}^{-1} = -1$ , jedná se o tzv. nepravou (nevlastní) rotaci, tedy rotaci spojenou se zrcadlením v rovině kolmé k ose rotace). Další podrobnosti, týkající se vektorového a maticového počtu včetně počítání s bázemi - viz příslušné kursy lineární algebry.

### • Příklady:

2.15 Nalezněte matice přechodu mezi standardní ortonormální bází (kartézské souřadnicové soustavy) a bází cylindrické souřadnicové soustavy.

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

2.16 Nalezněte matice přechodu mezi standardní ortonormální bází (kartézské souřadnicové soustavy) a bází sférické souřadnicové soustavy.

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}$$

2.17 Nalezněte matice přechodu při otočení dvourozměrné kartézské souřadnicové soustavy o úhel  $\alpha$  (tzv. matice rotace).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.18 Nalezněte matice  $\mathbf{G}$  Galileovy transformace časoprostoru. Galileova časoprostorová transformace je daná přiřazením  $(t, x, y, z)^T \mapsto (t', x', y', z')^T$ , kde  $t' = t$ ,  $x' = x - v_x t$ ,  $y' = y - v_y t$  a  $z' = z - v_z t$ , přičemž vektor  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  interpretujeme jako rychlost. Vynásobením matic dokažte vztah  $\mathbf{G}_{\mathbf{u}} \times \mathbf{G}_{\mathbf{v}} = \mathbf{G}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$  a vysvětlete proč se tento vztah nazývá *klasickým pravidlem skládání rychlostí*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x - u_x & 1 & 0 & 0 \\ -v_y - u_y & 0 & 1 & 0 \\ -v_z - u_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.19 Vektor  $\vec{a}$  má v *ortonormální* bázi  $\mathcal{B}$  v  $\mathbb{R}^2$  složky  $(11/2, -1)$ . Přejít mezi bázemi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 &= \frac{3}{2}\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Určete matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{B}'$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázi  $\mathcal{B}'$ . Je báze  $\mathcal{B}'$  ortonormální (uved'te důvod)? Nakreslete obrázek, znázorňující velikost a směr všech uvedených vektorů, tj. vektorů obou bází i vektoru  $\vec{a}$ .

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{4}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} & -\frac{8}{19} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (1, 1), \quad \text{báze } \mathcal{B}' \text{ není ortonormální.}$$

2.20 Vektor  $\vec{a}$  má v *ortonormální* bázi  $\mathcal{B}$  složky  $(1, 0, -2)$ . Přejít mezi bázemi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 - \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + 2\vec{e}'_3. \end{aligned}$$

Určete matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{B}'$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázi  $\mathcal{B}'$ . Je báze  $\mathcal{B}'$  ortonormální (uved'te důvod)?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (-3, -1, -5), \quad \text{báze } \mathcal{B}' \text{ není ortonormální.}$$

2.21 Vektor  $\vec{a}$  má v *ortonormální* bázi  $\mathcal{B}'$  složky  $(1, 2, -1)$ . Přejít mezi bázemi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_2 - \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + 2\vec{e}'_3. \end{aligned}$$

Určete matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{B}'$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázi  $\mathcal{B}$ . Je báze  $\mathcal{B}$  ortonormální (uved'te důvod)?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (3, 2, -1), \quad \text{báze } \mathcal{B} \text{ není ortonormální.}$$

2.22 Vektor  $\vec{a}$  má v *ortonormální* bázi  $\mathcal{B}'$  složky  $(1, 1, 1)$ . Přejít mezi bázemi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2 - 3\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 - \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3. \end{aligned}$$

Určete matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{B}'$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázi  $\mathcal{B}$ . Je báze  $\mathcal{B}$  ortonormální (uved'te důvod)?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (0, 2, 3), \text{ báze } \mathcal{B} \text{ není ortonormální.}$$

2.23 Vektor  $\vec{a}$  má ve standardní kartézské bázi  $\mathcal{E}$  složky  $(1, -\sqrt{3}, 1)$ . Dále jsou zadány dvě báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ , přičemž matice  $\mathbf{R}$  přechodu z báze  $\mathcal{E}$  do báze  $\mathcal{B}'$  má tvar

$$\mathbf{R}(\mathcal{E} \mapsto \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přechod mezi bázemi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2 - 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_2 + 3\vec{e}'_3. \end{aligned}$$

Určete matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{B}'$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázích  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ . Jsou báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  ortonormální (uveďte důvod) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (0, -2, 1), \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (15, -2, 11),$$

$\mathcal{B}'$  ano,  $\mathcal{B}$  ne.

2.24 Vektor  $\vec{a}$  má ve standardní kartézské bázi  $\mathcal{E}$  složky  $(1, 1, 1)$ . Dále jsou zadány dvě báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ , přičemž matice  $\mathbf{R}$  přechodu z báze  $\mathcal{E}$  do báze  $\mathcal{B}'$  má tvar

$$\mathbf{R}(\mathcal{E} \mapsto \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Přechod z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2. \end{aligned}$$

Určete matici  $\mathbf{R}^{-1}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{E}$ , matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{E}$  do báze  $\mathcal{B}$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{E}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázích  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ . Jsou báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  ortonormální (uveďte důvod) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (2, 1, 0), \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (-3, 3, 4),$$

$\mathcal{B}'$  ne,  $\mathcal{B}$  ne.

2.25 Vektor  $\vec{a}$  má ve standardní kartézské bázi  $\mathcal{E}$  složky  $(1, 1, 1)$ . Dále jsou zadány dvě báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ , přičemž matice  $\mathbf{R}$  přechodu z báze  $\mathcal{E}$  do báze  $\mathcal{B}'$  má tvar

$$\mathbf{R}(\mathcal{E} \mapsto \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Přechod z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  je dán vztahy

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2.\end{aligned}$$

Určete matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{E}$  do báze  $\mathcal{B}$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{E}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázích  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ . Jsou báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  ortonormální (uved'te důvod) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (-1, 1, -1), \quad \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (-2, 1, 3),$$

$\mathcal{B}'$  ano,  $\mathcal{B}$  ne.

2.26 Vektor  $\vec{a}$  má ve standardní kartézské bázi  $\mathcal{E}$  složky  $(1, 1, 2)$ . Dále jsou zadány dvě báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ , přičemž matice  $\mathbf{R}$  přechodu z báze  $\mathcal{E}$  do báze  $\mathcal{B}'$  má tvar

$$\mathbf{R}(\mathcal{E} \mapsto \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přechod z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  je dán vztahy

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= -\vec{e}'_2 - 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{2}\vec{e}'_1 - \frac{3}{2}\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_2 + 3\vec{e}'_3.\end{aligned}$$

Určete matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{E}$  do báze  $\mathcal{B}$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{E}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázích  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ . Jsou báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  ortonormální (uved'te důvod)? Je báze  $\mathcal{B}'$  ortogonální (prokažte) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (-9, 2, -6), \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (1, 0, 2),$$

$\mathcal{B}'$  ne,  $\mathcal{B}$  ne. Ano.

## 2.3 Tenzorový počet

Kromě skalárů a vektorů (tj. tenzorů nultého a prvního řádu) existují složitější algebraické struktury, tedy *tenzory* vyšších řádů. Z nich nejběžnější a nejjednodušší jsou tzv. tenzory druhého řádu, které obvykle popisují fyzikální pole s tzv. smykovými účinky (reprezentovanými nediagonálními prvky v příslušném tenzoru) v mechanice kontinua, například tenzor deformace, tenzor napětí, atd. Tak jako každý obecný vektor  $\vec{v}$  je tvořen třemi skalárními složkami  $(v_1, v_2, v_3)$ , je obecný tenzor 2. řádu  $\mathbf{T}$  tvořen třemi „vektorovými“ složkami  $(\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3)$ , které lze obecně zapsat,

$$T_i = \begin{pmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \\ T_{3i} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

kde každý ze tří vektorů  $T_i$  je zapsán pomocí tří složek. Zapišeme-li tenzor  $\mathbf{T}$  formou explicitního maticového zápisu,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

je každý ze tří vektorů  $T_i$  reprezentován jedním sloupcem matice (2.32). Analogicky ke způsobu zápisu vektoru pomocí složky a jednotkového bázového vektoru (v Einsteinově notaci)  $\vec{v} = v_i \vec{e}_i$  můžeme tenzor zapsat jako

$$\mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \quad \text{nebo} \quad \mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j. \quad (2.33)$$

Symbol  $\otimes$  značí tzv. *tenzorový* (dyadický) *součin*, tedy součin dvou vektorů stejné dimenze, kdy první z nich je sloupcový a druhý řádkový (jedná se tedy o součin matic typu  $3 \times 1$  a  $1 \times 3$  s výslednou maticí typu  $3 \times 3$ , na rozdíl od skalárního součinu, který můžeme obdobně vyjádřit jako součin řádkové a sloupcové matice typu  $1 \times 3$  a  $3 \times 1$  s výslednou maticí typu  $1 \times 1$ , tedy skalárem). Dyadický součin je speciálním případem tzv. *vnějšího* součinu dvou vektorů, které nemusí mít stejnou dimenzi. Z rovnice (2.33) zároveň vyplývá, že prvek  $T_{ij}$  tenzoru  $\mathbf{T}$  můžeme určit (tak jako složku  $v_i$  vektoru  $\vec{v}$  lze určit skalárním součinem,  $v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$ ) pomocí dvojitého skalárního součinu

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{e}_j. \quad (2.34)$$

Tenzorovým (dyadickým) součinem dvou vektorů  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  je tedy tenzor  $\mathbf{T}$ , pro jehož prvek  $T_{ij}$  platí

$$T_{ij} = v_i w_j. \quad (2.35)$$

Tenzorový součin má následující vlastnosti:

$$\bullet \quad \vec{v} \otimes \vec{w} \neq \vec{w} \otimes \vec{v} \quad (2.36)$$

$$\bullet \quad \vec{u} \otimes (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \vec{u} \otimes \vec{v} + \beta \vec{u} \otimes \vec{w}, \quad (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \otimes \vec{w} = \alpha \vec{u} \otimes \vec{w} + \beta \vec{v} \otimes \vec{w} \quad (2.37)$$

$$\bullet \quad (\vec{u} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}, \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \quad (2.38)$$

Jednotlivé *dyády* (dvojice), tedy tzv. *bázové tenzory*  $\vec{e}_i \vec{e}_j$  v rovnici (2.33) můžeme explicitně vyjádřit maticovým zápisem (v kartézské bázi),

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_1 \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_1 \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_2 \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_2 \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_2 \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_3 \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_3 \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_3 \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ne každý tenzor 2. řádu můžeme obecně vyjádřit jako tenzorový součin dvou vektorů, každý tenzor 2. řádu můžeme ovšem napsat jako lineární kombinaci tenzorového součinu vektorů (obdobně jako jsme jej napsali pomocí tenzorového součinu jednotkových bázových vektorů v rovnici (2.33)).



• **Kroneckerovo delta:**

Tzv. Kroneckerovo delta je matematická funkce, značená symbolem  $\delta_{ij}$ , určená následujícím způsobem:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i = j, \\ 0, & \text{pokud } i \neq j. \end{cases} \quad (2.40)$$

Kroneckerovo delta lze zavést i jako tzv. Kroneckerův tenzor 2. řádu  $\delta_j^i$  pro  $i, j = 1, 2, 3$  (význam horních a spodních indexů je popsán níže v odstavci „Kovariantní a kontravariantní transformace, duální tenzor“), definovaný jako

$$\delta_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \quad (2.41)$$

Některé důležité vlastnosti funkce Kroneckerovo delta:

- Ortonormalitu vektorů  $\vec{e}_i, \vec{e}_j$  můžeme vyjádřit jako  $e_i e_j \delta_{ij}$ .
- $\delta_{ii} = 3$ , stopa Kroneckerova tenzoru  $\delta_i^i = 3$ .
- Kroneckerovo delta  $\delta_{ij}$  zaměňuje indexy složek vektorů nebo prvků tenzorů, například

$$v_i \delta_{ij} = v_j \quad \text{nebo obecně} \quad T_{ij \dots k \dots z} \delta_{kl} = T_{ij \dots l \dots z}. \quad (2.42)$$

- Redukce (úžení) dvou funkcí  $\delta_{ij} \delta_{jk}$  s jedním společným indexem  $j$  na výslednou funkci  $\delta_{ik}$ , úžení dvou funkcí se dvěma společnými indexy  $i, j$  na výslednou funkci  $\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$ .
- Kroneckerovo delta  $\delta_{ij}$  redukuje (úží) sumaci (tj. odstraňuje jednu sumu), kdy například

$$\sum_i \sum_j A_{ij} \delta_{ij} = \sum_i A_{ii}, \quad \sum_j \sum_k A_{jk} \delta_{jk} \delta_{ij} = \sum_j A_{jj} \delta_{ij} = A_{ij}. \quad (2.43)$$

• **Antisymetrický** (permutační nebo také Levi-Civitův) **symbol:**

Tzv. *antisymetrický* (také Levi-Civitův - viz oddíl 2.1) symbol, značený  $\varepsilon_{ijk}$ , je definován způsobem

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{pokud } ijk \text{ jsou sudé permutace, tedy } ijk = 123, 231, 312, \\ -1, & \text{pokud } ijk \text{ jsou liché permutace, tedy } ijk = 132, 213, 321, \\ 0, & \text{pokud } ijk \text{ jsou nulové permutace, tedy pokud } i = j \vee j = k \vee k = i. \end{cases} \quad (2.44)$$

Některé důležité vlastnosti Levi-Civitova symbolu  $\varepsilon_{ijk}$ :

- Umožňuje stanovit výraz pro determinant obecné čtvercové regulární matice  $\mathbf{A}$  libovolného řádu (je popsán v rovnici (2.13)). Například pro matici  $\mathbf{A}$  řádu  $3 \times 3$  potom dostáváme

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}. \quad (2.45)$$

- Velmi užitečná při výpočtech (například vektorových identit nebo působení diferenciálních operátorů) je také souvislost mezi Levi-Civitovým symbolem  $\varepsilon_{ijk}$  a Kroneckerovou funkcí  $\delta_{ij}$ . Z definice Levi-Civitova symbolu (2.44) jasně vyplývá, že společným působením dvou symbolů  $\varepsilon_{ijk}$  a  $\varepsilon_{lmn}$  dostáváme identitu

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}, \quad (2.46)$$

kteřou můžeme kompaktním způsobem zapsat pomocí maticového formalismu ve tvaru

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

- Z rovnice (2.47) a ze zúžení Kroneckerových funkcí delta se společnými indexy dále vyplývá, že působení dvou Levi-Civitových symbolů  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$  s jedním společným indexem  $k$  zjednoduší rovnici (2.46) do podoby

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \quad (2.48)$$

- V případě dvou, případně všech tří společných indexů dostaneme

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{il}, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6. \quad (2.49)$$

- Levi-Civitův symbol můžeme definovat i pro  $n$ -rozměrný prostor, v tom případě bude obsahovat  $n$  různých indexů, přičemž sudé permutace budou vytvářeny sudým počtem číselných záměn, liché permutace lichým počtem číselných záměn (celkový počet nenulových permutací je  $n!$ ). Například sudé permutace symbolu  $\varepsilon_{ijkl}$  ve čtyřrozměrném prostoročase budou  $\varepsilon_{0123}$ ,  $\varepsilon_{0231}$ ,  $\varepsilon_{0312}$ ,  $\varepsilon_{1032}$ ,  $\varepsilon_{1320}$ ,  $\varepsilon_{1203}$ ,  $\varepsilon_{2130}$ ,  $\varepsilon_{2301}$ ,  $\varepsilon_{2013}$ ,  $\varepsilon_{3210}$ ,  $\varepsilon_{3102}$ ,  $\varepsilon_{3021}$ . Ostatních 12 permutací (bez opakování) bude tedy lichých.

### • Příklad působení diferenciálních operátorů na tenzorové pole:

- Gradient (viz odstavec 5.3) tenzoru zvyšuje tzv. řád tenzoru, tj. například z vektoru (tenzoru 1. řádu) vytvoří tenzor 2. řádu, z tenzoru 2. řádu tenzor 3. řádu, atd. Gradient tenzoru  $\mathbf{T}$  druhého řádu můžeme v kartézské souřadné soustavě s konstantními vektory báze (viz příloha A) obecně zapsat,

$$\vec{\nabla} \mathbf{T} = \frac{\partial(T_{jk}\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k)}{\partial x_i} \otimes \vec{e}_i = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_i, \quad (2.50)$$

kdy dvojitý tenzorový součin vytvoří tenzor 3. řádu (s odpovídající reprezentací pomocí 3D matice typu  $3 \times 3 \times 3$ , respektive „obyčejné“ matice typu  $9 \times 3$ ) s prvky  $T_{jki}$ .

- Divergence (viz odstavec 5.3) tenzoru snižuje řád tenzoru, tj. například z tenzoru 2. řádu vytvoří vektor, z vektoru skalár, atd. Divergenci tenzoru  $\mathbf{T}$  druhého řádu můžeme v kartézské souřadné soustavě s konstantními vektory báze (viz příloha A) obecně zapsat,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i, \quad (2.51)$$

kdy explicitní tvar rovnice (2.51) bude v kartézském systému vypadat (viz také rovnice (A.17) v příloze A),

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z}, \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z}, \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

• **Kovariantní a kontravariantní transformace, duální tenzor:**

Působením metrického tenzoru dané soustavy (viz například rovnice (A.4), (A.3), (A.36) a (A.63) v příloze A) transformujeme složky vektorových a tenzorových veličin mezi tzv. *ko-variantní* a *kontravariantní* bází, které rozlišují kvantitativní chování dané geometrické nebo fyzikální entity při změně báze. Abychom zachovali velikost vektoru jako takovou, musí být složky vektorů (například polohy nebo rychlosti), jejichž rozměr je přímo úměrný měřítku báze, *kontra-variantní* vůči bázevým vektorům, zapisujeme je  $\vec{V} = V^i \vec{e}_i$ . Naopak, složky tzv. *duálních* vektorů, nazývaných také *kovektory* (například vektor gradientu, který má rozměr prostorové derivace, respektive vzdálenosti<sup>-1</sup>), musí být *ko-variantní* vůči změně báze, zapisujeme je  $\vec{V} = V_i \vec{e}^i$ . V zápisu se tedy formálně odlišují *spodní* nebo *horní* polohou indexů. V ortogonálních souřadných soustavách pro tzv. *kovariantní metrický tenzor* platí  $g_{ij} = h_i h_j \delta_{ij}$  (viz tzv. *Laméovy koeficienty*, rovnice (A.11)). Pro tzv. *kontravariantní metrický tenzor*  $g^{ij}$  vždy platí  $g_{ij} g^{ij} = \mathbf{1}$ , tedy  $g^{ij} = g_{ij}^{-1}$ . Obecné a explicitní vyjádření transformace vektoru  $V_i$  z kovariantní do kontravariantní báze lze tedy zapsat způsobem (viz Einsteinova sumační konvence):

$$V^j = g^{ji} V_i = g^{j1} V_1 + g^{j2} V_2 + g^{j3} V_3. \quad (2.53)$$

Transformaci kovariantního tenzoru 2. řádu  $T_{ij}$  do kontravariantní báze zapíšeme následovně:

$$T_i^j = g^{jk} T_{ki} = g^{j1} T_{1i} + g^{j2} T_{2i} + g^{j3} T_{3i} \quad (\text{smíšený ko- a kontravariantní tenzor}), \quad (2.54)$$

$$T^{ij} = g^{im} g^{jn} T_{mn} = g^{i1} g^{j1} T_{11} + g^{i1} g^{j2} T_{12} + g^{i1} g^{j3} T_{13} + g^{i2} g^{j1} T_{21} + \dots + g^{i3} g^{j3} T_{33}. \quad (2.55)$$

Analogickým způsobem proběhne transformace tenzorů libovolného vyššího řádu.

V trojrozměrném prostoru jsou rozlišovány tzv. *axiální vektory* (*pseudovektory*), které se nezrcadlí spolu se souřadnou soustavou (na rozdíl od tzv. *polárních* neboli *pravých* vektorů, které se zrcadlí) a které můžeme definovat jako pseudovektor  $V_i$  duální k antisymetrickému tenzoru  $T_{jk}$ ,

$$V_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_{jk}, \quad \text{kde } T_{jk} = A_j B_k - A_k B_j, \quad (2.56)$$

(de facto se tedy jedná o rotaci vektorů  $\vec{V} = \vec{A} \times \vec{B}$ ). Obdobným způsobem definujeme ve čtyřrozměrném prostoročase antisymetrický pseudotenzor 2. řádu (značíme  $*T$ ), který je duální s antisymetrickým tenzorem 2. řádu a antisymetrický pseudotenzor 3. řádu, který je duální s vektorem:

$$*T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T_{\rho\sigma}, \quad *T^{\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} V_\sigma, \quad (2.57)$$

kde ovšem pro výchozí permutace Levi-Civitova symbolu v kovariantní a kontravariantní bázi (v rámci zde zavedené konvence, viz příklad 2.40, viz také například Lenc (2001)) platí  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{0123} = -1$ ,  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{0123} = 1$ .

• **Příklady:**

2.27 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte vektorovou identitu  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ .

Pomocí rovnic (2.6) a (2.42).

2.28 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte identitu pro smíšený součin  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = 0$ .

Pomocí rovnice (2.8).

2.29 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte identitu pro smíšený součin  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ .

Pomocí rovnice (2.8).

2.30 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte vektorovou identitu  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$ .

Pomocí rovnic (2.6) a (2.48).

2.31 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte vektorovou identitu  $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{C} [\vec{D} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})] - \vec{D} [\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})]$ .

Pomocí rovnic (2.6) a (2.48).

2.32 Dokažte, že:

(a)  $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = 2!$

(b)  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 3!$

(c)  $\varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijkl} = 4!$

(d) Odhadněte výsledek  $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}$ .

Pomocí rovnic (2.46) a (2.47).

2.33 Jednotlivé členy tzv. Cauchyho tenzoru deformace  $E_{ij}$  (popisujícího malé deformace) lze pomocí indexů zapsat jako

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

kde  $i, j = 1, 2, 3$  a  $v_i, v_j$  jsou složky vektoru rychlosti. V Einsteinově notaci napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru, napište také explicitní výraz pro 1. vektorovou složku této divergence.

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad \frac{\partial E_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial E_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{xz}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ \Delta v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right].$$

2.34 Jednotlivé členy tzv. Greenova-Lagrangeova tenzoru deformace  $E_{ij}$  (popisujícího libovolně velké deformace) lze pomocí indexů zapsat jako

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right),$$

kde  $i, j, k = 1, 2, 3$  a  $v_i, v_j, v_k$  jsou složky vektoru rychlosti. V Einsteinově notaci napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru.

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j^2} \right).$$

2.35 Tzv. tenzor napětí  $T_{ij}$  lze zapsat například formou

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

kde  $i, j = 1, 2, 3$  a  $v_i, v_j$  jsou složky vektoru rychlosti,  $p$  je skalární veličina (skalární tlak) a  $\eta$  je konstanta (koeficient dynamické viskozity). Pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru.

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta \left[ \Delta \vec{v} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right].$$

2.36 Tzv. tenzor viskózního (stříhového) napětí  $\sigma_{ij}$  lze zapsat například formou

$$\sigma_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

kde  $i, j, k = 1, 2, 3$ ,  $v_i, v_j, v_k$  jsou složky vektoru rychlosti a  $\eta$  i  $\lambda$  jsou konstanty (koeficient dynamické viskozity, koeficient dilatační viskozity). Pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} = \eta \Delta \vec{v} + (\eta + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}).$$

2.37 Kovariantní metrický tenzor  $g_{ij}$  válcové souřadné soustavy v pořadí souřadnicových směrů  $r, \phi, z$ , je vyjádřen maticí (viz rovnice (A.36))

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obdobný kovariantní metrický tenzor kulové souřadné soustavy v pořadí souřadnicových směrů  $r, \theta, \phi$ , je vyjádřen maticí (viz rovnice (A.63))

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Určete:

- (a) všechny nenulové tzv. *Christoffelovy symboly*  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  válcové soustavy (určující křivost dané metriky), které jsou obecně definovány předpisem (viz také rovnice (A.12))

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left( \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \right),$$

- (b) všechny nenulové Christoffelovy symboly kulové soustavy, definované rovněž předpisem (A.12),

- (c) explicitní tvar vektoru rotace vektoru  $\vec{A}$  ve válcové soustavě, obecně daný předpisem (viz také rovnice (A.20))

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) \right] \vec{e}_i,$$

- (d) explicitní tvar vektoru rotace vektoru  $\vec{A}$  v kulové soustavě, obecně daný stejným předpisem.

(a)  $\Gamma_{\phi\phi}^r = -r, \Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r},$

(b)  $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta, \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cotg \theta,$

- (c) viz relace (A.45) v příloze A,

- (d) viz relace (A.71) v příloze A.

2.38 Jsou zadány kovariantní tenzor  $A_{ij}$  a kovariantní metrický tenzor  $g_{ij}$  dané souřadné soustavy, v pořadí souřadnicových směrů  $r, \theta, \phi$ , ve tvaru

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Určete:

- (a) smíšený metrický tenzor  $g_j^i$  a smíšený tenzor  $A_j^i$ ,  
 (b) kontravariantní tenzor  $A^{ij}$ .

(a)  $g_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_j^i, \quad A_j^i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{a_{21}}{r^2} & \frac{a_{22}}{r^2} & \frac{a_{23}}{r^2} \\ \frac{a_{31}}{r^2 \sin^2 \theta} & \frac{a_{32}}{r^2 \sin^2 \theta} & \frac{a_{33}}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix},$

(b)  $A^{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{21}}{r^2} & \frac{a_{31}}{r^2 \sin^2 \theta} \\ \frac{a_{12}}{r^2} & \frac{a_{22}}{r^4} & \frac{a_{32}}{r^4 \sin^2 \theta} \\ \frac{a_{13}}{r^2 \sin^2 \theta} & \frac{a_{23}}{r^4 \sin^2 \theta} & \frac{a_{33}}{r^4 \sin^4 \theta} \end{pmatrix}.$

2.39 Ve čtyřrozměrném prostoru (prostorůce) jsou zadány kovariantní tenzor  $A_{\mu\nu}$  a kovariantní metrický tenzor  $g_{\alpha\beta}$  dané souřadné soustavy, v pořadí souřadnicových směrů  $t, u, v, w$ , ve tvaru

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w \\ 0 & 0 & u^2 & 0 \\ 0 & w & 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Určete:

- (a) kontravariantní metrický tenzor  $g^{\alpha\beta}$  a smíšený metrický tenzor  $g_{\beta}^{\alpha}$ ,  
 (b) smíšený tenzor  $A_{\nu}^{\mu}$ ,  
 (c) kontravariantní tenzor  $A^{\mu\nu}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } g^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u^2}{u^2 - w^2} & 0 & \frac{w}{w^2 - u^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u^2} & 0 \\ 0 & \frac{w}{w^2 - u^2} & 0 & \frac{1}{u^2 - w^2} \end{pmatrix}, \quad g_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} = \delta_{\beta}^{\alpha}, \\
 \text{(b) } A_{\nu}^{\mu} &= \begin{pmatrix} -a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ \frac{u^2 a_{10} - w a_{30}}{u^2 - w^2} & \frac{u^2 a_{11} - w a_{31}}{u^2 - w^2} & \frac{u^2 a_{12} - w a_{32}}{u^2 - w^2} & \frac{u^2 a_{13} - w a_{33}}{u^2 - w^2} \\ \frac{a_{20}}{u^2} & \frac{a_{21}}{u^2} & \frac{a_{22}}{u^2} & \frac{a_{23}}{u^2} \\ \frac{w a_{10} - a_{30}}{w^2 - u^2} & \frac{w a_{11} - a_{31}}{w^2 - u^2} & \frac{w a_{12} - a_{32}}{w^2 - u^2} & \frac{w a_{13} - a_{33}}{w^2 - u^2} \end{pmatrix}, \\
 \text{(c) } A^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{u^2 a_{10} - w a_{30}}{w^2 - u^2} & -\frac{a_{20}}{u^2} & \frac{w a_{10} - a_{30}}{u^2 - w^2} \\ \frac{u^2 a_{01} - w a_{03}}{w^2 - u^2} & \frac{u^4 a_{11} + w^2 a_{33} - u^2 w \mathcal{S}}{(w^2 - u^2)^2} & \frac{u^2 a_{21} - w a_{23}}{u^2(u^2 - w^2)} & \frac{u^2 a_{31} + w^2 a_{13} - w \mathcal{T}}{(u^2 - w^2)^2} \\ -\frac{a_{02}}{u^2} & \frac{u^2 a_{12} - w a_{32}}{u^2(u^2 - w^2)} & \frac{a_{22}}{u^4} & \frac{a_{32} - w a_{12}}{u^2(u^2 - w^2)} \\ \frac{w a_{01} - a_{03}}{u^2 - w^2} & \frac{u^2 a_{13} + w^2 a_{31} - w \mathcal{T}}{(u^2 - w^2)^2} & \frac{a_{23} - w a_{21}}{u^2(u^2 - w^2)} & \frac{a_{33} + w^2 a_{11} - w \mathcal{S}}{(w^2 - u^2)^2} \end{pmatrix}, \\
 &\text{kde } \mathcal{T} = u^2 a_{11} + a_{33} \text{ a } \mathcal{S} = a_{13} + a_{31}.
 \end{aligned}$$

2.40 Kovariantní tenzor elektromagnetického pole  $F_{\mu\nu}$  je definován,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}},$$

kde tzv. *čtyřpotenciál* (čtyřvektor elektromagnetického potenciálu)  $A_{\mu} = \left( \frac{\phi}{c}, -\vec{A} \right)$ .

Složka  $A_0 = \frac{\phi}{c}$  vyjadřuje škálovaný skalární potenciál elektrického pole a složky  $A_1, A_2, A_3$  tvoří tzv. vektorový (magnetický) potenciál. Kovariantní čtyřvektor souřadnic události zapíšeme jako  $x_{\mu} = (ct, -\vec{r})$ . Metrický tenzor (*Minkowského*) plochého čtyřprostoru (prostor času) má tvar

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vektory elektrické intenzity a magnetické indukce jsou definovány jako

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Napište:

- (a) explicitní podobu tenzoru  $F_{\mu\nu}$  a tenzoru  $F^{\mu\nu}$ ,
- (b) duální tenzor  $*F_{\mu\nu}$  a duální tenzor  $*F^{\mu\nu}$ ,
- (c) tzv. *invarianty* elektromagnetického pole  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  a  $F_{\mu\nu}*F^{\mu\nu}$ ,
- (d) pomocí „čtyřrozměrné“ divergence

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial *F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

odvoďte 1. pár Maxwellových rovnic,

- (e) pomocí „čtyřrozměrné“ divergence

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\mu_0 j^\mu,$$

kde  $j^\mu$  je kontravariantní čtyřvektor proudové hustoty  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ , odvoďte 2. pár Maxwellových rovnic.

$$(a) \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad *F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}, \quad *F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2 \left( \frac{E^2}{c^2} - B^2 \right), \quad F_{\mu\nu}*F^{\mu\nu} = 4 \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c},$$

$$(d) \quad \frac{\partial *F^{\mu 0}}{\partial x^0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial *F^{\mu i}}{\partial x^i} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(e) \quad \frac{\partial F^{\mu 0}}{\partial x^0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \frac{\partial F^{\mu i}}{\partial x^i} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \vec{j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}.$$

2.41 Kontravariantní tenzor energie-hybnosti  $T^{\alpha\beta}$  pro makroskopickou ideální tekutinu je definován

$$T^{\alpha\beta} = \left( \frac{\rho}{c^2} + p \right) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta},$$

kde  $\rho$  je hustota,  $p$  je skalární tlak a  $u^\mu$  je tzv. *čtyřrychlost* (čtyřvektor rychlosti), definovaná jako tečna k tzv. *světováře*  $s$ , tedy  $u^\mu = dx^\mu/ds$ , kde  $s = c\tau$ . Tzv. *vlastní*



čas  $\tau$  v soustavě spojené s pohybujícím se tělesem je pomocí tzv. souřadnicového času  $t$  (tj. „normálního“ času pozorovatele) definován jako  $t = \gamma\tau$ , kde tzv. Lorentzův faktor  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  (viz také příklad 8.5). Čtyřvektor události  $x^\mu$  a metrický tenzor Minkowského prostoročasu  $g^{\mu\nu}$  lze odvodit pomocí jejich definice v příkladu 2.40. Napište:

- (a) explicitní podobu tenzoru  $T^{\alpha\beta}$  a tenzoru  $T_{\alpha\beta}$ ,  
 (b) explicitní podobu těchto tenzorů v soustavě (0), spojené s pohybující se tekutinou.

Pomocí výrazů:  $W = \frac{\gamma^2}{c^2}(\rho + pv^2)$ ,  $\vec{S} = \gamma^2\left(\frac{\rho}{c^2} + p\right)\vec{v}$ ,  $\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{\rho}{c^2} + p\right)v^\alpha v^\beta + p\delta^{\alpha\beta}$ ,  
 $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{\rho}{c^2} + p\right)v_\alpha v_\beta + p\delta_{\alpha\beta}$ , můžeme zapsat,

$$(a) \quad T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} W & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} W & -\frac{S_x}{c} & -\frac{S_y}{c} & -\frac{S_z}{c} \\ -\frac{S_x}{c} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ -\frac{S_y}{c} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ -\frac{S_z}{c} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad T^{\alpha\beta}(0) = T_{\alpha\beta}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$



## Kapitola 3

# Obyčejné diferenciální rovnice<sup>1</sup>

### 3.1 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obyčejnými lineárními diferenciálními rovnicemi nazýváme rovnice, obsahující derivace funkce jedné nezávislé proměnné (zpravidla značíme  $x$ , závisle proměnnou obvykle značíme  $y(x)$ ) v obecném tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x) = f(x), \quad (3.1)$$

kde  $y^{(k)}$  značí  $k$ -tou derivaci funkce  $y(x)$ . Členy  $a_k(x)$  jsou *koefficienty*, které mohou být funkcemi proměnné  $x$ , pokud jsou konstantní, mluvíme o diferenciální rovnici s *konstantními koefficienty*, a funkce  $f(x)$  představuje pravou stranu diferenciální rovnice. Pokud  $f(x) = 0$ , potom se jedná o *homogenní diferenciální rovnici* (rovnici bez pravé strany). Diferenciální rovnice s derivacemi funkcí více nezávislých proměnných nazýváme *parciální* diferenciální rovnice (viz příloha B). *Řád* diferenciální rovnice je dán nejvyšším řádem derivace závisle proměnné  $y(x)$ , který se v rovnici vyskytuje, v případě rovnic 1. řádu půjde o 1. derivaci  $y' = dy/dx$ .

#### 3.1.1 Rovnice separovatelné a homogenní

Pokud lze diferenciální rovnici 1. řádu vyjádřit v jednoduchém tvaru  $y' = f(x)$ , řešíme ji přímou integrací, tj.

$$y = \int f(x) dx. \quad (3.2)$$

Pokud lze diferenciální rovnici 1. řádu vyjádřit ve tvaru  $y' = f(x)g(y)$ , kde  $g(y) \neq 0$ , řešíme ji rozdělením funkcí s nezávisle proměnnou  $x$  a se závisle proměnnou  $y$  na různé strany rovnice (*separací proměnných*), tedy

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx. \quad (3.3)$$

Funkci  $f(x, y)$  nazýváme *homogenní*,  $n$ -tého stupně, pokud pro všechna  $x, y$  a pro všechna  $z > 0$ , kde  $z$  je libovolný parametr, platí  $f(zx, zy) = z^n f(x, y)$ . Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Návody k řešení různých speciálních typů diferenciálních rovnic je možné nalézt v literatuře, např. v publikacích: Plch (2002), Bartsch (2008), Rektorys (2009).

je homogenní, pokud  $M(x, y)$  a  $N(x, y)$  jsou homogenní funkce stejného stupně. Pokud je homogenní rovnice zapsána v obecném tvaru (3.4), resp. ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (3.5)$$

řešíme ji vhodnou substitucí, například  $y = zx$  a převedeme na separovatelnou rovnici. Obdobně rovnici ve tvaru

$$y' = f(ax + by + c) \quad (3.6)$$

převedeme na rovnici se separovatelnými proměnnými pomocí substituce  $z = ax + by + c$ . Rovnice ve tvaru racionální funkce

$$y' = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}, \quad (3.7)$$

pokud výrazy  $ax + by$ ,  $Ax + By$  nejsou lineárně závislé, řešíme eliminací absolutních členů  $c$ ,  $C$  pomocí substituce  $u = x - x_0$ ,  $v = y - y_0$ , kde  $x_0$ ,  $y_0$  jsou kořeny soustavy rovnic  $ax + by + c = 0$ ,  $Ax + By + C = 0$  a následným převedením na tvar rovnice (3.5). Pokud výrazy  $ax + by$ ,  $Ax + By$  jsou lineárně závislé (soustava nemá řešení), soustavu řešíme pomocí substituce  $ax + by = z$  (nebo  $Ax + By = z$ ), která umožní její následné převedení na tvar rovnice (3.5).

Řešení diferenciálních rovnic 1. řádu obsahují vždy jednu nezávislou (integrační) konstantu. Její hodnotu získáme z tzv. *počáteční* (Cauchyho) *podmínky*, kdy  $y(x_p) = y_p$ .

#### • Příklady:

$$3.1 \quad \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}$$

$$3.2 \quad (x^2 - 1)y^3 - e^x y' = 0$$

$$y = 0 \vee \frac{1}{2y^2} - (x+1)^2 e^{-x} = C, \quad y \neq 0$$

$$3.3 \quad y' = 3^{3x+2y}, \quad y(0) = 1$$

$$y = -\frac{\log_3\left(\frac{7}{9} - \frac{2}{3} \cdot 3^{3x}\right)}{2}, \quad x < \frac{1}{3} \log_3 \frac{7}{6}$$

$$3.4 \quad x^2(y^3 + 5) dx + (x^3 + 5)y^2 dy = 0, \quad y(0) = 1$$

$$(y^3 + 5)(x^3 + 5) = 30$$

$$3.5 \quad y' = \cos(x - y), \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$y = x + 2 \operatorname{arccotg}(x+1) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3.6 \quad x^2 \left( y' - \frac{1}{\ln x} \right) = xy$$

$$y = x \ln(C |\ln x|), \quad x > 0, C > 0, x \neq 1$$

$$3.7 \quad y' = \sqrt{2x + y - 3}, \quad y(0) = 3$$

$$2(\sqrt{2x + y - 3} + 2) - 4 \ln(\sqrt{2x + y - 3} + 2) = x - (4 \ln 2 - 4), \quad 2x + y - 3 \geq 0$$

$$3.8 \quad (x + y)^2 y' = 4, \quad y(0) = 2$$

$$y = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{x+y}{2} \right) - \frac{\pi}{2} + 2$$

$$3.9 \quad y' = \frac{y}{x} \left( 1 + \ln \frac{y}{x} \right)$$

$$y = x e^{Cx}, \quad \frac{y}{x} > 0$$

$$3.10 \quad y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$y = 0 \vee \sin \frac{y}{x} = Cx, \quad x \neq 0, \quad y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3.11 \quad x^2 y' = xy + \ln x$$

$$y = -\frac{2 \ln x + 1}{4x} + Cx, \quad x > 0$$

$$3.12 \quad xy' = y + \frac{y}{x}$$

$$y = Cx e^{-\frac{1}{x}} \vee y = 0, \quad x \neq 0$$

$$3.13 \quad x^3 y' = x^2[y + \ln(x^2)]$$

$$y = -2(\ln|x| + 1) + Cx, \quad x \neq 0$$

$$3.14 \quad y' = 1 + (x - y)^2$$

$$y = x - \frac{1}{x + C}, \quad x \neq -C$$

$$3.15 \quad y' = (y + x) \ln(y + x) - 1$$

$$y = e^{C e^x} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$3.16 \quad y' = \frac{e^{(x+y)^2}}{x+y} - 1$$

$$y = \pm \sqrt{\ln \left( \frac{1}{C - 2x} \right)} - x, \quad x \in \left( -\infty, \frac{C}{2} \right).$$

$$3.17 \quad y' = e^{y+x^2} - 2x$$

$$y = \ln [(C - x)^{-1}] - x^2, \quad x \in (-\infty, C).$$

$$3.18 \quad y' = \frac{x + 2y - 7}{x - 3}$$

$$x + y - 5 = C(x - 3)^2, \quad x \neq 3$$

$$3.19 \quad y' = \frac{1 + 9x - 3y}{3x - y}$$

$$(3x - y)^2 + 2x = C, \quad y \neq 3x$$

$$3.20 \quad y' = \frac{2x - y + 3}{x - 2y + 3}$$

$$x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y = C, \quad 2y \neq x + 3$$

$$3.21 \quad y' = \frac{x - y}{x + y}$$

$$y = \pm \sqrt{C + 2x^2} - x, \quad 2x^2 + C \geq 0$$

### 3.1.2 Nehomogenní rovnice

Nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu (nazývanou také „rovnice s pravou stranou“), zapsanou v obecném tvaru

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (3.8)$$

kde  $Q(x) \neq 0$ , řešíme metodou *variace konstanty*. Nejprve řešíme homogenní rovnici ve tvaru  $y' + P(x)y = 0$ , kdy její integrační konstantou  $C$  bude obecná funkce nezávisle proměnné  $C(x)$ , obecné řešení tedy bude

$$y = C(x) e^{-\int P(x) dx}. \quad (3.9)$$

Funkci  $C(x)$  nalezneme dosazením rovnice (3.9) do rovnice (3.8), její tvar bude

$$C(x) = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + K, \quad (3.10)$$

kde  $K$  je konstanta. Takto získaný výraz pro funkci  $C(x)$  dosadíme do rovnice (3.9), výsledné partikulární řešení bude

$$y = \left( \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + K \right) e^{-\int P(x) dx}. \quad (3.11)$$

• **Příklady:**

3.22  $y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, y(0) = 1$

$$y = (\sin x - x \cos x + 1) e^{-x^2}$$

3.23  $y' + y \cos x = \cos x$

$$y = C e^{-\sin x} + 1$$

3.24  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

$$y = (x + C)(1 + x^2)$$

3.25  $y' - 6xy = 4x e^{3x^2}, y(0) = 1$

$$y = (2x^2 + 1) e^{3x^2}$$

3.26  $y' + 3x e^{3x} = -y + 7, y(0) = 7$

$$y = 7 + \left( \frac{3}{16} - \frac{3}{4}x \right) e^{3x} - \frac{3}{16} e^{-x}$$

3.27  $xy' + y = x \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$y = \frac{\sin x - 1}{x} - \cos x, x \neq 0$$

3.28  $y' = 2x + 3y + 2, y(0) = 0$

$$y = \frac{8}{9} (e^{3x} - 1) - \frac{2x}{3}$$

3.29  $y' = 4x^2 + 3y - 1, y(0) = 0$

$$y = \frac{1}{27} (1 - e^{3x}) - \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{9}x$$

3.30  $y' = 2x^2 - y + 1, y(0) = 0$

$$y = 2x^2 - 4x + 5(1 - e^{-x})$$

3.31  $y' = 2x^3 - y + 1, y'(0) = 0$

$$y = 2x^3 - 6x^2 - 11 + 12(x + e^{-x})$$

3.32  $y' = -\frac{4x}{x^2 + 1}y + \frac{1}{x^2 + 1}, y(0) = 1$

$$y = \frac{1}{3} (x^3 + 3x + 3) (x^2 + 1)^{-2}$$

### 3.1.3 Bernoulliiova rovnice

Bernoulliiovou rovnicí nazýváme diferenciální rovnici 1. řádu s  $n$ -tou mocninou závisle proměnné  $y(x)$  ve tvaru

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0, \text{ kde } n \in \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

která má i přes svoji nelinearitu analytické řešení. Pokud  $n = 0$ , přejde Bernoulliiova rovnice na nehomogenní lineární rovnici (3.8), pro  $n = 1$  přejde na jednoduše separovatelnou homogenní lineární rovnici (3.3). Pomocí substituce

$$z = y^{1-n} \text{ pro } n \neq 0, 1 \quad (3.13)$$

dostaneme nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu typu (3.8) ve tvaru

$$z' + (1 - n)p(x)z + (1 - n)q(x) = 0. \quad (3.14)$$

• **Příklady:**

3.33  $y' = 6x^2y^3$

$$y^2 = \frac{1}{C - 4x^3}, y = 0, 4x^3 < C$$

3.34  $xy' - y = -xy^2$

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, y = 0, x^2 \neq -C$$

3.35  $y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2$

$$y = \frac{1}{x^4(C - \ln x)}, y = 0, x > 0$$

3.36  $y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0$

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2, y = 0, x > 0, x^{\frac{3}{2}} \geq -3C$$

3.37  $y' + xy = xy^3, y^2(0) = \frac{1}{2}$

$$y^2 = (e^{x^2} + 1)^{-1}, y = 0$$

3.38  $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = -1$

$$y = \frac{1}{1 + \ln x - 2x}, y = 0$$

3.39  $2xyy' - y^2 = x^2, y(1) = 0$

$$y^2 - x^2 = x$$

3.40  $x^2y^2y' + xy^3 = 1, y(-2) = -1$

$$y^3 = \frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x}$$

### 3.1.4 Rovnice exaktní

Rovnici ve tvaru (3.4) nazýváme *exaktní*, pokud výraz na její levé straně je totálním diferenciálem nějaké skalární (tzv. *kmenové*) funkce  $F(x, y)$ , tedy (podrobněji v kapitole 5.2)

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy. \quad (3.15)$$

Funkce  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  z rovnice (3.4) odpovídají jednotlivým parciálním derivacím (tj. složkám *gradientu* - viz kapitola 5.1) skalární funkce  $F(x, y)$  v pořadí podle rovnice (3.15). Pokud jsou obě funkce  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  spojitě diferencovatelné, musí podle *Schwarzovy věty* o rovnosti smíšených derivací platit,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (3.16)$$

K vyřešení rovnice (3.4) je třeba najít kmenovou funkci  $F(x, y)$ , jejíž obecné řešení zpravidla zapíšeme ve tvaru  $F(x, y) = C$ . Pokud rovnice (3.16) neplatí, rovnice (3.4) není rovnicí exaktní. Pokud však nalezneme funkci  $R(x, y)$  (tzv. *integrační faktor*) takovou, že platí

$$R(x, y) [M(x, y) dx + N(x, y) dy] = 0, \quad (3.17)$$

rovnice (3.17) bude rovnicí exaktní. Pro spojitě diferencovatelné funkce  $M(x, y) \neq 0, N(x, y) \neq 0$  takový integrační faktor  $R(x, y)$  existuje.

## • Příklady:

$$3.41 \quad 2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)y' = 0 \qquad y^2 + (x^2 + 1)y - 3x^3 = C$$

$$3.42 \quad (2xy + 6x) dx + (x^2 + 4y^3) dy = 0 \qquad x^2y + 3x^2 + y^4 = C$$

$$3.43 \quad (8y - x^2y)y' + x - xy^2 = 0 \qquad \frac{1}{2}x^2(1 - y^2) + 4y^2 = C$$

$$3.44 \quad (e^{4x} + 2xy^2) dx + (\cos y + 2x^2y) dy = 0 \qquad \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin y = C$$

$$3.45 \quad (3x^2 + y \cos x) dx + (\sin x - 4y^3) dy = 0 \qquad x^3 + y \sin x - y^4 = C$$

$$3.46 \quad x \operatorname{arctg} y dx + \frac{x^2}{2(1+y^2)} dy = 0 \qquad \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} y = C$$

$$3.47 \quad (2x + x^2y^3) dx + (x^3y^2 + 4y^3) dy = 0 \qquad x^2 + \frac{x^3y^3}{3} + y^4 = C$$

$$3.48 \quad (2x^3 - 3x^2y + y^3)y' = 2x^3 - 6x^2y + 3xy^2 \qquad \frac{x^4}{2} - 2x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{4} = C$$

$$3.49 \quad (y^2 \cos x - \sin x) dx + (2y \sin x + 2) dy = 0 \qquad y^2 \sin x + \cos x + 2y = C$$

$$3.50 \quad 2xy^2 dx + (3x^2y + 4) dy = 0 \qquad x^2y^3 + 2y^2 = C$$

$$3.51 \quad (2y + 4x^2y^2) dx + (x + 2yx^3) dy = 0 \qquad x^2y + x^4y^2 = C$$

$$3.52 \quad 2xy dx + (y^2 - 3x^2) dy = 0 \qquad \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

## 3.2 Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu

### 3.2.1 Rovnice s konstantními koeficienty

Obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu (tj. obsahující 2. derivaci závisle proměnné  $y(x)$ ) s konstantními koeficienty řešíme v prvním kroku jako rovnici homogenní, kdy rovnici ve tvaru

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.18}$$

řešíme pomocí tzv. *charakteristické rovnice*  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . Pro kořeny charakteristické rovnice  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  bude mít rovnice (3.18) řešení ve tvaru

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \text{pro } \lambda_1 \neq \lambda_2, \tag{3.19}$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \qquad \text{pro } \lambda_1 = \lambda_2. \tag{3.20}$$

Pro kořeny charakteristické rovnice  $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$  bude mít rovnice (3.18) řešení ve tvaru

$$y = C_1 e^{(\alpha - \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha + \beta i)x} = A e^{\alpha x} \cos \beta x + B e^{\alpha x} \sin \beta x. \tag{3.21}$$



Uvedené řešení lze zobecnit i pro diferenciální rovnice vyšších řádů: pro každý kořen charakteristické rovnice  $n$ -tého řádu  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  s násobností  $\Pi$  bude mít rovnice (3.18)  $\Pi$  řešení ve tvaru

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + \dots + C_{\Pi} x^{\Pi-1} e^{\lambda_{\Pi} x} \quad (3.22)$$

a pro každou dvojici kořenů charakteristické rovnice  $n$ -tého řádu  $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$  s násobností  $\Pi$  bude mít rovnice (3.18)  $\Pi$  řešení ve tvaru

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x (A_1 + A_2 x + \dots + A_{\Pi} x^{\Pi-1}) + e^{\alpha x} \sin \beta x (B_1 + B_2 x + \dots + B_{\Pi} x^{\Pi-1}). \quad (3.23)$$

Posloupnost lineárně nezávislých členů  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  v řešení homogenní rovnice představuje tzv. *fundamentální systém*.

Analogicky ke způsobu, popsanému v odstavci (3.1.2), můžeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice (rovnice s pravou stranou) ve tvaru

$$y'' + py' + qy = R(x) \quad (3.24)$$

metodou variace konstant, kdy rovnice (3.19), (3.20), resp. (3.21) napíšeme jako obecné řešení diferenciální rovnice, tedy

$$y = C_1(x) e^{\lambda_1 x} + C_2(x) e^{\lambda_2 x} = C_1 u_1 + C_2 u_2. \quad (3.25)$$

Funkce  $C_1(x), C_2(x), e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ , které pro jednoduchost budeme dále psát jako  $C_1, C_2, u_1, u_2$ , opět nalezneme dosazením rovnice (3.25) do rovnice (3.24). Dostaneme tak jednu rovnici pro dvě neznámé funkce  $C_1, C_2$ ,

$$\begin{aligned} R(x) &= (C_1 u_1 + C_2 u_2)'' + p(C_1 u_1 + C_2 u_2)' + q(C_1 u_1 + C_2 u_2) \\ &= C_1 (u_1'' + p u_1' + q u_1) + C_2 (u_2'' + p u_2' + q u_2) + (C_1'' u_1 + 2C_1' u_1' + C_2'' u_2 + 2C_2' u_2') \\ &\quad + p(C_1' u_1 + C_2' u_2), \end{aligned} \quad (3.26)$$

kde první dva závorkované členy (násobené nederivovanými funkcemi  $C_1, C_2$ ) představují homogenní rovnice (3.18). Druhou rovnici vytvoříme tak, že stanovíme např. tuto podmínku:

$$C_1' u_1 + C_2' u_2 = 0. \quad (3.27)$$

Protože derivace rovnice (3.27) musí být také nulová, dosazením do rovnice (3.26) dostáváme výsledný systém dvou rovnic pro dvě neznámé funkce  $C_1, C_2$ ,

$$\begin{aligned} C_1' u_1 + C_2' u_2 &= 0, \\ C_1' u_1' + C_2' u_2' &= R(x). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Zapíšeme-li systém rovnic (3.28) pomocí tzv. *Wronského matice*, tj. ve tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(x) \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

jejíž determinant  $u_1 u_2' - u_2 u_1'$  (tzv. *wronskián*) značíme  $W$ , snadno nalezneme řešení systému rovnic (3.28), zapsané například jako

$$C_1 = - \int \frac{u_2 R(x)}{W} dx, \quad C_2 = \int \frac{u_1 R(x)}{W} dx. \quad (3.30)$$

Dosažením rovnice (3.30) do obecného řešení (3.25) dostaneme partikulární řešení obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu. V případě obyčejné diferenciální rovnice obecného ( $n$ -tého) řádu přejde rovnice (3.29) do podoby:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ \vdots \\ C'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R(x) \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

V případě, že pravá strana  $R(x)$  nehomogenní rovnice bude mít formu (tzv. *speciální pravá strana*) obecně zapsanou jako

$$R(x) = [P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x] e^{\alpha x}, \quad (3.32)$$

kde  $P_n$  a  $Q_n$  jsou polynomy nejvýše  $n$ -tého stupně ( $n$  je rovno vyššímu stupni obou polynomů  $P, Q$ ), bývá často jednodušší nalézt řešení diferenciální rovnice tzv. metodou *neurčitých koeficientů*. Při hledání partikulárního řešení vyjdeme (bez ohledu na hodnoty koeficientů  $\alpha$  a  $\beta$ , které mohou být i nulové, případně bez ohledu na to, jestli jeden z polynomů  $P_n, Q_n$  je nulový) z rovnice

$$y = [(A_p x^n + B_p x^{n-1} + \dots + C_p) \cos \beta x + (A_q x^n + B_q x^{n-1} + \dots + C_q) \sin \beta x] x^\Pi e^{\alpha x}, \quad (3.33)$$

kde  $\Pi$  je násobnost kořene  $\lambda = \alpha + \beta i$  charakteristické rovnice (kde opět  $\alpha, \beta$  mohou být nulové). Rovnici (3.32) dosadíme do rovnice (3.24) a obecné koeficienty  $A_p, \dots, C_p, A_q, \dots, C_q$  porovnáme s koeficienty funkce  $R(x)$ , danými rovnicí (3.32).

Partikulární řešení diferenciálních rovnic 2. řádu obsahují vždy dvě nezávislé konstanty. Jejich hodnoty získáme řešením tzv. okrajové úlohy, zadané formou *okrajových podmínek*, kdy pro dvě různá  $x_1, x_2$  platí  $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$  (*Dirichletovy* okrajové podmínky) nebo  $y'(x_1) = y_1, y'(x_2) = y_2$  (*Neumannovy* okrajové podmínky), případně  $y(x_1) = y_1, y'(x_2) = y_2$ , v tomto případě  $x_1, x_2$  mohou být různá nebo stejná (tzv. *Newtonovy* okrajové podmínky).

### • Příklady:

$$3.53 \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad y = e^x + x e^x (\ln x - 1), \quad x > 0$$

$$3.54 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}$$

$$3.55 \quad y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}} \\ y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \ln(1 + 2x) + e^{2x} \operatorname{arctg}(e^x)$$

$$3.56 \quad y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x + \sin x (1 + \ln \sin x), \quad x \in (2k, 2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3.57 \quad y'' - 2y' = x^2 - x \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x^3}{6}$$

- 3.58  $y'' + y' = \frac{1}{1 + e^x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = 1 + x + (1 + e^{-x}) \ln \frac{2}{1 + e^x}$
- 3.59  $y'' + y = \cos x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{4}$   $y = \cos x + \sin x \left(1 + \frac{x}{2}\right)$
- 3.60  $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos x$ ,  $y(0) = \frac{4}{3}$ ,  $y'(0) = \frac{10}{3}$   $y = \left(\cos 2x + \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x\right) e^x$
- 3.61  $y'' - 6y' + 9y = 4x e^{3x} \cos x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = (1 - 7x + 8 \sin x - 4x \cos x) e^{3x}$
- 3.62  $y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1$   $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 - x - 1$
- 3.63  $y'' + y' - 6y = 12x^2 - 2x + 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = \frac{31}{45} e^{-3x} + \frac{6}{5} e^{2x} - 2x^2 - \frac{x}{3} - \frac{8}{9}$
- 3.64  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$   
 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{x^2}{4} e^{-2x} (2 \ln x - 3)$ ,  $x > 0$
- 3.65  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln^2 x$   
 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{x^2}{2} e^{-2x} \left(\ln^2 x - 3 \ln x + \frac{7}{2}\right)$ ,  $x > 0$
- 3.66  $y'' - 4y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = e^{2x} (\cos x - 2 \sin x)$
- 3.67  $y'' - 2y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = e^x \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x\right)$
- 3.68  $y'' - 8y' + 32y = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$   $y = e^{4x-2\pi} (\cos 4x - \sin 4x)$
- 3.69  $y'' - 3y' + 2y = (x^4 + 1) e^x$   
 $y = \left(C_1 - \frac{x^5}{5} - x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 25x\right) e^x + C_2 e^{2x}$
- 3.70  $y'' - 4y' + 5y = (x^2 + 2x) e^{2x} \cos x$   
 $y = e^{2x} \left[\left(C_1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos x + \left(C_2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\right) \sin x\right]$
- 3.71  $y'' - 3y' + 2y = (1 - 2x) e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = 3e^x - 2e^{2x} + (x^2 + x) e^x$
- 3.72  $y'' - 2y' + y = (x + 1) e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = e^x \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1\right)$
- 3.73  $y'' + 4y' + 4y = (6x + 2) e^{-2x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = e^{-2x} (x^3 + x^2 + 2x + 1)$
- 3.74  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sin x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = e^{-2x} (3x - \sin x + 1)$
- 3.75  $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$   $y = \frac{e^x}{2} [(2 - x) \cos x - \sin x]$

$$3.76 \quad y'' - 2y' + 2y = x^2 + x + e^x \sin x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

$$y = e^x \left[ \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cos x + \sin x \right] + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 1$$

### 3.2.2 Rovnice s nekonztantními koeficienty

Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu typu rovnice (3.24), kde koeficient  $p = p(x)$  a kde koeficient  $q = q(x) = 0$ , řešíme jejich převedením na rovnice 1. řádu závisle proměnné  $z = y'$ . Rovnice typu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x), \quad (3.34)$$

řešíme tak, že hledáme nějakou funkci  $I(x)$  (integrační faktor) takovou, že pro  $z = I(x)y$  rovnice (3.34) přejde do podoby rovnice s konstantními koeficienty

$$z'' + pz' + qz = R(x). \quad (3.35)$$

Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu typu

$$y'' + p(y')^m y^n + qy^r = R(x)y^s, \quad (3.36)$$

kde  $m, n, r, s$  jsou konstanty, lze řešit nalezením takového  $z = f(y)$ , pro které opět platí rovnice (3.35).

#### • Příklady:

$$3.77 \quad y'' - \frac{2y'}{x} = x^2 + 1, \quad y(1) = -\frac{11}{12}, \quad y'(1) = 1 \quad y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 1, \quad x \neq 0$$

$$3.78 \quad xy'' + (x+2)y' + y = 0 \quad y = \frac{1}{x} (C_1 + C_2 e^{-x}), \quad y = 0, \quad x \neq 0$$

$$3.79 \quad xy'' - (3x-2)y' + (2x-3)y = 0 \quad y = \frac{1}{x} (C_1 e^x + C_2 e^{2x}), \quad y = 0, \quad x \neq 0$$

$$3.80 \quad x^2y'' - 2x(x+2)y' + (x^2+4x+6)y = 0 \quad y = e^x (C_1x^2 + C_2x^3), \quad y = 0$$

$$3.81 \quad x^2y'' + x(x+4)y' + (x^2+2x+2)y = 0 \quad y = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x^2} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right), \quad y = 0$$

$$3.82 \quad x^2y'' - 4xy' + 4y = x + 1 \quad y = C_1x + C_2x^4 - \frac{x \ln x}{3} + \frac{1}{4}, \quad x > 0$$

$$3.83 \quad x^2y'' - xy' + y = 2x - 4 \quad y = C_1x + C_2x \ln x + x \ln^2 x - 4, \quad x > 0$$

$$3.84 \quad y'' - \left( \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \right) y' + \frac{2}{x} y = 2\sqrt{x}$$

$$y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{4\sqrt{x}} + x^{\frac{3}{2}} + \frac{9x}{4} + \frac{21\sqrt{x}}{8} + \frac{45}{32}, \quad x > 0$$

$$3.85 \quad y'' + \frac{2x-6}{x^2}y' + \frac{8}{x^4}y = 0 \quad y = C_1 e^{-2/x} + C_2 e^{-4/x}, \quad y = 0, \quad x \neq 0$$

$$3.86 \quad \frac{1}{16x^2}y'' - \left(\frac{1}{16x^3} + \frac{1}{x}\right)y' + 4y = 4x^4 + 1 \quad y = C_1 e^{4x^2} + C_2 x^2 e^{4x^2} + x^4 + x^2 + \frac{5}{8}, \quad x \neq 0$$

$$3.87 \quad y'' - \frac{2}{2x-1}y' = 2x(2x-1)^2 \quad y = C_1 + C_2(x^2-x) + \frac{8}{15}x^5 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{x^3}{3}, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$3.88 \quad 2yy'' + 2y'(y' - 4y) + 4y^2 = x$$

$$y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x + 1} = \sqrt{D}, \quad D \geq 0$$

$$3.89 \quad \frac{y''}{2y} - \frac{y'}{y} \left(\frac{3y'}{4y} + 1\right) = 2 - e^x \sqrt{y} \quad y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1)^{-2}, \quad y \geq 0$$

### 3.3 Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

Podobně jako „běžné“ rovnice, mohou i obyčejné (lineární) diferenciální rovnice tvořit soustavu. Uvažujme systém lineárních diferenciálních rovnic pouze 1. řádu (rovnice vyššího řádu lze na takový systém vždy jednoduše převést, například rovnici 2. řádu  $y'' + a_1 y' + a_0 y = f$  zapíšeme jako dvě rovnice 1. řádu:  $y' = z$ ,  $z' = -a_1 z - a_0 y + f$ )

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ &\dots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Systém rovnic (3.37) zapíšeme vektorově jako

$$\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{f} \quad (\text{nebo, pokud } \vec{f}(x) = 0, \text{ jako homogenní systém } \vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}), \quad (3.38)$$

kde matice

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

a kde  $\vec{y}'$ ,  $\vec{y}$  a  $\vec{f}$  jsou sloupcové vektory. Řešení soustav rovnic s nekonstantními koeficienty  $\mathbf{A}(x)$  může být v praxi značně komplikované a představuje samostatnou disciplínu, vymykající se rozsahu těchto skript, v následujících odstavcích se proto zaměříme pouze na systémy rovnic s konstantními koeficienty  $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$ .

#### 3.3.1 Homogenní soustavy s konstantními koeficienty

V případě homogenního systému dle rovnice (3.38) s konstantními koeficienty  $a_{ij}$ , kdy matice  $\mathbf{A}$  (typu  $n \times n$ ) má  $n$  různých reálných vlastních hodnot  $\lambda_i$ ,  $i = 1 \dots n$  (viz rovnice (2.17)), můžeme zapsat řešení v obecném vektorovém tvaru

$$\vec{y}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \vec{v}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \vec{v}_n, \quad (3.40)$$

kde  $v_i$  jsou jednotlivé vlastní vektory dle rovnic (2.17) a (2.18), příslušející vlastním hodnotám  $\lambda_i$  (k rovnici (3.40) bychom dospěli i například postupným dosazováním, tedy náhradou  $n$  rovnic 1. řádu jednou rovnicí  $n$ -tého řádu, zejména v případě vyššího  $n$  je to ovšem způsob značně obtížný a pracný). Jako jednoduchý příklad uvedeme systém dvou homogenních rovnic

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Vlastní hodnoty matice  $\mathbf{A}$  budou  $\lambda_1, \lambda_2 = -1, 4$ , příslušné vlastní vektory budou  $\vec{v}_1 = (-3, 1)^T$  a  $\vec{v}_2 = (2, 1)^T$ . Z kapitoly 2.1 je zřejmé, že vlastními vektory jsou i všechny vektory  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ , násobené libovolnou konstantou (v následujícím textu budeme uvádět pouze jeho základní tvar). Výsledné řešení systému rovnic, v případě že nejsou zadány další podmínky, můžeme zapsat jako

$$\vec{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}. \quad (3.42)$$

Pokud jsou vlastní hodnoty matice  $\mathbf{A}$  reprezentovány také dvojicemi (komplexně sdružených) *komplexních čísel*, budeme řešení hledat obdobným způsobem jako v případě reálných vlastních hodnot. Jako jednoduchý příklad uvedeme systém dvou homogenních rovnic

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Vlastní hodnoty matice  $\mathbf{A}$  v tomto případě budou  $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i$ , příslušné vlastní vektory budou  $\vec{v}_1 = (2 - i, 1)^T$  a  $\vec{v}_2 = (2 + i, 1)^T$ . Výsledné řešení systému rovnic bude

$$\vec{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 - i \end{pmatrix} e^{ix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 + i \end{pmatrix} e^{-ix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 5 \cos x \\ 2 \cos x + \sin x \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} 5 \sin x \\ 2 \sin x - \cos x \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

kde vztah mezi exponenciální a goniometrickou formou rovnice (3.44) je dán Eulerovou identitou  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$  a kde koeficienty  $\mathbf{A} = C_1 + C_2$ ,  $\mathbf{B} = i(C_2 - C_1)$ .

Pokud je některá *reálná* vlastní hodnota matice  $\mathbf{A}$  *vícenásobná*, způsob řešení bude dále záležet na počtu jí odpovídajících vlastních vektorů, kdy existují v zásadě 2 možnosti:

- (a) Vícenásobné ( $k$ -násobné) vlastní hodnotě  $\rho$  odpovídá  $k$  lineárně nezávislých vlastních vektorů, potom část obecného řešení, týkající se této vlastní hodnoty, bude mít tvar

$$\vec{y}_\rho(x) = C_1 e^{\rho x} \vec{v}_1 + C_2 e^{\rho x} \vec{v}_2 + \dots + C_k e^{\rho x} \vec{v}_k. \quad (3.45)$$

Jednoduchým příkladem může být například následující systém,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

s dvojnásobnou vlastní hodnotou  $\rho = 3$  a se dvěma lineárně nezávislými vlastními vektory  $\vec{v}_1 = (1, 0)^T$  a  $\vec{v}_2 = (0, 1)^T$ . Výsledné řešení systému ve smyslu rovnice (3.45) bude

$$\vec{y}_\rho(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}. \quad (3.47)$$

- (b) Vícenásobné ( $k$ -násobné) vlastní hodnotě  $\rho$  odpovídá  $j$  lineárně nezávislých vlastních vektorů, kdy  $1 \leq j < k$ , tedy  $s = k - j$  vlastním hodnotám  $\rho$  odpovídá jediný lineárně nezávislý vlastní vektor  $\vec{u}$ . Taková matice se nazývá *defektní* a není *diagonalizovatelná*, tj. převoditelná na diagonální matici po vynásobení zleva maticí řádkových levých vlastních vektorů a zprava maticí sloupcových pravých vlastních vektorů. Potom část obecného řešení, týkající se tohoto vlastního vektoru  $\vec{u}$ , bude mít tvar

$$\vec{y}_\rho(x) = C_1 \vec{u} e^{\rho x} + C_2 (\vec{w}_1 + x \vec{u}) e^{\rho x} + \dots \quad (3.48)$$

$$\dots + C_s \left( \vec{w}_{s-1} + x \vec{w}_{s-2} + \frac{x^2}{2!} \vec{w}_{s-3} + \dots + \frac{x^{s-2}}{(s-2)!} \vec{w}_1 + \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} \vec{u} \right) e^{\rho x}, \quad (3.49)$$

kde vektor  $\vec{w}_i$  odpovídá libovolnému řešení algebraických rovnic

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{E}) \vec{w}_i = \vec{w}_{i-1}, \quad \dots \quad (\mathbf{A} - \rho \mathbf{E}) \vec{w}_1 = \vec{u}. \quad (3.50)$$

Následující příklad ilustruje popsany princip řešení: uvažujme systém

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

s dvojnásobnou vlastní hodnotou  $\rho = 2$ , které ovšem odpovídá pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor  $\vec{u} = (1, 1)^T$ . Vektor  $\vec{w}$  určíme z rovnice (3.50),

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Výsledné řešení systému ve smyslu rovnice (3.48) bude

$$\vec{y}_\rho(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2x}. \quad (3.53)$$

Řešení systémů s více než dvěma lineárními rovnicemi 1. řádu je analogické k uvedeným jednoduchým příkladům se dvěma rovnicemi, některé principy více ozřejmí následující příklady, zahrnující i systémy tří rovnic.

#### • Příklady:

$$3.90 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} \quad \vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$3.91 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y} = \left[ A \begin{pmatrix} 13 \cos 2x \\ -3 \cos 2x - 2 \sin 2x \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 13 \sin 2x \\ 2 \cos 2x - 3 \sin 2x \end{pmatrix} \right] e^{4x}$$

$$3.92 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} \quad \vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

$$3.93 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix} \vec{y} \quad \vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \left[ C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-3x}$$

$$3.94 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \right\} e^{-2x}$$

$$3.95 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + C_2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right] + C_3 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right] \right\} e^x$$

$$3.96 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_3 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\} e^{-2x}$$

### 3.3.2 Nehomogenní soustavy s konstantními koeficienty

Řešení lineárních soustav s pravou stranou bude v principu analogické metodám řešení obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu (viz odstavec 3.2.1), tj. metodám *variace konstant* a *neurčitých koeficientů*. Metodu *variace konstant* můžeme aplikovat následujícím způsobem: předpokládejme partikulární řešení nehomogenní rovnice (3.38), ve tvaru

$$\vec{y}_p = \mathbf{Y}(x)\vec{t}(x), \quad (3.54)$$

kde  $\mathbf{Y}(x)$  je matice, jejíž sloupce tvoří jednotlivá lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice (3.38), přepsané nyní do tvaru  $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ ,  $\vec{t}(x)$  je hledaný, obecně zapsaný sloupcový vektor. Protože rovnice (3.38) musí platit také pro partikulární řešení, tedy  $\vec{y}_p' = \mathbf{A}\vec{y}_p + \vec{f}$ , první derivace partikulárního řešení v takovém případě bude

$$\vec{y}_p' = \mathbf{Y}'\vec{t} + \mathbf{Y}\vec{t}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}\vec{t} + \vec{f} = \mathbf{Y}'\vec{t} + \vec{f}, \quad \text{tedy} \quad \mathbf{Y}\vec{t}' = \vec{f}. \quad (3.55)$$

Hledaný vektor  $\vec{t}$  získáme integrací rovnice (3.55),

$$\vec{t} = \int \mathbf{Y}^{-1}\vec{f} dx, \quad \vec{y}_p = \mathbf{Y} \int \mathbf{Y}^{-1}\vec{f} dx. \quad (3.56)$$

Uvedenou metodu ilustruje následující řešený příklad: použijeme homogenní systém z řešeného příkladu (viz rovnice (3.41)) s přidanou pravou stranou,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x. \quad (3.57)$$



Z rovnice (3.42) ihned vidíme, že matice  $\mathbf{Y}(x)$  bude

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -3e^{-x} & 2e^{4x} \\ e^{-x} & e^{4x} \end{pmatrix}, \quad \text{z toho} \quad \mathbf{Y}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -e^x & 2e^x \\ e^{-4x} & 3e^{-4x} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Podle rovnice (3.56) tak dostáváme partikulární řešení pomocí integrace (kdy každou složku vektoru  $\vec{y}_p$  integrujeme zvlášť)

$$\vec{y}_p = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3e^{-x} & 2e^{4x} \\ e^{-x} & e^{4x} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -e^x & 2e^x \\ e^{-4x} & 3e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x \\ x \end{pmatrix} dx = \begin{bmatrix} -3/4 \\ (1-4x)/8 \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Úplné řešení tedy bude součtem rovnic (3.42) a (3.59). Ve výsledku rovnice (3.59) neuvádíme integrační konstantu, předpokládáme, že je již „skrytá“ v konstantách homogenního řešení v rovnici (3.42).

Metoda *neurčitých koeficientů* pro systém rovnic je zcela analogická již uvedenému řešení pro rovnice 2. řádu, jediný rozdíl spočívá v tom, že koeficienty nyní budou vektory. Pokud například v odstavci 3.2.1 byla pravá strana rovnice polynomem 1. stupně, obecný zápis partikulárního řešení měl tvar  $y_p = Ax + B$ , nyní to bude  $\vec{y}_p = \vec{A}x + \vec{B}$ . Metodu ukážeme na stejném řešeném příkladě: předpokládejme uvedenou obecnou formu partikulárního řešení, tedy

$$\vec{y}_p = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \text{což dává} \quad \vec{y}_p' = \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Rovnice (3.38) musí opět platit i pro partikulární řešení,  $\vec{y}_p' = \mathbf{A}\vec{y}_p + \vec{f}$ , tedy  $\vec{A} = \mathbf{A}(\vec{A}x + \vec{B}) + \vec{f}$ . Přepíšeme-li (vektorový) polynom 1. stupně do následujícího explicitního tvaru

$$\left[ \mathbf{A} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] x + \mathbf{A} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (3.61)$$

dostáváme pro lineární i absolutní člen (oba musí být nulové) následující rovnice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Nyní již snadno dopočítáme jednotlivé neurčité koeficienty, dostáváme  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = -1/2$ ,  $B_1 = -3/4$ ,  $B_2 = 1/8$ , což po dosazení a úpravě dává shodný výsledek s rovnicí (3.59).

#### • Příklady:

$$3.97 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5x}$$

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} - \begin{pmatrix} 5/21 \\ 4/21 \end{pmatrix} e^{-5x}$$

$$3.98 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2x} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$3.99 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x^2$$

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$3.100 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (x+1) e^{2x}$$

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4x} + \left[ \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3/16 \\ 0 \\ -3/16 \end{pmatrix} \right] e^{2x}$$

## Kapitola 4

# Křivkový integrál<sup>1</sup>

### 4.1 Křivkový integrál 1. druhu

Křivkovým integrálem 1. druhu nazýváme integrál  $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$  obecné skalární funkce  $f(x, y, z)$  podél křivky  $\mathcal{C}$ , kde  $ds$  je délkový element křivky:  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  (Pythagorova věta v diferenciálním tvaru). Stanovíme-li např. souřadnici  $x$  jako nezávisle proměnnou a  $y(x)$ ,  $z(x)$  jako závisle proměnné, můžeme psát

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx. \quad (4.1)$$

Nalezneme-li vhodný parametr  $t$ , potom bude parametrizovaná rovnice (4.1), kde  $f(t) = f[x(t), y(t), z(t)]$ ,  $s(t) = s[x(t), y(t), z(t)]$ , mít tvar

$$\int_{\mathcal{C}} f(t) \frac{ds(t)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (4.2)$$

Pomocí křivkového integrálu 1. druhu lze určit geometrické a fyzikální charakteristiky dané křivky. Položíme-li  $f = 1$ , výsledkem bude délka křivky  $\mathcal{C}$ . Položíme-li  $f = \tau$  (délková hustota křivky), dostáváme  $\tau ds = dm$ , tedy element hmotnosti křivky, výsledkem integrace bude hmotnost křivky  $\mathcal{C}$ ,

$$m = \int_{\mathcal{C}} dm = \int_{\mathcal{C}} \tau ds. \quad (4.3)$$

Pokud položíme například  $f = z\tau$ , dostáváme tzv. statický moment  $S_z$  křivky vzhledem k ose  $z$ , jeho vydělením hmotností dostáváme  $z$ -ovou souřadnici středu hmotnosti  $z_T$  křivky  $\mathcal{C}$  (obdobně pro ostatní souřadnicové směry), tedy

$$x_T = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x \, dm = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x\tau \, ds, \quad y_T = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y \, dm, \quad z_T = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} z \, dm. \quad (4.4)$$

Položíme-li  $f = r^2\tau$ , kde  $r$  je vzdálenost obecného bodu křivky od zvolené přímky v prostoru (osy  $o$ ), dostáváme moment setrvačnosti  $J_o$  křivky  $\mathcal{C}$  vzhledem k této ose. Momenty setrvačnosti křivky  $\mathcal{C}$  např. vzhledem k jednotlivým kartézským souřadnicovým osám potom budou

$$J_x = \int_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2) dm = \int_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2) \tau ds, \quad J_y = \int_{\mathcal{C}} (z^2 + x^2) dm, \quad J_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) dm. \quad (4.5)$$

<sup>1</sup>Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

• **Příklady:**

4.1 Vypočítejte délku křivky  $s = \int_C (x^2 + y^2) ds$ , kde  $C$  je křivka s parametrizací  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

$$s = a^3 (2\pi^2 + 4\pi^4)$$

4.2 Vypočítejte délku úseku paraboly  $y = x^2$ , ohraničeného body  $(-2, 4)$  a  $(2, 4)$ .

$$s = 2\sqrt{17} + \ln \sqrt{4 + \sqrt{17}} \approx 9,2936$$

4.3 Kolikrát delší bude skutečná trajektorie s šikmého vrhu (s počátečním a koncovým bodem ve stejné výšce)

(a) s maximálním možným doletem  $D$ ,

(b) pokud počáteční (elevační) úhel  $\alpha = 30^\circ$ ,

(c) pokud elevační úhel  $\alpha = 60^\circ$ ,

(d) pokud elevační úhel bude takový aby maximální výška trajektorie se rovnala doletu,

než příslušný dolet? Dokažte, že pro  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{s}{D} \rightarrow \infty$ , a rovněž že pro  $\alpha = 0$ ,  $\frac{s}{D} \rightarrow 1$ .

$$s = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\cos \alpha} + \ln \left( \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \cotg \alpha \right] D$$

$$(a) s = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{1 + \sqrt{2}} \right] D \approx 1,15D,$$

$$(b) s = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \ln \sqrt{3}}{2} \right] D \approx 1,05D,$$

$$(c) s = \left[ 1 + \frac{\ln \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \right] D \approx 1,38D,$$

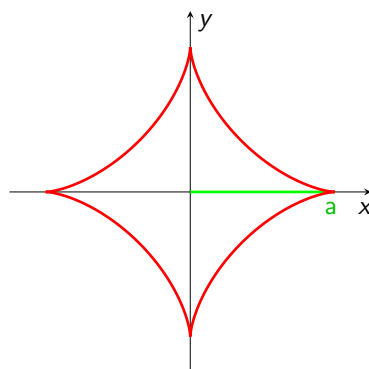
$$(d) s = \left[ \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\ln \sqrt{4 + \sqrt{17}}}{4} \right] D \approx 2,32D$$

4.4 Přířímým výpočtem v kartézských souřadnicích a také pomocí vhodné parametrizace vypočítejte hmotnost asteroidy  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  s délkovou hustotou  $\tau = x^{4/3} + y^{4/3}$  (viz obrázek 4.1). Parametrizace asteroidy může být například:  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ , kde  $t$  neznačí čas, nýbrž úhlový parametr.

$$m = 4a^{7/3}$$

4.5 Pomocí parametrizace  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ , vypočítejte hmotnost jednoho „závitu“ válcové šroubovice s délkovou hustotou  $\tau = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$ .

$$m = \frac{8\pi^3}{3} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \sqrt{a^2 + b^2}$$

Obrázek 4.1: Asteroida. Délka poloosy  $a$  je vyznačena zelenou barvou.

4.6 Pomocí vhodné parametrizace a s použitím obecných koeficientů vypočítejte hmotnost jednoho „závitu“ válcové šroubovice s délkovou hustotou  $\tau = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ .

$$m = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{2\pi b}{a}$$

4.7 Pomocí parametrizace  $x = at \cos t$ ,  $y = at \sin t$ ,  $z = bt$ , vypočítejte hmotnost jednoho „závitu“ kuželové šroubovice s délkovou hustotou  $\tau = 2\sqrt{x^2 + y^2} - z$ .

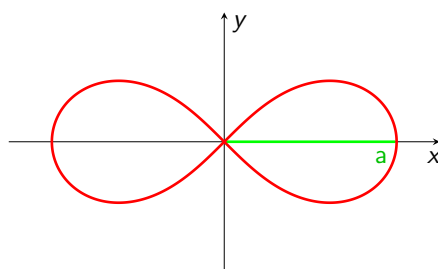
$$m = \frac{2a - b}{3a^2} \left[ \sqrt{(a^2 + b^2 + 4\pi^2 a^2)^3} - \sqrt{(a^2 + b^2)^3} \right]$$

4.8 Dokažte vztah  $s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{f^2 + \dot{f}^2} d\phi$ , kde  $s$  je délka hladké křivky, vyjádřené v polárních souřadnicích  $r = f(\phi)$ , a kde  $\dot{f} = df/d\phi$ .

**z transformačních vztahů pro polární souřadnice a z definice křivkového integrálu**

4.9 Dokažte vztah  $s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2 + \dot{g}^2 (f^2 \sin^2 \theta + \dot{f}^2)} d\theta$ , kde  $s$  je délka hladké křivky, vyjádřené v kulových souřadnicích  $r = f(\phi)$ ,  $\phi = g(\theta)$ , a kde  $\dot{f} = df/d\phi$ ,  $\dot{g} = dg/d\theta$ .

**z transformačních vztahů pro kulové souřadnice a z definice křivkového integrálu**

Obrázek 4.2: Bernoulliova lemniskáta. Délka poloosy  $a$  je vyznačena zelenou barvou.

- 4.10 Pomocí vhodné transformace souřadnic vypočítejte hmotnost Bernoulliovy lemniskáty (obrázek 4.2) s kartézskou rovnicí  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ , s délkovou hustotou  $\tau = |y|$ . Vyjděte z principu uvedeného v příkladu 4.8 nebo použijte transformační rovnice:  $x = a \cos t / (1 + \sin^2 t)$ ,  $y = a \sin t \cos t / (1 + \sin^2 t)$ , kde  $t = \arcsin(\operatorname{tg} \phi)$  je úhlový parametr (rozvažte vždy správné integrační meze pro zvolený parametr v rámci příslušného kvadrantu).

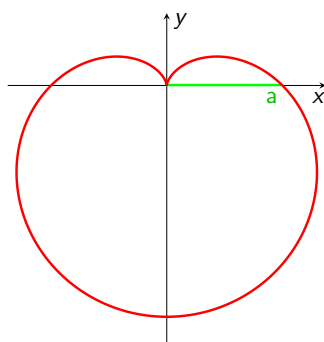
$$m = 2a^2(2 - \sqrt{2})$$

- 4.11 Příímým výpočtem v kartézských souřadnicích a také pomocí vhodné transformace souřadnic vypočítejte hmotnost nehomogenní křivky s délkovou hustotou  $\tau = x + y$ , která vznikne průnikem ploch  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x = y$ , v 1. oktantu.

$$m = \sqrt{2}a^2$$

- 4.12 Vypočítejte hmotnost oblouku elipsy  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  v 1. kvadrantu. Délková hustota  $\tau = xy$ .

$$m = \frac{38}{5}$$



Obrázek 4.3: Kardioida. Délka konstanty  $a$  je vyznačena zelenou barvou.

- 4.13 Vypočítejte celkovou délku  $s$  a hmotnost  $m$  kardioidy (obrázek 4.3) s polární rovnicí  $r = a(1 - \sin \phi)$ , s délkovou hustotou  $\tau = |x|$ .

$$s = 8a, \quad m = \frac{32a^2}{5}$$

- 4.14 Určete souřadnice těžiště  $T$  půlkružnice (procházející 1. a 2. kvadrantem) a čtvrtkružnice (procházející 1. kvadrantem), obojí s délkovou hustotou  $\tau = y$ . Určete jejich momenty setrvačnosti, pokud se budou otáčet okolo svých geometrických os.

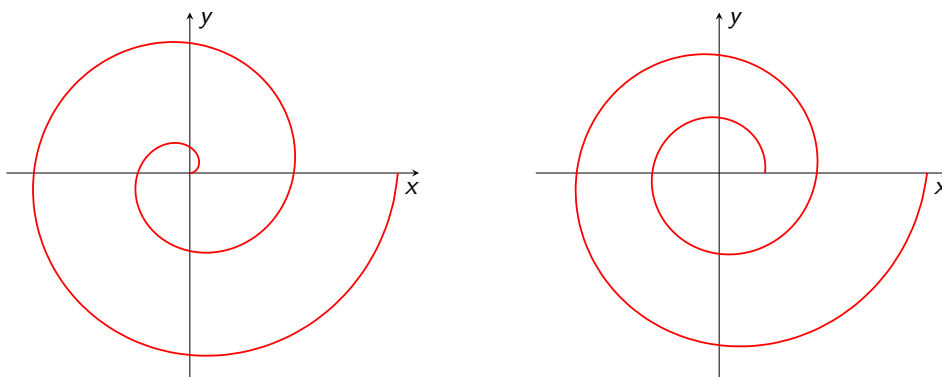
$$T = \left[0, \frac{\pi a}{4}\right], \quad T = \left[\frac{a}{2}, \frac{\pi a}{4}\right], \quad J = 2a^4, \quad J = a^4$$

- 4.15 Určete souřadnice těžiště  $T$  jednoho oblouku cykloidy  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ , s homogenní délkovou hustotou  $\tau(x, y) = 1$ .

$$T = \left[\pi a, \frac{4a}{3}\right]$$

4.16 Drát má tvar kružnice  $x^2 + y^2 = a^2$ . Vypočítejte jeho moment setrvačnosti  $J$ , pokud se drát otáčí okolo svého průměru. Jeho délková hustota  $\tau = |x| + |y|$ .

$$J = 4a^4$$



Obrázek 4.4: „Dva závity“ spirály s polárním úhlem  $\phi \in \langle 0, 4\pi \rangle$ . Vlevo: Archimedova spirála, vpravo: logaritmická spirála.

4.17 Vypočítejte délku  $\ell$  „dvou závitů“ (viz obrázek 4.4) a moment setrvačnosti  $J$  následujících křivek s konstantní délkovou hustotou  $\tau$ , rotujících okolo osy  $z$  (procházející počátkem, kolmo k vyobrazené rovině):

- Archimédovy spirály, dané v polárních souřadnicích předpisem  $r = \alpha\phi$ , kde  $\alpha$  je kladná konstanta a polární úhel  $\phi \in \langle 0, 4\pi \rangle$ ,
- logaritmické spirály, dané v polárních souřadnicích předpisem  $r = \alpha e^{\beta\phi}$ , kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou kladné konstanty a kde polární úhel  $\phi \in \langle 0, 4\pi \rangle$ .
- jak se změní úloha (b), pokud počátek spirály bude v bodě  $[0, 0]$ ?

Výsledek také vyjádřete jako funkci hmotnosti křivky  $m = \tau\ell$  a největší vzdálenosti křivky od osy rotace  $R = r_{\max}$ .

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \ell &= \frac{\alpha}{2} \left[ 4\pi\sqrt{16\pi^2 + 1} + \ln \left( 4\pi + \sqrt{16\pi^2 + 1} \right) \right], \\ J &= \frac{\tau\alpha^3}{8} \left[ 4\pi(32\pi^2 + 1)\sqrt{16\pi^2 + 1} - \ln \left( 4\pi + \sqrt{16\pi^2 + 1} \right) \right] \approx 0,492 mR^2, \\ \text{(b)} \quad \ell &= \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\beta^2 + 1} (e^{4\pi\beta} - 1), \quad J = \frac{\tau\alpha^3}{3\beta} \sqrt{\beta^2 + 1} (e^{12\pi\beta} - 1) = (1 + e^{-4\pi\beta} + e^{-8\pi\beta}) \frac{mR^2}{3}, \\ \text{(c)} \quad \ell &= \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\beta^2 + 1} e^{4\pi\beta}, \quad J = \frac{\tau\alpha^3}{3\beta} \sqrt{\beta^2 + 1} e^{12\pi\beta} = \frac{mR^2}{3} \end{aligned}$$

## 4.2 Křivkový integrál 2. druhu

Křivkovým integrálem 2. druhu nazýváme integrál  $\int_C \vec{F} \cdot \vec{t} ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$  obecného vektorového pole  $\vec{F}(x, y, z)$  podél křivky  $C$  ve směru jejího tečného vektoru  $\vec{t}$ , kde  $ds$  je délkový element křivky (viz odstavec 4.1). Explicitní zápis integrálu 2. druhu v kartézské souřadné soustavě

bude mít tvar

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz, \quad (4.6)$$

kde  $F_x, F_y, F_z$  jsou jednotlivé složky vektoru  $\vec{F}$ . Analogicky k rovnici (4.2) bude mít parametrizovaný křivkový integrál 2. druhu tvar

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ F_x(t) \frac{dx(t)}{dt} + F_y(t) \frac{dy(t)}{dt} + F_z(t) \frac{dz(t)}{dt} \right] dt. \quad (4.7)$$

Typickým příkladem integrálu 2. druhu je výpočet vykonané práce jako integrálu vektoru síly  $\vec{F}$  podél orientované křivky  $\mathcal{C}$ .

• **Příklady:**

4.18 Přířímým výpočtem v kartézských souřadnicích i pomocí vhodné parametrizace vypočítejte křivkový integrál druhého druhu  $\int_{\mathcal{C}} (x+1) dy + y dx$ , kde křivka  $\mathcal{C}$  je čtvrtkružnice s poloměrem  $a$  v 1. kvadrantu.

$a$

4.19 Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu  $\int_{\mathcal{C}} x dx + y dy + (xz - y) dz$ , kde křivka  $\mathcal{C}$  je daná parametricky  $x = t^2, y = 2t, z = 4t^3, t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

$\frac{5}{2}$

4.20 Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu  $\oint_{\mathcal{C}} (2-y) dx + (1+x) dy$ , kde křivka  $\mathcal{C}$  je obvod trojúhelníka s vrcholy  $A = [0, 0], B = [1, 1], C = [0, 2]$ .

2

4.21 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (y, z, x)$ , působící v matematicky kladném směru po uzavřené křivce, která je daná průnikem ploch  $z = xy$  a  $x^2 + y^2 = 1$ .

$W = -\pi$

4.22 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = \left(\frac{y}{x}, x\right)$ , působící po křivce  $xy = 1$  od bodu  $[3, \frac{1}{3}]$  do bodu  $[\frac{1}{2}, 2]$ .

$W = \ln 6 - \frac{5}{3}$

4.23 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (x - y, x + y)$ , působící po dráze  $y = x^2, x \in \langle 0, 2 \rangle$ .

$W = \frac{38}{3}$

4.24 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (y, -x, z)$ , působící po obvodě trojúhelníka, jehož vrcholy jsou tvořeny průsečíky roviny  $3x + 2y + 6z = 6$  se souřadnicovými osami.

$W = -6$



- 4.25 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (yz, xy, yz)$ , působící po obvodě trojúhelníka, jehož vrcholy jsou tvořeny průsečíky roviny  $2x + 3y + 4z = 12$  se souřadnicovými osami.

$$W = 22$$

- 4.26 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (x^2 + y, 3y^2, 0)$ , která působí po uzavřené křivce, sestávající z půlkružnice o poloměru  $a$  v 1. a 2. kvadrantu a úsečky (průměru).

$$W = -\frac{\pi a^2}{2}$$

- 4.27 Vypočítejte práci, kterou by vykonalo tíhové pole při jízdě tobogánem s přesně třemi otáčkami, pokud by tíhové pole vypadalo  $\vec{F}_g = -mg(0, 0, z)$ . Tobogán si lze představit jako válcovou šroubovici, použijte obecné koeficienty.

$$W = 18\pi^2 b^2 mg$$

- 4.28 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (x^2 + y, 3y^2, 0)$ , která působí v matematicky kladném směru po půlkružnici o poloměru  $a$ . Půlkružnice má střed v počátku souřadného systému a prochází 2. a 3. kvadrantem roviny  $xy$  kartézské souřadné soustavy. Je toto silové pole konzervativní ?

$$W = -\frac{\pi a^2}{2} - 2a^3, \text{ pole není konzervativní.}$$

- 4.29 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (x^2, -y, z)$  působící v matematicky kladném směru po křivce dané předpisem  $(x - 1)^2 + y^2 = 1, z = 2$ , z počátečního bodu  $(1, -1, 2)$  do koncového bodu  $(0, 0, 2)$ . Je toto silové pole konzervativní ?

$$W = \frac{1}{6}, \text{ pole je konzervativní.}$$

- 4.30 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (2x^2 - y, x, z)$ , která působí v matematicky záporném směru po polovině závitu válcové šroubovice o poloměru  $R$  s osou  $(0, 0, z)$ , procházející počátkem souřadnicového systému. Počáteční bod dráhy působící síly má souřadnice  $(0, R, \frac{\pi b}{2})$ , koncový bod má souřadnice  $(0, -R, -\frac{\pi b}{2})$ . Je toto silové pole konzervativní ?

$$W = -\pi R^2, \text{ pole není konzervativní.}$$

- 4.31 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (3x - y, x, z)$ , která působí v matematicky kladném směru po dráze jednoho závitu válcové šroubovice o poloměru  $R$  s osou  $(0, 0, z)$ , procházející počátkem souřadnicového systému. Počáteční bod dráhy působící síly má souřadnice  $(0, -R, -\frac{\pi b}{2})$ , koncový bod má souřadnice  $(0, -R, \frac{3\pi b}{2})$ , transformační rovnice šroubovice jsou:  $x = R \cos t, y = R \sin t, z = bt$ . Je toto silové pole konzervativní ?

$$W = \pi (2R^2 + \pi b), \text{ pole není konzervativní.}$$

- 4.32 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F} = (x^3, y, z^3)$ , která působí nejprve v matematicky kladném směru po křivce, dané předpisem  $x^2 + (y - 3)^2 = 4, z = 5$ , z bodu  $(0, 1, 5)$  do bodu  $(2, 3, 5)$  a potom po úsečce do bodu  $(3, 1, 5)$ . Je toto silové pole konzervativní ?

$$W = \frac{81}{4}, \text{ pole je konzervativní.}$$

- 4.33 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F}(x, y) = (x - y, x)$ , která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu  $(1, 1)$  do bodu  $(1, 2)$ , dále po čtvrtkružnici se středem v bodě  $(1, 1)$  v matematicky záporném směru do bodu  $(2, 1)$  a nakonec po úsečce zpět do výchozího bodu. Je toto silové pole konzervativní ?

$$W = -\frac{\pi}{2}, \text{ pole není konzervativní.}$$

- 4.34 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ , která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu  $(0, 0)$  do bodu  $(2, 1)$ , dále po úsečce do bodu  $(2, 2)$  a nakonec po čtvrtkružnici se středem v bodě  $(2, 0)$  v matematicky kladném směru zpět do výchozího bodu. Jak se vykonaná práce změní, pokud působící síla  $\vec{F}(x, y) = (y, x)$  ?

$$W = 2(\pi - 1), \text{ práce konzervativní síly po uzavřené křivce by byla nulová.}$$

- 4.35 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ , která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu  $(0, 0)$  do bodu  $(1, 0)$ , dále po úsečce do bodu  $(1, 1)$  a nakonec po čtvrtkružnici se středem v bodě  $(1, 0)$  v matematicky kladném směru zpět do výchozího bodu. Jak se vykonaná práce změní, pokud působící síla  $\vec{F}(x, y) = (y, x)$  ?

$$W = \frac{\pi}{2}, \text{ konzervativní síla - práce by byla nulová.}$$

## Kapitola 5

# Skalární a vektorové funkce více proměnných<sup>1</sup>

### 5.1 Parciální a směrové derivace, úplný diferenciál

*Parciální derivace* funkce více nezávislých proměnných  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je derivace této funkce podle jedné z těchto proměnných; je to dáno tím, že tuto funkci derivujeme pouze ve směru této proměnné, takže ostatní nezávislé proměnné mají konstantní hodnotu (chovají se jako konstanty). Funkci více proměnných tedy skutečně v této chvíli derivujeme jako funkci jedné proměnné. Prostorovou představu si můžeme udělat na příkladu funkce dvou proměnných  $f(x, y)$ , jejíž geometrický význam můžeme popsat jako plochu, danou předpisem  $z = f(x, y)$ . Parciální derivace této funkce například podle proměnné  $x$ , kterou zapisujeme

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{nebo pouze} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{nebo také} \quad f_x, \quad (5.1)$$

vyjadřuje směrnici tečny této plochy, která leží v rovině rovnoběžné s rovinou  $xz$  a která je orientována v kladném smyslu osy  $x$ . Hodnota druhé nezávislé proměnné  $y$  je tedy pro celou tuto tečnu konstantní. Zcela obdobně to platí i pro parciální derivace podle ostatních nezávislých proměnných.

Parciální derivace můžeme samozřejmě zobecnit pro zcela libovolný směr, ne pouze pro směry souřadnicových os. V tom případě je nazýváme směrové derivace (nebo derivace ve směru). Zvolený směr může být definovaný například vektorem  $\vec{v}$ , směrová derivace potom (v případě funkce dvou proměnných), analogicky k příkladu popsanému v předchozím odstavci, vyjadřuje směrnici tečny této plochy, která leží v rovině rovnoběžné s rovinou vymezenou tímto vektorem a osou  $z$  a která je orientována ve směru zvoleného vektoru. Směrovou derivaci spojitě diferencovatelné skalární funkce můžeme obecně definovat jako

$$\vec{\nabla}_{\vec{u}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{\nabla} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad (5.2)$$

kde symbol  $\vec{\nabla}$  (tzv. *Nabla operátor*) značí vektor parciálních derivací podle všech nezávisle proměnných. Rovnici (5.2) lze tedy rozepsat

$$\vec{\nabla}_{\vec{u}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{u_2}{\|\vec{u}\|} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{u_n}{\|\vec{u}\|} \frac{\partial f}{\partial x_n}. \quad (5.3)$$

<sup>1</sup>Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

Úplným (totálním) diferenciálem obecné skalární funkce  $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  více *nezávislých* proměnných nazýváme lineární funkci

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (5.4)$$

Pokud totální diferenciál funkce  $f(\vec{x})$  existuje v daném bodě, říkáme, že funkce  $f(\vec{x})$  je v tomto bodě diferencovatelná. Pokud totální diferenciál funkce  $f(\vec{x})$  existuje ve všech bodech této funkce, říkáme, že funkce  $f(\vec{x})$  je spojitě diferencovatelná (hladká). Pokud totální diferenciál funkce  $f(\vec{x})$  existuje v určitých oblastech této funkce, říkáme, že funkce  $f(\vec{x})$  je po částech diferencovatelná.

Totálním diferenciálem vyššího ( $n$ -tého) řádu funkce  $f(x, y)$  dvou *nezávislých* proměnných  $x, y$  bude funkce, daná obecným předpisem

$$d^n f(x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} dx^k dy^{n-k}, \quad (5.5)$$

kde výraz v závorce za sumou je tzv. *kombinační číslo* (viz rovnice (11.1)). Zcela zobecněným totálním diferenciálem vyššího ( $n$ -tého) řádu funkce  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m)$  obecného počtu  $m$  *nezávislých* proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_m$  bude funkce, daná předpisem

$$d^n f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \dots dx_m^{k_m}, \quad (5.6)$$

kde výraz v závorce za sumou je tzv. *multinomický koeficient* (viz rovnice (11.6)) a kde smysl a užití všech ostatních výrazů a symbolů odpovídá tzv. *multinomické větě* (11.7).

### • Příklady:

5.1 Vypočítejte parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  skalární funkce  $f(x, y) = x^2 + x - y$ .

$$2x + 1, -1$$

5.2 Vypočítejte parciální derivace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  skalární funkce  $f(x, y) = x \ln y + x^y$ .

$$(y^2 - y) x^{y-2}, -\frac{x}{y^2} + x^y \ln^2 x$$

5.3 Vypočítejte smíšenou parciální derivaci  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$  skalární funkce  $f(x, y) = xyz + x^2 \sin(xy) + yz$ .

$$1$$

5.4 Vypočítejte smíšenou parciální derivaci  $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}$  skalární funkce  $f(x, y) = xy^2z^3 + x^2 \sin^2(xz) + yz + x + y + z$ .

$$12yz$$

5.5 Dokažte, že ze stavové rovnice ideálního plynu  $pV = n\mathcal{R}T$ , kde  $p$  je tlak,  $V$  je objem,  $T$  je termodynamická teplota,  $n$  je látkové množství,  $\mathcal{R}$  je molární plynová konstanta, vyplývá:  $\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = -1$ .

5.6 Ukažte, že funkce  $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ , kde  $a, b$  jsou konstanty, vyhovuje rovnici vedení tepla  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

5.7 Ukažte, že funkce  $u = \frac{1}{r}$ , kde  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ , kde  $a, b, c$  jsou konstanty, vyhovuje Laplaceově rovnici  $\Delta u = 0$  pro  $r \neq 0$ .

**Příklady 5.5, 5.6, 5.7 - pomocí parciálních derivací funkcí.**

5.8 Vypočítejte derivaci funkce  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  v bodě  $[4, -1]$  ve směru vektoru  $\vec{u} = (-2, 3)$ .

$$-\frac{10}{\sqrt{13}}$$

5.9 Vypočítejte derivaci funkce  $f(x, y, z) = \cos(xy) + \ln z^2$  v bodě  $[\pi, 1, 1]$  ve směru vektoru  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ .

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

5.10 Vypočítejte derivaci funkce  $f(x, y) = x^2 - y^2$  v bodě  $[1, 1]$  ve směru vektoru  $\vec{u} = (1, -1)$ .

$$2\sqrt{2}$$

5.11 Vypočítejte derivaci funkce  $f(x, y) = x + 2y$  v bodě  $[2, 1]$  ve směru vektoru  $\vec{u} = (1, 2)$ .

$$\sqrt{5}$$

5.12 Vypočítejte derivaci funkce  $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$  v bodě  $[0, 1, 2]$  ve směru vektoru  $\vec{u} = (1, 0, 1)$ .

$$\frac{13}{\sqrt{2}}$$

5.13 Vypočítejte derivaci funkce  $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2xy$  v bodě  $[2, 3]$  ve směru vektoru  $\vec{u} = (-3, 2)$ .

$$-\frac{58}{\sqrt{13}}$$

5.14 Nalezněte hodnotu derivace funkce  $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$  ve směru největšího růstu v bodě  $[1, -3]$ .

$$5\sqrt{2}$$

5.15 Nalezněte první a druhý diferenciál funkce  $f(x) = x \cos x$ , vyčíslíte v bodě  $[\pi/4]$ .

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) dx, -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 + \frac{\pi}{4}\right) dx^2$$

5.16 Nalezněte první a druhý diferenciál funkce  $f(x, y) = (x + y^3)^2$ , vyčíslete v bodě  $[2, 3]$ .

$$58 dx + 1566 dy, 2 dx^2 + 108 dx dy + 2502 dy^2$$

5.17 Nalezněte první a druhý diferenciál funkce  $f(x, y) = xy + x \cos y + y^x$ , vyčíslete v bodě  $[1, e]$ .

$$(2e + \cos e) dx + (2 - \sin e) dy, e dx^2 + (6 - 2 \sin e) dx dy - (\cos e) dy^2$$

5.18 Nalezněte první a druhý diferenciál funkce  $f(x, y) = \ln(x + y^2)$ , vyčíslete v bodě  $[1, 1]$ .

$$\frac{1}{2} dx + dy, -\frac{1}{4} dx^2 - dx dy$$

5.19 Užitím prvního diferenciálu přibližně vypočítejte hodnotu čísla  $1,03 \times 1,98$  a porovnejte s hodnotou určenou kalkulačkou.

$$2,04 \text{ (kalkulačkou } 2,0394)$$

5.20 Užitím prvního diferenciálu přibližně vypočítejte hodnotu čísla  $\left(\frac{3,96}{2,01}\right)^3$  a porovnejte s hodnotou určenou kalkulačkou.

$$7,64 \text{ (kalkulačkou } 7,64711\dots)$$

5.21 Užitím prvního diferenciálu přibližně vypočítejte hodnotu čísla  $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,01}{0,98}\right)$  a porovnejte s hodnotou určenou kalkulačkou.

$$\frac{\pi}{4} + 0,015 \approx 0,8004 \text{ (kalkulačkou } 0,80047\dots)$$

## 5.2 Kmenová funkce

S *kmenovou funkcí* jsme se již setkali v souvislosti s diferenciálními rovnicemi exaktními v oddíle 3.1.4. Pojem kmenová funkce úzce souvisí s pojmy totálního diferenciálu a konzervativního vektorového pole. O obecném vektorovém poli  $\vec{A}(\vec{x})$  říkáme že je konzervativní, pokud existuje taková skalární funkce  $\varphi(\vec{x})$ , že platí

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}), \quad \text{resp.} \quad d\varphi(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (5.7)$$

Výraz  $\vec{\nabla}\varphi$  v levé části rovnice 5.7 znamená *gradient* funkce  $\varphi$  (viz oddíl 5.3), výraz v pravé části rovnice 5.7 je totálním diferenciálem funkce  $\varphi$ . Pokud rovnice (5.7) platí, funkci  $\varphi$  nazýváme kmenovou funkcí (záporným skalárním potenciálem, kdy skalární potenciál  $\phi = -\varphi$ ) konzervativního vektorového pole  $\vec{A}$ . Intenzita  $\vec{E}$  obecného konzervativního pole potom bude  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  a odpovídající silové pole  $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$ , kde  $E_p$  je potenciální energie. O tom, jestli zadané vektorové pole je konzervativní, se přesvědčíme na základě Schwarzovy věty, tedy postupem uvedeným v rovnici (3.16). Postup můžeme zobecnit na libovolný počet proměnných, tedy

$$\frac{\partial A_j(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\partial x_j}, \quad (5.8)$$

kde  $A_j, A_k$  značí  $j$ -tou a  $k$ -tou složku vektoru  $\vec{A}$ , volné indexy  $j, k$  nabývají postupně všech hodnot od 1 do  $n$ .

Kmenovou funkci potom najdeme (například ve trojrozměrném případě) pomocí integrálu

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^x A_x(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y A_y(x_0, t, z) dt + \int_{z_0}^z A_z(x_0, y_0, t) dt. \quad (5.9)$$

V případě jiného počtu dimenzí bude předpis 5.9 odpovídajícím způsobem zkrácen nebo rozšířen.

### • Příklady:

Rozhodněte, zda daný výraz je totálním diferenciálem, v kladném případě určete odpovídající kmenovou funkci:

5.22  $(\sin x + y) dx + (x^2 + \cos y) dy$

Výraz není totálním diferenciálem.

5.23  $(x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$

$$\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} - \left( \frac{x_0^3}{3} + x_0 y_0 + \frac{y_0^3}{3} \right)$$

5.24  $xy^2 dx + (y^2 + x^2 y + 4) dy$

$$\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + 4y - \left( \frac{x_0^2 y_0^2}{2} + \frac{y_0^3}{3} + 4y_0 \right)$$

5.25  $(x + 2xy) dx + (\cos y + x^2) dy$

$$\frac{x^2}{2} + x^2 y + \sin y - \left( \frac{x_0^2}{2} + x_0^2 y_0 + \sin y_0 \right)$$

5.26  $y' \left( \frac{\ln x}{y^2} - y \right) = \frac{1}{xy}, y(1) = 2$

$$2 - \frac{\ln x}{y} - \frac{y^2}{2}$$

5.27  $\left( 3x^2 - 2xy + \frac{1}{y} \right) - \left( x^2 + \frac{x}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) y', y(0) = 1$

$$x^3 - x^2 y + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} - 1$$

5.28  $(6x^3 y^2 + 3x^2) dx + (3x^4 y + \cos y) dy, y(1) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{3}{2} x^4 y^2 + x^3 + \sin y - \frac{3\pi^2}{8} - 2$$

5.29  $-\frac{2x}{x^2 + y^2} dx - \frac{2y}{x^2 + y^2} dy, y(1) = 1$

$$\ln 2 - \ln(x^2 + y^2)$$

5.30  $\frac{1}{y^2} dx + \left( -\frac{2x}{y^3} + e^y \right) dy, y(0) = 1$

$$\frac{x}{y^2} + e(e^{y-1} - 1)$$

5.31  $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} dx + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} dy, y(1) = 2$

$$\sqrt{x^3 + y^3} \pm 3$$

Dokažte, že dané silové pole je konzervativní, a určete odpovídající potenciální energii  $V$  ( $k$  je konstanta,  $Q_1$  a  $Q_2$  jsou konstantní elektrické náboje):

5.32  $\vec{F} = -k\vec{r}$  (pružná síla)

$$V = \frac{kr^2}{2} = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

5.33  $\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r}$  (elektrostatická síla)

$$V = k \frac{Q_1 Q_2}{r} = k \frac{Q_1 Q_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

5.34 Nalezněte potenciál vektorového pole  $\vec{A} = (2xy, x^2)$ . Je tento potenciál určený jednoznačně ?

$$\phi = -x^2y + C$$

5.35 Intenzita fyzikálního pole je určena vektorem  $\vec{A} = \left[ \ln(x-y) + \frac{x}{x-y}, -\frac{x}{x-y}, 0 \right]$ . Lze pro toto pole stanovit příslušný potenciál ? Pokud ano, nalezněte jej. Bude tento potenciál určen jednoznačně ?

$$\phi = -x \ln(x-y) + C$$

5.36 Dokažte, že dané centrální silové pole  $\vec{F} = -k \vec{r} r$  je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii  $V$  v bodě  $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$ , pokud její hodnota v bodě  $x, y, z = (0, 0, 0)$  je rovna  $V_0$ . Veličina  $k$  je konstanta,  $\vec{r}$  je polohový vektor,  $r$  je jeho velikost.

$$V(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{k}{3} (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{3/2} + V_0$$

5.37 Dokažte, že dané centrální silové pole  $\vec{F} = -\frac{k \vec{r}}{r}$ , definované pro  $r \geq 1$ , je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii  $V$  v bodě  $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$ , pokud její hodnota v minimální definované vzdálenosti od bodu  $x, y, z = (0, 0, 0)$  je rovna  $V_0$ . Veličina  $k$  je konstanta,  $\vec{r}$  je polohový vektor,  $r$  je jeho velikost.

$$V(X_0, Y_0, Z_0) = k \left( \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - 1 \right) + V_0$$

5.38 Dokažte, že dané silové pole  $\vec{F} = -k \frac{\vec{r}}{r^3}$ , definované pro  $r \geq 1$ , je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii  $V$  v bodě  $X_0, Y_0, Z_0 = (2, 2, 1)$ , pokud hodnotu potenciální energie ve vzdálenosti  $r = 1$  od bodu  $x, y, z = (0, 0, 0)$  stanovíme jako  $E_0 = 0$ . Veličina  $k = 1,5$  je obecná konstanta,  $r$  je velikost polohového vektoru  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

$$V(2, 2, 1) = k \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}} \right) + E_0 = 1$$

5.39 Dokažte, že centrální silové pole  $\vec{F}$ , definované pro  $r \geq 1$ , je konzervativní a určete potenciální energii  $V$  pole v bodě  $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$ , pokud stanovíme její hodnotu v minimální definované vzdálenosti od bodu  $x, y, z = (0, 0, 0)$  je jako nulovou:

(a)  $\vec{F} = -k \vec{r} \ln r$ ,

(b)  $\vec{F} = -k \vec{r} \ln r^2$ ,

(c)  $\vec{F} = -k \vec{r} \ln r^3$ .

Veličina  $k$  je konstanta,  $\vec{r}$  je polohový vektor,  $r$  je jeho velikost.

(a)  $V(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{k}{2} \left[ (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) \left( \ln \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right]$

(b)  $V(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{k}{2} \left\{ (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) [\ln (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) - 1] + 1 \right\}$

(c)  $V(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{k}{2} \left\{ (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) \left[ \ln (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \right] + \frac{3}{2} \right\}$



5.40 Dokažte, že dané silové pole  $\vec{F} = -k(x, y, z) \ln r^{-2}$ , definované pro  $r \geq 1$ , je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii  $V$  v bodě  $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$ , pokud potenciální energie ve vzdálenosti  $r = 1$  od bodu  $x, y, z = (0, 0, 0)$  je rovna  $E_0$ . Veličina  $k$  je konstanta,  $r$  je velikost polohového vektoru  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

$$V(X_0, Y_0, Z_0) = -\frac{k}{2} \{ (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) [\ln (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) - 1] + 1 \} + E_0$$

5.41 Dokažte, že dané centrální silové pole  $\vec{F} = -k \vec{r} e^r$  je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii  $V$  v bodě  $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$  pokud hodnota potenciální energie v bodě  $x, y, z = (0, 0, 0)$  je rovna  $-V_0 = -k$ . Veličina  $k$  je konstanta,  $\vec{r}$  je polohový vektor,  $r$  je jeho velikost.

$$V(X_0, Y_0, Z_0) = V_0 e^{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}} \left( \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - 1 \right)$$

### 5.3 Diferenciální operátory

Diferenciální operátory určují působení operátoru nabra (viz oddíl 5.1) na skalární nebo vektorové (případně tenzorové) pole některým z následujících způsobů:

- *gradient* skalární funkce  $f$ :  $\text{grad } f = \vec{\nabla} f$ ,                      výsledkem je vektor                      (5.10)

- *divergence* vektorového pole  $\vec{A}$ :  $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ,                      výsledkem je skalár                      (5.11)

- *rotace* vektorového pole  $\vec{A}$ :  $\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ,                      výsledkem je vektor                      (5.12)

- Laplaceův operátor (*Laplacián*):  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ ,                      nemění původní pole                      (5.13)

Laplaceův operátor tzv. nemění řád tenzoru, tj. pokud působí na skalár, výsledkem je skalár, pokud působí na vektor, výsledkem zůstává vektor, atd. (viz příloha A). Variantní forma zápisu diferenciálních operátorů pomocí volných indexů (v Einsteinově konvenci) může v kartézském souřadnicovém systému vypadat následovně (význam funkce  $\delta_{ij}$  a tenzoru  $\varepsilon_{ijk}$  je vysvětlen v odstavci 2.3):

- *gradient* skalární funkce  $f$ :  $\text{grad } f = \vec{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,                      (5.14)

- *divergence* vektorového pole  $\vec{A}$ :  $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_j \delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_i$ ,                      (5.15)

- *rotace* vektorového pole  $\vec{A}$ :  $\text{rot } \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} A_k$ ,                      (5.16)

- Laplaceův operátor (*Laplacián*):  $\Delta f = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f$ ,     $\Delta \vec{A} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} A_i$ .                      (5.17)

Gradient skalární funkce reprezentuje vektorové pole, udávající velikost a směr největšího nárůstu dané skalární funkce. Divergenci vektoru můžeme interpretovat například jako „míru expanze“ dané vektorové veličiny (respektive jejího toku) v obecném bodě v prostoru, případně jako její „zřídlovost“, tj. míru toho, jak mnoho se tok daného vektorového pole chová jako „zdroj“ příslušné vektorové veličiny. Například, pokud vektorové pole zároveň „vzniká“ (zdroj)

i „zaniká“ (propad), je jeho divergence nulová (případ magnetické indukce), rovněž homogenní vektorové pole (konstantní vektor) musí mít z definice nulovou divergenci, atd. Rotace vektorového pole (jak vyplývá z názvu) popisuje infinitesimální rotaci daného pole v obecném bodě v prostoru; pokud je rotace nulová, mluvíme o „nevírovém“ toku dané vektorové veličiny.

Podrobný popis odvození jednotlivých diferenciálních operátorů v hlavních souřadnicových soustavách včetně související matematiky je uveden v příloze A. Zde je uveden pouze základní přehled operátorů (ve válcové soustavě nyní zavádíme pro odlišení  $\rho$  namísto  $r$ ):

- Kartézská souřadná soustava ( $x_1, x_2, x_3 = x, y, z$ ):

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (5.18)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (5.19)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \quad (5.20)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.21)$$

- Válcová souřadná soustava ( $x_1, x_2, x_3 = \rho, \phi, z$ ):

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (5.22)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (5.23)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \right\}, \quad (5.24)$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.25)$$

- Kulová souřadná soustava ( $x_1, x_2, x_3 = r, \theta, \phi$ ):

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right), \quad (5.26)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, \quad (5.27)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right], \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right], \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \right\}, \quad (5.28)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (5.29)$$

### • Příklady:

Pro skalární funkce  $f, g$  a vektory  $\vec{A}, \vec{B}$  dokažte:

$$5.42 \quad \vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla}f)g + f\vec{\nabla}g$$

$$5.43 \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = \vec{0}$$

$$5.44 \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$5.45 \quad \vec{\nabla} \cdot f\vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f + f\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$5.46 \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$5.47 \quad \vec{\nabla} \times f\vec{A} = \vec{\nabla}f \times \vec{A} + f\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$5.48 \quad \text{Dokažte platnost operátorové identity } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}.$$

$$5.49 \quad \text{Dokažte platnost operátorové identity } \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} A^2 - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}.$$

Příklady 5.42 - 5.49 - pomocí vektorových operací v kartézských souřadnicích.

$$5.50 \quad \text{Spočítejte } \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{F}), \vec{F} = [xyz, y(x^2 - z^2), xy + zx + yz]. \quad 0$$

$$5.51 \quad \text{Spočítejte } \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{F}), \vec{F} = (x^2y, y^2, z^2x). \quad 0$$

$$5.52 \quad \text{Spočítejte } \operatorname{grad} f, f(x, y, z) = 2xyz + x^2y + y^2z + z^2x.$$

$$2yz + 2xy + z^2, 2xz + x^2 + 2yz, 2xy + y^2 + 2xz$$

5.53 Středově symetrické (izotropní) fyzikální pole je určeno vektorem  $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r}$ , kde  $\vec{r}$  je polohový vektor,  $r$  je jeho velikost. Dokažte, že divergence tohoto pole, tedy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{2}{r}$ .

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{r}$$

5.54 Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem  $\phi = \ln\left(\frac{A}{r}\right) + B$ , kde  $A$  je kladná konstanta,  $r$  je velikost polohového vektoru  $\vec{r}$ . Konstanta  $B$  nastavuje hodnotu potenciálu  $\phi$  ve vzdálenosti  $A$  od bodu  $x, y, z = (0, 0, 0)$ . Určete vektor intenzity  $\vec{E}$  tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}$ .

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

5.55 Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem  $\phi = -Ar^3 + B$ , kde konstanta  $A$  škáluje velikost  $r$  polohového vektoru  $\vec{r}$ , konstanta  $B$  nastavuje hodnotu potenciálu  $\phi$  v bodě  $x, y, z = (0, 0, 0)$ . Určete vektor intenzity  $\vec{E}$  tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 12Ar$ .

$$\vec{E} = 3A\vec{r}r = 3A(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12Ar = 12A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

5.56 Hypotetické centrální fyzikální pole, definované pro vzdálenost  $r \geq 1$ , je určeno potenciálem  $\phi = -Ar^2 \ln r^2 + B$ , kde konstanta  $A$  škáluje velikost  $r$  polohového vektoru  $\vec{r}$ , konstanta  $B$  nastavuje hodnotu potenciálu  $\phi$  v minimální definované vzdálenosti od bodu

$x, y, z = (0, 0, 0)$ . Určete vektor intenzity  $\vec{E}$  tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A(6 \ln r^2 + 10)$ .

$$\vec{E} = 2A\vec{r}(\ln r^2 + 1) = 2A(x, y, z) [\ln(x^2 + y^2 + z^2) + 1], \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A(6 \ln r^2 + 10)$$

5.57 Hypotetické fyzikální pole je určeno nesymetrickým potenciálem  $\phi = \frac{Ax}{r}$ , kde  $A$  je kladná konstanta a  $r$  je velikost polohového vektoru  $\vec{r}$ . Určete vektor intenzity  $\vec{E}$  tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{2\phi}{r^2}$ .

$$\vec{E} = \frac{-A(y^2 + z^2), Axy, Axz}{r^3}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{2Ax}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2Ax}{r^3}$$

5.58 Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem  $\phi = Ae^{-r}$ , kde  $A$  je kladná konstanta,  $r$  je velikost polohového vektoru  $\vec{r}$ . Určete vektor intenzity  $\vec{E}$  tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = Ae^{-r} \left( \frac{2}{r} - 1 \right)$ .

$$\vec{E} = Ae^{-r} \frac{\vec{r}}{r} = Ae^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = Ae^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \left( \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1 \right)$$

5.59 Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem  $\phi = A^{-r}$ , kde  $A$  je kladná konstanta,  $r$  je velikost polohového vektoru  $\vec{r}$ . Určete vektor intenzity  $\vec{E}$  tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A^{-r} \ln A \left( \frac{2}{r} - \ln A \right)$ .

$$\vec{E} = A^{-r} \ln A \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ln A \left( \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \ln A \right)$$

5.60 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu ověřte vektorové identity z příkladů (5.42)-(5.49) v Einsteinově notaci.

Pomocí rovnic (2.48) a (5.14)-(5.17).

## Kapitola 6

# Dvojný a trojný integrál<sup>1</sup>

Na integrál funkce  $f(x, y)$  dvou proměnných  $x, y$  (dvojný integrál), která je spojitá na dvou-rozměrné oblasti  $\mathcal{S} = (a, b) \times (c, d)$ , kde  $a \leq x \leq b$  a  $c \leq y \leq d$ , je možné aplikovat tzv. *Fubiniho větu* o výpočtu  $n$ -rozměrných integrálů pomocí  $n$  výpočtů jednoduchých integrálů,

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (6.1)$$

Pokud je oblast  $\mathcal{S}$  ohraničená způsobem  $\mathcal{S} = (a, b) \times [\phi_1(x), \phi_2(x)]$ , kde  $a \leq x \leq b$  a kde pro spojitě funkce  $\phi_1(x), \phi_2(x)$  proměnné  $x$  na celém intervalu  $a, b$  platí  $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ , je integrál spojitě funkce  $f(x, y)$  dvou proměnných definován jako

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (6.2)$$

Analogickým způsobem je na třírozměrné oblasti  $\mathcal{V} = (a, b) \times [\phi_1(x), \phi_2(x)] \times [\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)]$ , kde  $a \leq x \leq b$ , kde pro spojitě funkce  $\phi_1(x), \phi_2(x)$  proměnné  $x$  na celém intervalu  $a, b$  platí  $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$  a kde pro spojitě funkce  $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)$  dvou proměnných  $x, y$  na celé oblasti  $\mathcal{S} = (a, b) \times [\phi_1(x), \phi_2(x)]$  platí  $\psi_1(x, y) \leq \psi_2(x, y)$ , integrál spojitě funkce  $f(x, y, z)$  tří proměnných (trojný integrál) definován jako

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b \left[ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left( \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Transformaci souřadnic dvojného integrálu lze definovat (viz obrázek 6.1) pomocí prostého regulárního zobrazení  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2(x, y)$ , zadaného transformačními rovnicemi  $x = \xi(u, v)$ ,  $y = \eta(u, v)$ , kde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2(u, v)$  je otevřená oblast. Pokud  $A \subset \mathbb{R}^2(x, y)$  a  $B \subset \mathbb{R}^2(u, v)$  jsou uzavřené oblasti, kdy  $A \subset \Phi(B)$ , a pokud funkce  $f(x, y)$  dvou proměnných  $x$  a  $y$  je spojitá v oblasti  $A = \Phi(B)$ , potom platí

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f[\xi(u, v), \eta(u, v)] J(u, v) du dv. \quad (6.4)$$

<sup>1</sup>Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

Výraz

$$J(u, v) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|, \quad (6.5)$$

v rovnici (6.4) je *Jakobián* dvourozměrné souřadnicové transformace. V případě trojného integrálu funkce  $f(x, y, z)$  tří proměnných  $x, y, z$ , spojitě v uzavřené oblasti  $A \subset \mathbb{R}^3(x, y, z)$ , s transformačními rovnicemi  $x = \xi(u, v, w)$ ,  $y = \eta(u, v, w)$ ,  $z = \zeta(u, v, w)$ , v oblasti  $B \subset \mathbb{R}^3(u, v, w)$  analogicky k rovnici (6.4) platí,

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B f[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w)] J(u, v, w) \, du \, dv \, dw. \quad (6.6)$$

Výraz

$$J(u, v, w) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \right|, \quad (6.7)$$

v rovnici (6.6) je *Jakobián* trojrozměrné souřadnicové transformace. Významné a často používané jsou *Jakobiány* souřadnicových transformací (podrobný popis je v příloze A) z kartézské do válcové souřadné soustavy, kdy  $(u, v, w) = (\rho, \phi, z)$ , s transformačními rovnicemi  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ ,  $z = z$ , kde  $J = \rho$ , a z kartézské do kulové souřadné soustavy, kdy  $(u, v, w) = (r, \theta, \phi)$ , s transformačními rovnicemi  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ , kde  $J = r^2 \sin \theta$ .

## 6.1 Plošný integrál 1. druhu

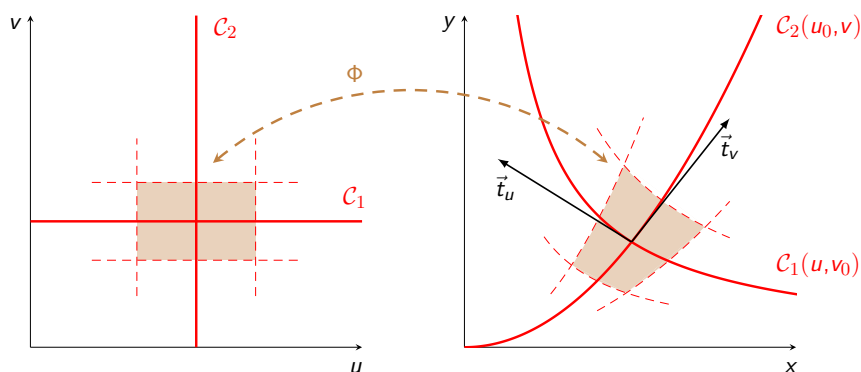
Plošným integrálem 1. druhu nazýváme (analogicky ke křivkovému integrálu 1. druhu v odstavci 4.1) integrál  $\iint_S f \, dS$  skalární funkce  $f(x, y, z)$ , spojitě diferencovatelné na úseku (hladké, tj. spojitě diferencovatelné) plochy  $S$ , kde  $dS$  je element plochy  $S$ . Stanovíme-li například souřadnice  $x$  a  $y$  jako nezávislé proměnné a funkci  $z = z(x, y)$  jako závislé proměnnou, můžeme tečné vektory  $\vec{t}_x, \vec{t}_y$  k ploše  $S$  ve směrech souřadnicových os  $x, y$  určit jako parciální derivace funkce dané plochy (viz odstavec 5.1) podle příslušných směrů, tedy

$$\vec{t}_x = \left( \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left( 1, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \vec{t}_y = \left( \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left( 0, 1, \frac{\partial z}{\partial y} \right). \quad (6.8)$$

Vektor  $\vec{\nu}$  normály plochy  $S$  (tj. vektor kolmý k ploše  $S$ ) určíme jako vektorový součin tečných vektorů  $\vec{t}_x \times \vec{t}_y$  (jejichž pořadí ve vektorovém součinu závisí na požadované orientaci normály), jeho velikost (viz rovnice (2.1)) bude  $\|\vec{\nu}\| = \|\vec{t}_x \times \vec{t}_y\|$ , tedy

$$\vec{\nu} = \pm(\vec{t}_x \times \vec{t}_y) = \pm \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right), \quad \|\vec{\nu}\| = \|\vec{t}_x \times \vec{t}_y\| = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}. \quad (6.9)$$

Samotný plošný element je vektorem, orientovaným ve směru normálového vektoru, kde velikost plošného elementu je určena velikostí normálového vektoru. Ve zvolené kartézské parametrizaci



Obrázek 6.1: Schéma transformace obecných souřadnic, popsané rovnicí (6.4), kde  $\Phi$  symbolizuje vzájemně jednoznačné zobrazení.  $C_1, C_2$  jsou souřadnicové křivky, pro které platí  $C_1: x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), C_2: x = x(u_0, v), y = y(u_0, v)$ , čárkované čáry, ohraničující zvýrazněnou plochu, můžeme označit jako:  $C_1^+(u, v_0 + \Delta v), C_1^-(u, v_0 - \Delta v), C_2^+(u_0 + \Delta u, v), C_2^-(u_0 - \Delta u, v)$ . Tečné vektory  $\vec{t}_u, \vec{t}_v$  k souřadnicovým křivkám v bodě  $u_0, v_0$  stanovíme podle rovnice (6.12).

tedy můžeme psát

$$d\vec{S} = \vec{v} dx dy = \pm \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) dx dy, \quad dS = \|\vec{v}\| dx dy = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy. \quad (6.10)$$

Zjevně tedy platí  $d\vec{S} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} dS = \vec{n} dS$ , kde  $\vec{n}$  je jednotkový normálový vektor. Explicitní zápis plošného integrálu 1. druhu v kartézské bázi, kde  $a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$  (srovnej rovnice (6.1), (6.2)) a  $z = z(x, y)$ , tedy bude:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y, z) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy. \quad (6.11)$$

Nalezneme-li vhodné parametry  $u, v$  (např.  $\theta, \phi$  na kulové ploše), můžeme funkci  $f$  i plochu  $S$  parametrizovat pomocí transformačních rovnic  $x = \xi(u, v), y = \eta(u, v), z = \zeta(u, v)$  (viz rovnice (6.6)). Tečné vektory  $\vec{t}_u, \vec{t}_v$  k dané ploše  $S$  v souřadnicových směrech  $u, v$  (viz obrázek 6.1) stanovíme jako parciální derivace funkce dané plochy (viz odstavec 5.1) podle příslušných směrů, tedy

$$\vec{t}_u = \left( \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right), \quad \vec{t}_v = \left( \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right). \quad (6.12)$$

Normálový vektor  $\vec{v}'$  (který nebude totožný s vektorem  $\vec{v}$  z rovnice (6.9), bude mít sice stejný směr ale různou délku) určíme opět jako vektorový součin tečných vektorů  $\vec{v}' = \pm(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)$ , jeho velikost  $\|\vec{v}'\| = \|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\|$ . Analogicky k rovnici (6.10) dostáváme:

$$d\vec{S} = \vec{v}' du dv, \quad dS = \|\vec{v}'\| du dv = \|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\| du dv. \quad (6.13)$$

Plošný integrál 1. druhu v parametrickém vyjádření bude mít explicitní tvar

$$\int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} f(\xi, \eta, \zeta) \left\| \left( \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) \times \left( \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right) \right\| du dv. \quad (6.14)$$

Vzájemná souvislost mezi rovnicemi (6.10) a (6.13) je dána rovnicí (6.4), z níž vyplývá:  $\vec{v} dx dy = \vec{v}' J(u, v) du dv$  a zároveň  $\|\vec{v}\| dx dy = \|\vec{v}'\| J(u, v) du dv$ , kde  $J(u, v)$  je Jakobián souřadnicové transformace, daný rovnicí (6.5).

Například pro kulovou plochu o poloměru  $R$  se středem v počátku souřadnic, s kartézskou rovnicí  $z(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , s vnější normálou, bude mít rovnice (6.10) konkrétní podobu

$$d\vec{S} = \left( \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right) dx dy, \quad dS = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad x^2 + y^2 \neq R^2, \quad (6.15)$$

jejím zintegrováním v mezích  $x \in \langle -R, R \rangle$ ,  $y \in \langle -\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2} \rangle$  dostáváme  $S = 2\pi R^2$ , což je velikost části kulové plochy nad rovinou  $z = 0$ . Parametrizovaná rovnice (6.13) bude mít podobu

$$d\vec{S} = (R^2 \sin^2 \theta \cos \phi, R^2 \sin^2 \theta \sin \phi, R^2 \sin \theta \cos \theta) d\theta d\phi, \quad dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (6.16)$$

jejím zintegrováním v mezích  $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ ,  $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$  dostáváme  $S = 4\pi R^2$ . Vzhledem k tomu, že Jakobián, odpovídající rovnici (6.5) bude v tomto případě  $R^2 \sin \theta \cos \theta$ , snadno se z rovnic (6.15), (6.16) přesvědčíme o platnosti vztahu  $\|\vec{v}\| dx dy = \|\vec{v}'\| J(\theta, \phi) d\theta d\phi$ .

Pomocí plošného integrálu 1. druhu lze určit geometrické a fyzikální charakteristiky dané plochy: Položíme-li  $f = 1$ , výsledkem bude celková velikost plochy  $S$ . Položíme-li  $f = \sigma$  (plošná hustota), dostáváme  $\sigma dS = dm$ , tedy element hmotnosti plochy  $S$ , výsledkem integrace bude celková hmotnost  $m$  dané plochy,

$$m = \iint_S dm = \iint_S \sigma dS. \quad (6.17)$$

Pokud položíme například  $f = z\sigma$ , dostáváme tzv. statický moment  $S_z$  dané plochy vzhledem k ose  $z$ , jeho vydělením hmotností dostáváme  $z$ -ovou souřadnici středu hmotnosti  $z_T$  plochy (obdobně pro ostatní souřadnicové směry), tedy

$$x_T = \frac{1}{m} \iint_S x dm = \frac{1}{m} \iint_S x\sigma dS, \quad y_T = \frac{1}{m} \iint_S y dm, \quad z_T = \frac{1}{m} \iint_S z dm. \quad (6.18)$$

Položíme-li  $f = r^2\sigma$ , kde  $r$  je vzdálenost obecného bodu plochy od zvolené přímky v prostoru (osy  $o$ ), dostáváme moment setrvačnosti  $J_o$  dané plochy vzhledem k této ose. Momenty setrvačnosti plochy  $S$  např. vzhledem k jednotlivým kartézským souřadnicovým osám potom budou

$$J_x = \iint_S (y^2 + z^2) dm = \iint_S (y^2 + z^2) \sigma dS, \quad J_y = \iint_S (z^2 + x^2) dm, \quad J_z = \iint_S (x^2 + y^2) dm. \quad (6.19)$$

### • Příklady:

V kartézských souřadnicích i pomocí vhodné parametrizace vypočítejte obsah plochy  $S \in \mathbb{R}^2$ , ohraničené následujícími křivkami:

$$6.1 \quad y = x^2, \quad y = ex^2, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{4}{x}$$



- 6.2  $y = x^2, y = 16x^2, y = \frac{2\sqrt[3]{2}}{x^2}, y = \frac{16}{x^2}$  8
- 6.3  $y = x^3, y = \frac{x^3}{3}, y = \frac{1}{x}, y = \frac{e}{x}$   $\frac{(e-1)\ln 3}{4}$
- 6.4  $y = 1, y = e, y = e^{0,2x}, y = e^{0,4x}$  2,5

Pomocí vhodné parametrizace, případně v kartézských souřadnicích, vypočítejte obsah plochy  $S \in \mathbb{R}^3$ :

- 6.5  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0, a \leq R\}$  (kulový vrchlík)  $2\pi R [R - \sqrt{R^2 - a^2}]$
- 6.6  $S = \{x^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$
- (a)  $|x| \leq |y| \leq a$   $2a^2(\pi - 2)$
- (b)  $|x| > |y|$   $4a^2$
- 6.7  $S = \{x^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0\}$   $4a^2$
- 6.8 Prostorová křivka, daná průnikem kulové plochy  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$  a válcové plochy  $S' = \{(x-a)^2 + y^2 = a^2\}$ , kde  $a = R/2$ , vymezuje na povrchu kulové plochy uzavřenou plochu (tzv. Vivianiho okno). Vypočítejte obsah této plochy.
- $2R^2(\pi - 2)$
- 6.9 Vypočítejte obsah části zemského povrchu, ohraničeného v jednom směru dvěma sousedními poledníky (například 15. a 16.) a ve druhém směru dvěma sousedními rovnoběžkami:
- (a) 0. (rovníkem) a 1.,
- (b) 49. a 50.,
- (c) 89. a 90. (pólem).

Obsahy jednotlivých ploch udejte v  $\text{km}^2$ . Poloměr Země,  $R = 6371 \text{ km}$ , považujte za konstantu.

- (a) cca  $12\,364 \text{ km}^2$
- (b) cca  $8\,030 \text{ km}^2$
- (c) cca  $108 \text{ km}^2$

V kartézských souřadnicích i pomocí vhodné parametrizace vypočítejte plošné integrály 1. druhu:

- 6.10  $\iint_S x^2 z \, dS$ , kde  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ .  $\frac{\pi R^5}{4}$
- 6.11  $\iint_S \sqrt{2} x^2 z \, dS$ , kde  $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \in \langle 0, H \rangle\}$ .  $\frac{2\pi R^5}{5}, R = H$

- 6.12  $\iint_S (x^2 + y^2) \, dS$ , kde  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ .  $\frac{4}{3}\pi R^4$
- 6.13  $\iint_S x^2 y^2 \, dS$ , kde  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ .  $\frac{2}{15}\pi R^6$
- 6.14  $\iint_S x^2 z^2 \, dS$ , kde  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ .  $\frac{2}{15}\pi R^6$
- 6.15  $\iint_S y^2 \, dS$ , kde  $S = \left\{z = H - \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}, z \in \langle 0, H \rangle\right\}$ .  $\frac{\pi R^3}{4}\sqrt{R^2 + H^2}$
- 6.16  $\iint_S z \, dS$ , kde  $S = \{x + y + z = 1, x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 - x \rangle\}$ .  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$
- 6.17  $\iint_S \frac{1}{x^2 + y^2 + z} \, dS$ , kde  $S = \{x^2 + y^2 + z = H, z \geq 0\}$ .  $\frac{\pi}{6H} \left[ (1 + 4H)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$
- 6.18 Vypočítejte hmotnost kulového vrchlíku  $S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}, z \geq 0\right\}$  s plošnou hustotou  $\sigma(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$ .  
 $R^3 \left( \frac{11}{12}\pi + \sqrt{3} \right)$
- 6.19 Vypočítejte polohu středu hmotnosti plochy  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ , jejíž plošná hustota  $\sigma$  je dána funkcí  $\sigma = x^2 + z^2$ .  
 $x_T = 0, y_T = 0, z_T = \frac{9R}{16}$
- 6.20 Vypočítejte polohu středu hmotnosti plochy  $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \in \langle 0, H \rangle\}$ , jejíž plošná hustota  $\sigma$  je dána funkcí  $\sigma = x^2 + z^2$ .  
 $x_T = 0, y_T = 0, z_T = \frac{4H}{5}$
- 6.21 Spirálová plocha s konstantní plošnou hustotou  $\sigma$  je zadána parametricky ve tvaru  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, u \in \langle 0, a \rangle, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Vypočítejte:
- hmotnost této plochy,
  - polohu jejího těžiště,
  - moment setrvačnosti vzhledem k její geometrické ose.
- (a)  $\pi\sigma \left[ a\sqrt{1+a^2} + \ln \left( a + \sqrt{1+a^2} \right) \right]$   
 (b)  $(0, 0, \pi)$   
 (c)  $\frac{\pi\sigma}{4} \left[ (2a^3 + a)\sqrt{1+a^2} - \ln \left( a + \sqrt{1+a^2} \right) \right]$
- 6.22 Vypočítejte následující parametry plochy z příkladu 6.15, pokud její plošná hustota bude  $\sigma = x^2 z$ :

- (a) hmotnost této plochy,  
 (b) polohu jejího těžiště,  
 (c) moment setrvačnosti vzhledem k její geometrické ose.

$$(a) \frac{\pi}{20} H R^3 \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$(b) z_T = \frac{H}{3}$$

$$(c) \frac{\pi}{42} H R^5 \sqrt{R^2 + H^2}$$

6.23 Vypočítejte následující parametry plochy z příkladu 6.16, pokud její plošná hustota bude  $\sigma = x^2 + y^2$ :

- (a) hmotnost této plochy,  
 (b) polohu jejího těžiště.

$$(a) \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$(b) \left( \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

6.24 Vypočítejte hmotnost plochy z příkladu 6.17, pokud její plošná hustota bude  $\sigma = x^2$ :

$$\frac{\pi}{16} \left[ (4R^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{4}{5}R^2 - \frac{2}{15} \right) + \frac{2}{15} \right]$$

6.25 Vypočítejte celkovou tlakovou sílu, kterou působí kapalina o konstantní hustotě  $\rho$  na všechny stěny uzavřené nádoby, tvořené plochou z příkladu 6.15 a odpovídající podstavou (atmosférický tlak zanedbejte).

$$\pi \rho g H \left( \frac{2}{3} R \sqrt{R^2 + H^2} + R^2 \right)$$

6.26 Vypočítejte celkovou tlakovou sílu, kterou působí kapalina o konstantní hustotě  $\rho$  na všechny stěny uzavřené nádoby, tvořené plochou z příkladu 6.17 a odpovídající podstavou (atmosférický tlak zanedbejte).

$$\frac{\pi}{8} \rho g \left[ (4R^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{4}{5}R^2 - \frac{2}{15} \right) + \frac{2}{15} \right] + \pi \rho g R^4$$

6.27 Plášť vodojemu ve tvaru kužele, stojícího „špičkou“ dolů, o poloměru horní vodorovné plochy  $R = 3$  m a výšce  $H = 4$  m je dimenzován tak, aby odolal celkové tlakové síle  $10^6$  N. Je dimenzován dostatečně, nedostatečně, nebo je přibližně na hranici konstrukční odolnosti? Uvažujte hodnoty konstant  $\rho = 1000$  kg m<sup>-3</sup>,  $g = 9,81$  m s<sup>-2</sup>. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte.

$F_p \approx 6,3 \times 10^5$  N. Plášť vodojemu je dimenzován dostatečně.

6.28 Nádoba ve tvaru kužele stojícího „špičkou“ dolů je naplněna speciální kapalinou, v níž tlak roste s hloubkou jako  $p = \rho_0 g h^2$ , kde  $\rho_0$  je hustota kapaliny na hladině a  $h$  je hloubka daného místa v nádobě. Poloměr horní vodorovné plochy nádoby  $R = 0,5$  m a výška nádoby  $H = 1$  m. Určete tlakovou sílu, které musí nádoba odolat. Uvažujte hodnoty konstant  $\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . Vliv atmosférického tlaku zanedbejte.

$$F_p \approx 3000 \text{ N.}$$

6.29 Plášť kulového vodojemu o poloměru  $R = 2$  m je dimenzován tak, aby odolal celkové tlakové síle  $10^6$  N. Je dimenzován dostatečně, nedostatečně, nebo je zhruba na hranici konstrukční odolnosti? Uvažujte hodnoty konstant  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . Vliv atmosférického tlaku zanedbejte.

$$F_p \approx 10^6 \text{ N. Plášť vodojemu je dimenzován zhruba na hranici konstrukční odolnosti.}$$

6.30 Mísa ve tvaru polokoule o poloměru  $R = 1$  m je naplněna speciální kapalinou, v níž tlak roste s hloubkou jako  $p = \rho_0 g h^{\frac{3}{2}}$ , kde  $\rho_0$  je hustota kapaliny na hladině a  $h$  je hloubka daného místa v nádobě. Určete tlakovou sílu, které musí nádoba odolat. Uvažujte hodnoty konstant  $\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . Vliv atmosférického tlaku zanedbejte.

$$F_p \approx 25\,000 \text{ N.}$$

## 6.2 Plošný integrál 2. druhu

Plošným integrálem 2. druhu nazýváme integrál  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$  obecného vektorového pole  $\vec{F}(x, y, z)$ , definovaného na orientované, po částech diferencovatelné ploše  $S$ , kde  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  je jednotkový vektor normály orientované plochy  $S$ . Explicitní zápis plošného integrálu 2. druhu v kartézské souřadné soustavě bude, v případě že všechny tři souřadnice  $x, y, z$  jsou na dané ploše (soustavě ploch) vzájemně nezávislé, mít tvar

$$\int_y \int_z F_x dy dz \Big|_{x=\text{konst.}} + \int_z \int_x F_y dz dx \Big|_{y=\text{konst.}} + \int_x \int_y F_z dx dy \Big|_{z=\text{konst.}}, \quad (6.20)$$

kde  $F_x, F_y, F_z$  jsou jednotlivé složky vektoru  $\vec{F}$ . V případě, že můžeme na dané ploše stanovit některou ze souřadnic jako závislou na druhých dvou, bude mít (analogicky k rovnici (6.14)) parametrizovaný plošný integrál 2. druhu tvar

$$\int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \left\{ F_x(\xi, \eta, \zeta) \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) \times \left( \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right) \right] + F_y(\xi, \eta, \zeta) \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) \times \left( \frac{\partial \zeta}{\partial v}, \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) \right] + F_z(\xi, \eta, \zeta) \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \times \left( \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) \right] \right\} du dv. \quad (6.21)$$

Pořadí parametrů  $u$  a  $v$  ve vektorových součinech je dáno požadovanou orientací normály plochy. Typickou fyzikální aplikací plošného integrálu 2. druhu je výpočet toku  $\Phi$  vektorového pole  $\vec{F}$  orientovanou plochou  $\vec{S}$ .

• **Příklady:**

6.31 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$  uzavřenou plochou  $S = \{(x, y, z) \mid x \in \langle A, 2A \rangle, y \in \langle B, 2B \rangle, z \in \langle C, 2C \rangle\}$ .

$$\Phi_F = 3ABC(A + B + C)$$

6.32 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$  uzavřenou plochou  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in \langle 0, H \rangle\}$ .

$$\Phi_F = \pi R^2 H^2$$

6.33 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$  uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 6.17.

$$\Phi_F = \frac{\pi R^2 H^2}{3}$$

6.34 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^3 - y^3, x^3 + y^3, z)$  povrchem tělesa  $\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \mid z \in \langle 0, H \rangle, x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{H^2} (H - z)^2 \right\}$ .

$$\Phi_F = \frac{\pi R^2 H}{30} (9R^2 + 10)$$

6.35 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$  plochou, danou předpisem  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ .

$$\Phi_F = \frac{12}{5} \pi R^5$$

6.36 Je dáno silové pole  $\vec{F} = (x^3 - x^2, y^3 - y^2, z^3 - z^2)$ . Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte jeho tok povrchem tělesa  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \langle 0, R \rangle, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ .

$$\Phi_F = \frac{3\pi R^4}{40} (4R - 5)$$

6.37 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (x, y, z)$  povrchem tělesa z příkladu 7.35. Proč je výsledná hodnota trojnásobkem výsledné hodnoty z uvedeného příkladu ?

$$\Phi_F = \frac{3\pi^2 a^3}{4}$$

6.38 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$  uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 7.35.

$$\Phi_F = \frac{27}{64} \pi^2 a^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \pi^2 a^5$$

6.39 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (z^2, x^2, y^2)$  kruhovou plochou o poloměru  $R$  se středem v bodě  $x, y, z = A, B, C$ , ležící v rovině  $z = C$ .

$$\frac{\pi R^4}{4} + \pi B^2 R^2$$

6.40 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (y, z, x)$  rovinnou plochou ve tvaru obdélníka s vrcholy v bodech  $(1, 0, 0)$ ,  $(3, 0, 1)$ ,  $(3, 2, 1)$ ,  $(1, 2, 0)$ , ve směru normály  $\vec{\nu}$  této plochy jejíž složka  $\nu_x$  je kladně orientovaná.

−6

6.41 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (3, z, y)$  rovinnou plochou ve tvaru obdélníka s vrcholy v bodech  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 3)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(2, 0, 1)$ , ve směru normály  $\vec{\nu}$  této plochy jejíž složka  $\nu_y$  je kladně orientovaná.

7

6.42 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (3, z, y)$ , rovinnou plochou ve tvaru obdélníka s vrcholy v bodech  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 2, 2)$ ,  $(5, 2, 2)$ ,  $(5, 0, 1)$ , ve směru normály  $\vec{\nu}$  této plochy jejíž složka  $\nu_y$  je kladně orientovaná.

− $\frac{5}{2}$

6.43 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (y, z, x)$  rovinnou plochou ve tvaru lichoběžníka s vrcholy v bodech  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 3, 3)$ ,  $(2, 4, 5)$ ,  $(2, 1, 2)$ , ve směru normály  $\vec{\nu}$  této plochy jejíž složka  $\nu_y$  je kladně orientovaná.

$\frac{53}{6}$

6.44 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (x, z, y)$  rovinnou plochou ve tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech  $(3, 0, 2)$ ,  $(1, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 7)$ , ve směru normály  $\vec{\nu}$  této plochy jejíž složka  $\nu_y$  je kladně orientovaná.

$\frac{98}{3}$

### 6.3 Objemový integrál

Objemovým integrálem označujeme trojný integrál skalární funkce  $f(x, y, z)$  přes oblast (těleso)  $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^3$  s objemem  $V$ :

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dV = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (6.22)$$

Pomocí objemového integrálu lze určit geometrické a fyzikální charakteristiky těles: Položíme-li  $f = 1$ , výsledkem bude velikost objemu  $V$  tělesa  $\mathcal{T}$ . Položíme-li  $f = \rho$  (objemová hustota hmoty), dostáváme  $\rho \, dV = dm$ , tedy element hmotnosti tělesa  $\mathcal{T}$ , výsledkem integrace bude celková hmotnost  $M$  tělesa,

$$M = \iiint_{\mathcal{T}} dm = \iiint_V \rho \, dV. \quad (6.23)$$

Pokud položíme například  $f = z\rho$ , dostáváme tzv. statický moment  $S_z$  tělesa vzhledem k ose  $z$ , jeho vydělením hmotností dostáváme  $z$ -ovou souřadnici středu hmotnosti  $z_T$  tělesa (obdobně pro ostatní souřadnicové směry), tedy

$$x_T = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{T}} x \, dm = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho \, dV, \quad y_T = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{T}} y \, dm, \quad z_T = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{T}} z \, dm. \quad (6.24)$$

Položíme-li  $f = r^2\rho$ , kde  $r$  je vzdálenost obecného bodu tělesa od zvolené přímky v prostoru (osy  $o$ ), dostáváme moment setrvačnosti  $J_o$  tělesa  $\mathcal{T}$  vzhledem k této ose. Momenty setrvačnosti tělesa  $\mathcal{T}$  např. vzhledem k jednotlivým kartézským souřadnicovým osám potom budou

$$J_x = \iiint_{\mathcal{T}} (y^2 + z^2) \, dm = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho \, dV, \quad J_y = \iiint_{\mathcal{T}} (z^2 + x^2) \, dm, \quad J_z = \iiint_{\mathcal{T}} (x^2 + y^2) \, dm. \quad (6.25)$$

Příklady k problematice objemového integrálu jsou součástí následujícího odstavce 6.4.

## 6.4 Geometrické a fyzikální charakteristiky útvarů

### • Vypočítejte objem:

6.45 elipsoidu o poloosách  $a, b, c$ ,  $V = \frac{4}{3}\pi abc$

6.46 kužele o poloměru podstavy  $R$  a výšce  $H$ ,  $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$

6.47 tělesa  $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \mid z \in \langle 0, H - x^2 - y^2 \rangle\}$ , kde  $H = R^2$ ,  $V = \frac{\pi R^2 H}{2}$

6.48 tělesa  $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \mid z \in \langle 0, H - x^2 - y^2 \rangle\}$ ,  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $H > R^2$ ,  $V = \pi R^2 \left( H - \frac{R^2}{2} \right)$

6.49 anuloidu (toroidu) o poloměru osy toru  $R$  a poloměru trubice  $a$ ,<sup>1</sup>  $V = 2\pi^2 R a^2$

6.50 tělesa  $\mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \mid z \in \left\langle \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\rangle \right\}$ ,  $V = \frac{\pi R^3}{3}$

6.51 tělesa  $\mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \mid z \in \left\langle \frac{R}{2}, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\rangle \right\}$ ,  $V = \frac{5}{24}\pi R^3$

6.52 tělesa  $\mathcal{A}$ , jehož povrch vznikne rotací asteroidy z příkladu 4.4 okolo osy  $y$ ,

$$V = \frac{32}{105}\pi a^3$$

6.53 tělesa  $\mathcal{A}$ , jehož povrch vznikne rotací kardioidy z příkladu 4.13 okolo osy  $y$ .

$$V = \frac{8}{3}\pi a^3$$

<sup>1</sup> Podrobný popis anuloidu - viz odstavec A.6 v příloze A.

• **Vypočítejte velikost plochy:**

6.54 kulové slupky o poloměru  $R$ ,

$$S = 4\pi R^2$$

6.55 pláště kužele o poloměru podstavy  $R$  a výšce  $H$ ,

$$S = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

6.56 pláště tělesa z příkladu 6.47,

$$S = \frac{\pi}{6} \left[ (1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

6.57 celého povrchu tělesa z příkladu 6.48,

$$S = \frac{\pi}{6} \left[ (1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + 2\pi R(H - R^2) + \pi R^2$$

6.58 pláště tělesa z příkladu 6.50,

$$S = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \pi R^2$$

6.59 celého povrchu tělesa z příkladu 6.51,

$$S = \frac{7}{4} \pi R^2$$

6.60 pláště anuloidu (toroidu) o poloměru osy toru  $R$  a poloměru trubice  $a$ ,<sup>1</sup>

$$S = 4\pi^2 Ra$$

6.61 ohraničené asteroidou z příkladu 4.4,

$$S = \frac{3}{8} \pi a^2$$

6.62 která vznikne rotací asteroidy z příkladu 4.4 okolo osy  $y$ ,

$$S = \frac{12}{5} \pi a^2$$

6.63 ohraničené kardioidou z příkladu 4.13,

$$S = \frac{3}{2} \pi a^2$$

6.64 která vznikne rotací kardioidy z příkladu 4.13 okolo osy  $y$ ,

$$S = \frac{16}{3} \pi a^2$$

6.65 hyperbolického paraboloidu, daného předpisem  $z = x^2 - y^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,

$$S = \frac{\pi}{6} \left( 17^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \approx 36,18$$

6.66 hyperbolického paraboloidu, daného předpisem  $z = xy$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ . Jaký by musel být poloměr  $\rho$  válce, jehož pláštěm je hyperbolický paraboloid ohraničen, aby jeho plocha byla stejná jako v příkladu 6.65?

$$S = \frac{2\pi}{3} \left( 5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \approx 21,32, \quad \rho = \left[ \left( \frac{17^{\frac{3}{2}} + 3}{4} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \approx 2,44$$

• **Ve vhodně zvolené soustavě souřadnic vypočítejte polohu středu hmotnosti:**

6.67 homogenní polokoule o poloměru  $R$ ,

$$z_T = \frac{3}{8} R$$



6.68 homogenního kužele o poloměru podstavy  $R$  a výšce  $H$ ,  $z_T = \frac{H}{4}$

6.69 homogenního symetrického jehlanu o hraně podstavy  $A$  a výšce  $H$ ,

$$z_T = \frac{H}{4}$$

6.70 homogenního tělesa z příkladu 6.47,

$$z_T = \frac{H}{3}$$

6.71 homogenního tělesa z příkladu 6.48,

$$z_T = \frac{R^2(3H - 2R^2)}{6H - 3R^2}$$

6.72 homogenního tělesa z příkladu 6.50,

$$z_T = \frac{9}{16}R$$

6.73 homogenní plochy z příkladu 6.64 a homogenního tělesa z příkladu 6.53,

$$y_T = -\frac{25}{32}a, \quad y_T = -\frac{4}{5}a$$

6.74 homogenního tělesa, ohraničeného „seshora“ plochou  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  a „zespoda“ plochou  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$z_T = \frac{3R}{8(2 - \sqrt{2})} \approx 0,64R$$

6.75 tělesa z příkladu 6.51,

$$z_T = \frac{27}{40}R$$

6.76 poloviny homogenního elipsoidu o poloosách  $a, b, c$ , s rovinou podstavy, vymezenou poloosami  $a, b$ .

$$z_T = \frac{3}{8}c$$

• **Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose symetrie:**

6.77 homogenní koule o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$ ,  $J = \frac{2}{5}MR^2$

6.78 homogenního válce o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$ ,  $J = \frac{MR^2}{2}$

6.79 homogenního kužele o hmotnosti  $M$ , poloměru podstavy  $R$  a výšce  $H$ ,

$$J = \frac{3}{10}MR^2$$

6.80 homogenního tělesa z příkladu 6.47,

$$J = \frac{MR^2}{3}$$

6.81 homogenního tělesa z příkladu 6.48,

$$J = \frac{3H - 2R^2}{6H - 3R^2}MR^2$$

- 6.82 homogenního tělesa z příkladu 6.50. 
$$J = \frac{MR^2}{4}$$
- 6.83 tělesa z příkladu 6.51, 
$$J = \frac{53}{200}MR^2$$
- 6.84 homogenního elipsoidu o hmotnosti  $M$  a poloosách  $a, b, c$ , rotujícího okolo poloosy  $c$ , 
$$J = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$$
- 6.85 homogenního tělesa, jehož povrch vznikne rotací asteroidy z příkladu 4.4 okolo osy  $y$ , 
$$J = \frac{64}{143}Ma^2$$
- 6.86 homogenního tělesa, jehož povrch vznikne rotací kardioidy z příkladu 4.13 okolo osy  $y$ , 
$$J = \frac{24}{35}Ma^2$$
- 6.87 homogenního tělesa, ohraničeného seshora plochou  $z = H - 2(x^2 + y^2)$  a zespona plochou  $z = 0$ . Výsledek vyjádřete jako funkci hmotnosti daného tělesa a délky  $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{H/2}$  v rovině  $z = 0$ , 
$$J = \frac{MR^2}{3}$$
- 6.88 prázdné uzavřené válcové nádoby, tj. sestávající z pláště a obou podstav, vytvořené z materiálu zanedbatelné tloušťky s konstantní plošnou hustotou  $\sigma$ , s poloměrem  $R$  a výškou  $H = R$ . Výsledek vyjádřete v jednotkách celkové hmotnosti nádoby  $M$  a poloměru  $R$ , 
$$J = \frac{3}{4}MR^2$$
- 6.89 prázdné uzavřené kuželové nádoby, tj. sestávající z pláště a podstavy, vytvořené z materiálu zanedbatelné tloušťky s konstantní plošnou hustotou  $\sigma$ , s poloměrem  $R$  a výškou  $H$ . Výsledek vyjádřete v jednotkách celkové hmotnosti nádoby  $M$  a poloměru  $R$ , 
$$J = \frac{MR^2}{2}$$
- 6.90 prázdné uzavřené nádoby, tvořené celým pláštěm tělesa (tj. sestávající z vlastního pláště i podstavy) z příkladu 6.47, vytvořené z materiálu zanedbatelné tloušťky s konstantní plošnou hustotou  $\sigma$ . Výsledek vyjádřete v jednotkách celkové hmotnosti nádoby  $M$  a poloměru podstavy  $R$ , 
$$J = M \frac{(1 + 4R^2)^{3/2} \left( \frac{3}{5}R^2 - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{10} + 3R^4}{(1 + 4R^2)^{3/2} - 1 + 6R^2}$$
- 6.91 prázdné uzavřené nádoby, tvořené celým pláštěm tělesa (tj. sestávající z vlastního pláště i podstavy) z příkladu 6.50, vytvořené z materiálu zanedbatelné tloušťky s konstantní plošnou hustotou  $\sigma$ . Výsledek vyjádřete v jednotkách celkové hmotnosti nádoby  $M$  a poloměru podstavy  $R$ .

$$J = \frac{(9\sqrt{3} + 20) MR^2}{(\sqrt{3} + 2) 24}$$

6.92 Odvoďte moment setrvačnosti homogenní polokruhové desky zanedbatelné tloušťky s poloměrem  $R$ , rotující

- (a) okolo osy, procházející jejím středem, kolmé k rovině desky,
- (b) okolo osy, ležící v rovině desky, procházející její základnou (průměrem),
- (c) okolo osy, ležící v rovině desky, procházející jejím středem hmotnosti rovnoběžně s její základnou.

Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti desky  $M$  a poloměru  $R$ .

$$(a) \quad J = \frac{MR^2}{2}$$

$$(b) \quad J = \frac{MR^2}{4}$$

$$(c) \quad \text{pomocí Steinerovy věty: } z_T = \frac{4}{3\pi}R, \quad J = \frac{MR^2}{4} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 MR^2 \approx \frac{7}{100}MR^2$$

6.93 Odvoďte moment setrvačnosti homogenní desky zanedbatelné tloušťky, jejíž okraj má tvar asteroidy z příkladu 4.4, rotující okolo osy procházející jejím středem kolmo k její rovině. Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti desky  $M$  a délky poloosy  $a$ .

$$J = \frac{7}{32}Ma^2$$

6.94 Odvoďte moment setrvačnosti  $J_k$  duté koule o poloměru  $R$  s kulovou koncentrickou dutinou o poloměru  $H$ , s konstantní hustotou  $\rho$ . Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti  $M$  duté koule, jejího poloměru  $R$  a poloměru dutiny  $H$ . Pomocí limitního přechodu (případně jiným způsobem) následně odvoďte moment setrvačnosti  $J_s$  homogenní kulové slupky o poloměru  $R$ .

$$J_k = \frac{2}{5}M \frac{R^5 - H^5}{R^3 - H^3}, \quad J_s = \frac{2}{3}MR^2$$

6.95 Odvoďte moment setrvačnosti homogenní krychle o hraně  $A$ , rotující

- (a) okolo osy, procházející jejím středem a středy dvou protilehlých stran,
- (b) okolo osy, procházející jejím středem a středy dvou protilehlých hran,
- (c) okolo osy, procházející hranou krychle (vypočítejte přímou integrací a ověřte pomocí Steinerovy věty).

Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti  $M$  krychle a délky její hrany  $A$ .

$$(a) \quad J = \frac{MA^2}{6}$$

$$(b) \quad J = \frac{MA^2}{6}$$

$$(c) J = \frac{2}{3}MA^2$$

# Kapitola 7

## Integrální věty<sup>1</sup>

### 7.1 Greenova věta

Věta, nazvaná podle matematika a fyzika George Greena (1793 - 1841), dává do souvislosti integrál přes oblast  $D \in \mathbb{R}^2$  a integrál po uzavřené křivce  $\mathcal{C}$ , ohraničující oblast  $D$ . Pro vektorové pole  $\vec{F} = [F_1(x, y), F_2(x, y)]$ , spojitě diferencovatelné v  $D(x, y)$ , platí následující formulace Greenovy věty:

$$\iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial \vec{D}} (F_1 dx + F_2 dy), \quad (7.1)$$

kde  $\partial \vec{D}$  značí matematicky kladně orientovanou uzavřenou hranici oblasti  $D$  (křivku  $\mathcal{C}$ ). Stokesova věta (viz odstavec 7.2) je zobecněním Greenovy věty pro  $\mathbb{R}^n$ .

#### • Příklady:

7.1 Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál  $\oint_{\mathcal{C}} e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy]$ , kde  $\mathcal{C}$  je kladně orientovaná uzavřená křivka ohraničující oblast  $D: 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$ .

$$\frac{1}{5} (1 - e^\pi)$$

7.2 Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál  $\oint_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy$ , kde  $\mathcal{C}$  je kladně orientovaná uzavřená křivka ohraničující oblast  $D: 0 < x < 3, 0 < y < 2 - \frac{2}{3}x$ .

2

7.3 Pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah kruhu o poloměru  $R$ .

$$\text{Pomocí identity } S = \iint_S \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dS = \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \right\} = \oint_{\partial \vec{S}} \vec{F} \cdot d\vec{s}, S = \pi R^2$$

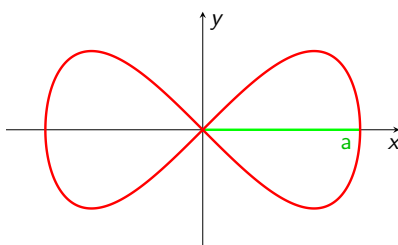
7.4 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah elipsy s poloosami  $a, b$ .

Stejným způsobem jako v předešlém příkladě,  $S = \pi ab$

<sup>1</sup>Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

- 7.5 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah trojúhelníka s vrcholy v bodech  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$ .

$$S = \frac{3}{2}$$



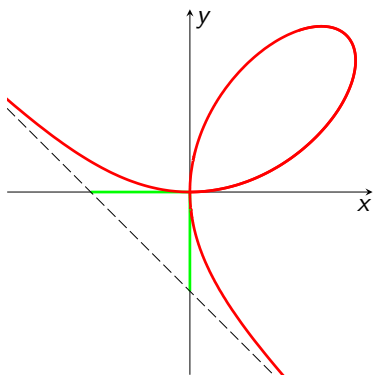
Obrázek 7.1: Geronova (Huygensova) lemniskáta, poloosa  $a$  je vyznačena zelenou barvou.

- 7.6 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah plochy, uzavřené křivkou, danou obecnou rovnicí  $x^4 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ , kde  $a$  je konstanta, tzv. Geronovy (Huygensovy) lemniskáty (viz obrázek 7.1, viz také příklad 7.35).

$$S = \frac{4a^2}{3}$$

- 7.7 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah plochy, uzavřené asteroidou z příkladu 4.4.

$$S = \frac{3\pi}{8}a^2$$



Obrázek 7.2: Descartův list. Délka konstanty  $a$  je vyznačena zelenou barvou.

- 7.8 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah plochy, uzavřené smyčkou křivky, dané obecnou rovnicí  $x^3 + y^3 = 3axy$  (tzv. Descartova listu, viz obrázek 7.2). Vhodnou parametrizací je například:  $x = x(t)$ ,  $y = tx(t)$ , kde  $t = \operatorname{tg} \phi$ .

$$S = \frac{3}{2}a^2$$

## 7.2 Stokesova věta (Stokesův-Kelvinův teorém)

Stokesova věta srovnává tok vektoru rotace vektorového pole  $\vec{F}$  plochou  $S$ , definovanou v trojrozměrném (obecně  $n$ -rozměrném) Eukleidovském prostoru a integrál tohoto pole po uzavřené křivce  $s$ , ohraničující tuto plochu. Matematický zápis Stokesovy věty má tvar

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{t} \, ds, \quad (7.2)$$

kde  $\vec{F}$  je obecné vektorové pole,  $\vec{n}$  je jednotkový vektor normály plochy  $S$ ,  $\partial S$  je orientovaná uzavřená hranice plochy  $S$  (křivka  $s$ ),  $\vec{t}$  je tečný vektor křivky  $s$ .

### • Příklady:

7.9 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y, x)$  která působí po celé kružnici o poloměru  $R$  se středem v bodě  $(0, 0)$  v matematicky kladném směru a jejíž začátek i konec jsou v bodě  $(R, 0)$ . Změní se velikost práce, pokud síla bude působit v matematicky záporném směru ?

$$W = 2\pi R^2, \text{ změni: } W = -2\pi R^2$$

7.10 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y, x)$  která působí po obvodu čtverce postupně z bodu  $(0, 0)$  do bodů  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$  a zpět do počátku. Změní se velikost práce, pokud síla bude působit v opačném směru ?

$$W = 2, \text{ změni: } W = -2$$

7.11 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y) = (x^3 - x^2, x - 1)$  která působí po obvodu trojúhelníka postupně z bodu  $(0, 0)$  do bodů  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$  a zpět do počátku. Změní se velikost práce, pokud síla bude působit v opačném směru ?

$$W = 1, \text{ změni: } W = -1$$

7.12 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y) = (x^3 - x^2, x - 1)$  která působí po obvodu trojúhelníka postupně z bodu  $(0, 0)$  do bodů  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$  a zpět do počátku. Změní se velikost práce, pokud síla bude působit v opačném směru ?

$$W = 1, \text{ změni: } W = -1$$

7.13 Pomocí Stokesovy věty ověřte výpočet práce síly z příkladu 4.33.

$$W = \oint_{\partial V} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \text{ rot } \vec{F} = (0, 0, 2), \vec{n} = (0, 0, -1), S = \frac{\pi}{4}, W = -\frac{\pi}{2}$$

7.14 Pomocí Stokesovy věty ověřte výpočet práce síly z příkladu 4.34.

$$W = \oint_{\partial V} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \text{ rot } \vec{F} = (0, 0, 2), \vec{n} = (0, 0, 1), S = \pi - 1, W = 2(\pi - 1)$$

7.15 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y) = [y^2, (x + y)^2]$ , působící po obvodě trojúhelníka ve směru vrcholů v bodech  $[3, 0]$ ,  $[0, 3]$ ,  $[3, 3]$ .

$$W = -18$$

7.16 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y) = [y, (x + y)^2]$ , působící v matematicky záporném směru po křivce  $x^2 + y^2 = 1$ .

$$W = \pi$$

7.17 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$ , působící nejprve po křivce  $y^2 = R^2 - x^2$  z bodu  $(R, 0, 0)$  do bodu  $(0, R, 0)$ , dále po křivce  $z^2 = R^2 - y^2$  z bodu  $(0, R, 0)$  do bodu  $(0, 0, R)$  a nakonec po křivce  $x^2 = R^2 - z^2$  z bodu  $(0, 0, R)$  zpět do výchozího bodu.

$$W = -\frac{\pi R^2}{2}$$

7.18 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ , působící nejprve po křivce  $y^2 = R^2 - x^2$  z bodu  $(R, 0, 0)$  do bodu  $(0, R, 0)$ , dále po křivce  $z^2 = R^2 - y^2$  z bodu  $(0, R, 0)$  do bodu  $(0, 0, R)$  a nakonec po křivce  $x^2 = R^2 - z^2$  z bodu  $(0, 0, R)$  zpět do výchozího bodu.

$$W = -2R^3$$

7.19 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ , působící po povrchu tělesa z příkladu 6.47

- nejprve po křivce  $y^2 = R^2 - x^2$  z bodu  $(0, -R, 0)$  v matematicky kladném směru do bodu  $(R, 0, 0)$ , dále po křivce  $z = H - x^2$  z bodu  $(R, 0, 0)$  do bodu  $(0, 0, H)$  a nakonec po křivce  $z = H - y^2$  z bodu  $(0, 0, H)$  zpět do výchozího bodu,
- nejprve po křivce  $y^2 = R^2 - x^2$  z bodu  $(R, 0, 0)$  v matematicky kladném směru do bodu  $(0, R, 0)$ , dále po křivce  $z = H - y^2$  z bodu  $(0, R, 0)$  do bodu  $(0, 0, H)$  a nakonec po křivce  $z = H - x^2$  z bodu  $(0, 0, H)$  zpět do výchozího bodu,
- nejprve po křivce  $y^2 = R^2 - x^2$  z bodu  $(0, -R, 0)$  v matematicky kladném směru do bodu  $(0, R, 0)$ , dále po křivce  $z = H - y^2$  z bodu  $(0, R, 0)$  do bodu  $(0, 0, H)$  a nakonec po křivce  $z = H - y^2$  z bodu  $(0, 0, H)$  zpět do výchozího bodu.

$$(a) \quad W = -\frac{\pi R^2}{4}$$

$$(b) \quad W = -\frac{\pi R^2}{4} - \frac{4}{3}R^3$$

$$(c) \quad W = -\frac{\pi R^2}{2} - \frac{4}{3}R^3$$

7.20 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ , působící po povrchu tělesa z příkladu 6.15

- nejprve po křivce  $y^2 = R^2 - x^2$  z bodu  $(R, 0, 0)$  v matematicky kladném směru do bodu  $(0, R, 0)$ , dále nejkratším možným způsobem z bodu  $(0, R, 0)$  do bodu  $(0, 0, H)$  a nakonec opět nejkratším možným způsobem z bodu  $(0, 0, H)$  zpět do výchozího bodu,



- (b) nejprve po křivce  $y^2 = R^2 - x^2$  z bodu  $(0, -R, 0)$  v matematicky kladném směru do bodu  $(0, R, 0)$ , dále nejkratším možným způsobem z bodu  $(0, R, 0)$  do bodu  $(0, 0, H)$  a nakonec opět nejkratším možným způsobem z bodu  $(0, 0, H)$  zpět do výchozího bodu.

$$(a) W = -\frac{R}{3}(2R^2 + HR + H^2)$$

$$(b) W = -\frac{2}{3}H^2R$$

7.21 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, -z^2, x^2)$ , působící po povrchu tělesa z příkladu 6.47

- (a) nejprve po křivce  $y^2 = R^2 - x^2$  z bodu  $(0, -R, 0)$  v matematicky kladném směru do bodu  $(R, 0, 0)$ , dále po křivce  $z = H - x^2$  z bodu  $(R, 0, 0)$  do bodu  $(0, 0, H)$  a nakonec po křivce  $z = H - y^2$  z bodu  $(0, 0, H)$  zpět do výchozího bodu,
- (b) nejprve po křivce  $y^2 = R^2 - x^2$  z bodu  $(R, 0, 0)$  v matematicky kladném směru do bodu  $(0, R, 0)$ , dále po křivce  $z = H - y^2$  z bodu  $(0, R, 0)$  do bodu  $(0, 0, H)$  a nakonec po křivce  $z = H - x^2$  z bodu  $(0, 0, H)$  zpět do výchozího bodu.

$$(a) W = \frac{2}{3}R^3(2H + 1) + \frac{R^4}{2} - \frac{4}{5}R^5 = \frac{8}{15}R^5 + \frac{R^4}{2} + \frac{2}{3}R^3$$

$$(b) W = \frac{2}{3}R^3(2H - 1) - \frac{R^4}{2} - \frac{4}{5}R^5 = \frac{8}{15}R^5 - \frac{R^4}{2} - \frac{2}{3}R^3$$

7.22 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty dokažte, že práce síly  $\vec{F} = (z^2, x^2, y^2)$  působící v matematicky kladném směru po křivce dané průnikem ploch  $S_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$  a  $S_2 = \{x - z = 0\}$ , je nulová.

Úlohu lze řešit jak v kulovém tak v pootočeném válcovém souřadném systému (transformace bází).

7.23 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F} = (z^3, x^2, y)$  působící po obvodu rovnoběžníka z výchozího bodu  $(0, 0, 0)$  ve směru bodů  $(A, 0, A)$ ,  $(A, A, A)$ ,  $(0, A, 0)$  a zpět do výchozího bodu.

$$W = A^3 - A^2$$

7.24 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F} = (z^3, x^2, y)$  působící po obvodu trojúhelníka z výchozího bodu  $(0, 0, 0)$  ve směru bodů  $(A, 0, 0)$ ,  $(0, B, C)$  a zpět do výchozího bodu.

$$W = \frac{A^2B}{3} - \frac{AC^3}{4}$$

7.25 Pomocí křivkového integrálu i Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F} = (y^2, xz, y^2)$  působící po obvodu plochy dané předpisem  $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, z = 6\}$ , po vykonání 1 okruhu z bodu  $(R, 0, 6)$  do stejného bodu, v matematicky záporném směru.

$$6\pi R^2$$

7.26 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F} = (z^2, x^2, y^2)$  působící po obvodu plochy dané předpisem  $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2, x, y, z \in \langle 0, R \rangle\}$ , ve směru bodů  $(0, 0, 0)$ ,  $(R, 0, R)$ ,  $(0, R, R)$  a zpět do bodu  $(0, 0, 0)$ .

$$W = 2R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$$

7.27 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F} = (z^2, x^2, y^2)$  působící po obvodu plochy dané předpisem  $S = \{(x, y, z) | x^2 + (y - R)^2 + z^2 = R^2, x \in \langle -R, 0 \rangle, y, z \in \langle 0, R \rangle\}$ , ve směru bodů  $(-R, R, 0)$ ,  $(0, R, R)$ ,  $(0, 0, 0)$  a zpět do bodu  $(-R, R, 0)$ .

$$W = 2R^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

7.28 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F} = (z^2, x^2, y^2)$  působící po obvodu plochy dané předpisem:  $S = \{(x, y, z) | x^2 + (y + R)^2 + z^2 = R^2, x \in \langle -R, 0 \rangle, y \in \langle -R, 0 \rangle, z \in \langle 0, R \rangle\}$ , ve směru bodů  $(-R, -R, 0)$ ,  $(0, -R, R)$ ,  $(0, 0, 0)$  a zpět do bodu  $(-R, -R, 0)$ .

$$W = 2R^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right)$$

7.29 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F} = (xz, -yz, 0)$  působící po plášti válce o poloměru  $R$ , jehož osa prochází bodem  $(-R, 0, 0)$  a splývá s vektorem  $(0, 0, z)$ . Síla působí po uzavřené trajektorii z počátečního bodu  $(0, 0, 0)$  ve směru bodů  $(-R, R, 0)$ ,  $(-R, R, H)$ ,  $(0, 0, H)$  a zpět do bodu  $(0, 0, 0)$ .

$$W = 0$$

7.30 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly  $\vec{F} = (xz^2, xz^2, yz^2)$  působící po povrchu válce o poloměru  $R$ , jehož osa prochází bodem  $(R, 0, 0)$  a splývá s vektorem  $(0, 0, z)$ ,  $z \in \langle 0, H \rangle$ . Síla působí po uzavřené trajektorii z počátečního bodu  $(R, R, H)$  po hraně pláště válce do bodu  $(0, 0, H)$ , dále po úsečce do bodu  $(2R, 0, H)$ , a opět po hraně pláště válce zpět do bodu  $(R, R, H)$ .

$$W = \frac{\pi R^2 H^2}{2}$$

### 7.3 Gaussova (Gaussova-Ostrogradského) věta<sup>1</sup>

Gaussova věta, nazývaná také Gaussův teorém nebo teorém divergence, říká, že tok vektorového pole uzavřenou plochou  $S$  se rovná integrálu divergence tohoto pole přes objem  $V$ , ohraničený touto plochou (větu lze zobecnit pro  $n$ -rozměrný Eukleidovský prostor). Matematický zápis Gaussovy věty má tvar

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \quad (7.3)$$

kde  $\vec{F}$  je obecné vektorové pole,  $\vec{n}$  je jednotkový vektor vnější normály plochy  $S$ ,  $\partial V$  značí hraniční oblast objemu  $V$  (plochu  $S$ ).

<sup>1</sup>Pokud není uvedeno jinak, myslí se vždy tok ve směru vnější normály uvedené uzavřené plochy.

• **Příklady:**

7.31 Pomocí Gaussovy věty odvod'te vztah pro výpočet objemu válce o poloměru  $R$  a výšce  $H$ .

$$\text{Pomocí identity } V = \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV \quad (\operatorname{div} \vec{F} = 1) = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \quad V = \pi R^2 H$$

7.32 Pomocí Gaussovy věty odvod'te vztah pro výpočet objemu koule o poloměru  $R$ .

$$\text{Stejným způsobem jako v předešlém příkladě, } V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

7.33 Pomocí Gaussovy věty odvod'te vztah pro výpočet objemu kužele o poloměru  $R$  a výšce  $H$ .

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

7.34 Pomocí Gaussovy věty odvod'te vztah pro výpočet objemu anuloidu (toroidu) o poloměru osy toru  $R$  a poloměru trubice  $a$ .

$$V = 2\pi^2 R a^2$$

7.35 Pomocí Gaussovy věty odvod'te vztah pro výpočet objemu osově symetrického tělesa  $\mathcal{M}$  s osou  $(0, 0, z)$ :  $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \sin \theta, z \leq a \sin \theta \cos \theta, \theta \in \langle 0, \pi \rangle\}$ . Povrch tělesa je vytvořen rotací rovinné křivky, tzv. Geronovy (Huygensovy) lemniskáty, okolo osy ležící v rovině křivky a procházející jejím středem - viz obrázek 7.1 (kde osa  $y$  bude nyní osou  $z$ ), viz také příklad 7.6.

$$V = \frac{\pi^2 a^3}{4}$$

7.36 Pomocí Gaussovy věty ověřte výpočet objemu tělesa z příkladu 6.52.

$$V = \frac{32}{105} \pi a^3$$

7.37 Pomocí Gaussovy věty odvod'te vztah pro výpočet objemu osově symetrického tělesa  $\mathcal{M}$  vytvořeného rotací uzavřené smyčky Descartova listu z příkladu 7.8 okolo osy  $y$ , vyznačené v obrázku 7.2. Určete rovněž maximální délku  $L$  smyčky, tj. délku podél přímky, půlící 1. kvadrant v uvedeném obrázku a souřadnice horizontálního i vertikálního maxima, vše jako funkci konstanty  $a$ .

$$V = \frac{4\pi^2 a^3}{3\sqrt{3}}, \quad L = \frac{3}{\sqrt{2}} a, \quad (2^{\frac{2}{3}} a, 2^{\frac{1}{3}} a), \quad (2^{\frac{1}{3}} a, 2^{\frac{2}{3}} a)$$

7.38 Pomocí Gaussovy věty určete polohu středu hmotnosti homogenního tělesa z příkladu 7.37 ve směru svislé osy, vyznačené v obrázku 7.2.

$$z_T = \frac{27\sqrt{3}}{16\pi} a$$

7.39 Pomocí Gaussovy věty odvod'te moment setrvačnosti homogenního tělesa  $\mathcal{M}$  z příkladu 7.35, rotujícího okolo osy  $(0, 0, z)$ . Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti tělesa  $M$  a poloměru  $a$ .

$$J = \frac{Ma^2}{2}$$

- 7.40 Pomocí Gaussovy věty odvoďte moment setrvačnosti homogenního tělesa  $\mathcal{A}$  z příkladu 6.52, rotujícího okolo stejné osy  $y$ . Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti tělesa  $M$  a poloosy  $a$ .

$$J = \frac{96}{143}Ma^2$$

- 7.41 Pomocí Gaussovy věty určete moment setrvačnosti homogenního tělesa z příkladu 7.37, rotujícího okolo svislé osy, vyznačené v obrázku 7.2. Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti tělesa  $M$  a maximálního rozměru  $R$  smyčky v horizontálním směru.

$$J = \frac{81\sqrt{3}}{40\pi} \frac{MR^2}{2^{4/3}}$$

- 7.42 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$  uzavřenou plochou, určenou předpisem  $S = \{(x, y, z) \mid x \in \langle A, 2A \rangle, y \in \langle B, 2B \rangle, z \in \langle C, 2C \rangle\}$ .

$$\Phi_F = 3ABC(A + B + C)$$

- 7.43 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$  uzavřenou plochou, určenou předpisem  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in \langle 0, H \rangle\}$ .

$$\Phi_F = \pi R^2 H^2$$

- 7.44 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole  $\vec{F} = [(x-1)^2, (y-1)^2, z^2]$  povrchem tělesa, určeného předpisem  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0, z \in \langle 0, H \rangle\}$ .

$$\frac{4}{3}R^3H + \frac{\pi R^2 H^2}{2} - 2\pi R^2 H$$

- 7.45 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$  uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 6.47.

$$\Phi_F = \frac{\pi R^2 H^2}{3}$$

- 7.46 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^3 - y^3, x^3 + y^3, z)$  uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid z \in \langle 0, H \rangle, x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{H^2}(H - z)^2\}$ .

$$\Phi_F = \frac{\pi R^2 H}{30} (9R^2 + 10)$$

- 7.47 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$  plochou, určenou předpisem  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ .

$$\Phi_F = \frac{12}{5}\pi R^5$$

- 7.48 Je dáno silové pole  $\vec{F} = (x^3 - x^2, y^3 - y^2, z^3 - z^2)$ . Pomocí Gaussovy věty určete jeho tok povrchem tělesa, určeného předpisem  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \langle 0, R \rangle, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ .

$$\Phi_F = \frac{3\pi R^4}{40} (4R - 5)$$

- 7.49 Pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (x, y, z)$  uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 7.35. Proč je výsledná hodnota trojnásobkem výsledné hodnoty z uvedeného příkladu ?

$$\Phi_F = \frac{3\pi^2 a^3}{4}$$

- 7.50 Pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$  uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 7.35.

$$\Phi_F = \frac{27}{64} \pi^2 a^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \pi^2 a^5$$

- 7.51 Pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok  $\Phi$  vektorového pole  $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$  uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa:  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0, z \in \langle 0, |x| \rangle\}$ .

$$\Phi_F = \pi$$

- 7.52 Pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok  $\Phi$  vektorového pole  $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$  uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa:  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0, \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{1}{2}\}$ .

$$\Phi_F = \pi$$

- 7.53 Pomocí plošného integrálu 2. druhu i pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok  $\Phi$  vektorového pole  $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$  uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa:  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 9 \wedge z - 3x^2 - 3y^2 \geq 0\}$ .

$$\Phi_F = 21\pi \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

- 7.54 Pomocí plošného integrálu 2. druhu i pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok  $\Phi$  vektorového pole  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 0)$  uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa:  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 5, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 1\}$ .

$$\Phi_F = \frac{56}{5}$$

- 7.55 Určete kapacitu válcového kondenzátoru, který tvoří dvě souosé vodivé válcové slupky (elektrody) s poloměry  $R_1$  a  $R_2$  a délkou  $H$ , kde  $R_1 < R_2$ . Na vnitřní elektrodu je přiveden náboj  $+Q$ , na vnější elektrodu náboj  $-Q$ . Zanedbejte nepravidelnosti elektrického pole na obou koncích elektrod.

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)}$$

- 7.56 Určete kapacitu kulového kondenzátoru, který tvoří dvě soustředné vodivé kulové slupky (elektrody) s poloměry  $R_1$  a  $R_2$ , kde  $R_1 < R_2$ . Na vnitřní elektrodu je přiveden náboj  $+Q$ , na vnější elektrodu náboj  $-Q$ .

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

## Kapitola 8

# Taylorův rozvoj

Možnost nahrazení libovolné matematické funkce polynomem byla formulována počátkem 18. století matematiky Jamesem Gregorym a Brookem Taylorem. V případě nekonečněkrát diferencovatelné funkce půjde o nekonečnou mocninnou řadu. Rozvoj funkce do řady je jedním z nejpoužívanějších nástrojů pro vyjádření přibližné hodnoty funkcí, který tvoří základ mnoha principů numerické matematiky, atd.

### 8.1 Rozvoj funkce jedné proměnné

Obecný zápis Taylorova rozvoje nekonečněkrát diferencovatelné funkce jedné proměnné v obecném bodě  $x_0$  lze vyjádřit pomocí nekonečné řady

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} (x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_{x_0} (x - x_0)^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_{x_0} (x - x_0)^n, \quad (8.1)$$

kde řád derivace charakterizuje řád Taylorova rozvoje, stupeň mocniny určuje stupeň členu Taylorova polynomu (v případě funkce jedné proměnné se obojí shoduje). Položíme-li  $x_0 = 0$ , dostáváme tzv. Maclaurinovu řadu (rozvoj) jako speciální případ Taylorova rozvoje.

#### • Příklady:

8.1 Rozviňte následující neurčité integrály do Taylorovy řady

(a) $\int \frac{e^{x^2}}{x} dx,$	$\ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k! 2k} + C$
(b) $\int \frac{\sin x}{x} dx,$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)! (2k+1)} + C$
(c) $\int \frac{\cos x}{x} dx,$	$\ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)! 2k} + C$
(d) $\int \frac{\sin x \cos x}{x} dx.$	$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \sum_{m=0}^k \frac{1}{m! (2k-m+1)!} \right] + C$

8.2 Napište rozvoj následujících funkcí do 4. stupně v bodě  $x_0 = 0$  (Maclaurinův rozvoj):

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad f(x) &= e^{3x}, & 1 + 3x + \frac{9}{2}(x^2 + x^3) + \frac{27}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^5) \\
\text{(b)} \quad f(x) &= \frac{x^2 - x + 1}{2x + 1}, & 1 - 3x + 7x^2 - 14x^3 + 28x^4 + \mathcal{O}(x^5) \\
\text{(c)} \quad f(x) &= \ln(1 - \sin^2 x), & -x^2 - \frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^6) \\
\text{(d)} \quad f(x) &= e^x \sin x, & x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) \\
\text{(e)} \quad f(x) &= \frac{\sinh(x^2 + 2\sin^4 x)}{1 + x^{10}}, & x^2 + 2x^4 + \mathcal{O}(x^6) \\
\text{(f)} \quad f(x) &= \sqrt{\cos(3x + x^3)}. & 1 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{75}{32}x^4 + \mathcal{O}(x^6)
\end{aligned}$$

8.3 Pomocí Taylorova rozvoje určete hodnoty uvedených limit následujících funkcí:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, & \quad \frac{1}{2} \\
\text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}, & \quad 1 \\
\text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - e^x}{\ln(x + 1)}}, & \quad i \\
\text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4}, & \quad -\frac{9}{5} \\
\text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} - \ln \cos x}{x \sin x}, & \quad \frac{1}{3} \\
\text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \operatorname{arctg} x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}, & \quad -\frac{4}{3} \\
\text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x \sin x}{[\ln(1 + x)]^4}, & \quad -\frac{1}{24} \\
\text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right], & \quad \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

8.4 Vypočítejte přibližnou hodnotu následujících integrálů s chybou nepřevyšující  $10^{-3}$

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \text{tzv. chybové funkce } \operatorname{erf} x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ pro horní mez } x = 1, & \quad 0,842714222 \\
\text{(b)} \quad \text{tzv. integrálního sinu } \operatorname{Si} x &= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \text{ pro horní mez } x = 1, & \quad 0,946082766 \\
\text{(c)} \quad \text{tzv. integrálního kosinu } \operatorname{Ci} x &= -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0) \text{ pro spodní mez } x = 1. \text{ Tento} \\
& \text{integrál lze přepsat do tvaru } \operatorname{Ci} x = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt, \text{ kde tzv. Eulerova}
\end{aligned}$$



(Eulerova-Mascheroniho) konstanta  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,577\,215\,665,$

0,337 400 849

(d) tzv. exponenciálního integrálu  $\text{Ei } x = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$  pro  $x = -1$ . Tento integrál lze přepsat do tvaru  $\text{Ei } x = \gamma + \ln|x| + \int_0^{-x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ , kde  $\gamma$  je stejná Eulerova konstanta jako v příkladu 8.4c,

-0,219 386 753

(e) exponenciálního integrálu  $\text{Ei } x$  popsaného v příkladě 8.4d, kde hodnota meze  $x = 1$  (tento případ má konečné řešení, protože integrování funkce se singularitou lze za určitých podmínek provést přiřazením tzv. hlavní hodnoty určitého integrálu),

1,894 854 554

(f) tzv. integrálního logaritmu  $\text{li } x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{\ln t}$  pro  $x_1 = 2$  a  $x_2 = 10$  (integrovanou funkci lze rozvinout do vhodné řady pomocí substituce  $t = e^u$ ).

5,073 622 569

8.5 Pomocí Taylorova rozvoje dokažte Eulerovu identitu pro  $y(x)$ :  $C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = A \cos x + B \sin x$ . Jaký je vztah mezi jednotlivými koeficienty a čemu se budou rovnat, pokud  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$  ?

$$A = C_1 + C_2, B = i(C_1 - C_2), C_1 = \frac{1-i}{2}, C_2 = \frac{1+i}{2}, A = 1, B = 1$$

8.6 Ověřte platnost klasického vztahu pro kinetickou energii  $T = \frac{1}{2}mv^2$  pro malé rychlosti,  $v \ll c$ . Úplné relativistické vyjádření kinetické energie má tvar  $T = E - E_0$ , kde  $E$  představuje celkovou energii  $E = mc^2$ ,  $E_0$  je tzv. klidová energie,  $E_0 = m_0c^2$ . Veličiny  $m$  a  $m_0$ , tedy relativistická a klidová hmotnost, jsou svázány vztahem  $m = \gamma m_0$ , kde tzv. Lorentzův faktor  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  (viz také příklad 2.41).

Pomocí Taylorova rozvoje relativistického vyjádření do druhého řádu.

8.7 Napište Taylorův rozvoj funkce  $f(x) = \frac{Ax}{(B+x^2)^{3/2}}$ , kde A, B jsou konstanty, do třetího řádu. Dále napište:

(a) Taylorův polynom třetího stupně funkce  $f(x)$  v okolí bodu  $x = 0$ ,

(b) Třetí stupeň tohoto polynomu v okolí bodu  $x = 1$ .

$$(a) T_3(x)|_{x_0=0} = \frac{A}{B^{3/2}}x - \frac{3A}{2B^{5/2}}x^3$$

$$(b) T_3^{\text{III}}(x)|_{x_0=1} = -\frac{A(3B^2 - 24B + 8)}{2(B+1)^{9/2}}(x-1)^3$$

8.8 Ukažte, že

- (a) Planckův zákon  $B_\nu(T)$  pro malé frekvence  $\nu$  přejde na Rayleighův-Jeansův zákon, známý v radiové fyzice,
- (b) Převed'te Planckův zákon ve formě  $B_\nu(T)$  na tvar  $B_\lambda(T)$  a dokažte přechod na Rayleighův-Jeansův zákon pro velké vlnové délky  $\lambda$ .

$$(a) B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \rightarrow \frac{2\nu^2}{c^2} kT$$

$$(b) B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \rightarrow \frac{2c}{\lambda^4} kT$$

## 8.2 Rozvoj funkce více proměnných

V případě nekonečněkrát diferencovatelné funkce dvou proměnných v obecném bodě  $(x_0, y_0)$  lze obecný tvar Taylorova rozvoje zapsat jako

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + \frac{2 \partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 \right] \\ & + \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)^3 + \frac{3 \partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 (y - y_0) \right. \\ & \left. + \frac{3 \partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0)^3 \right] + \dots, \quad (8.2) \end{aligned}$$

kde řád derivace opět charakterizuje řád Taylorova rozvoje, stupeň mocniny určuje stupeň členu Taylorova polynomu. Obecně lze tedy Taylorův rozvoj funkce více proměnných zapsat:

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \left( \frac{\partial^{n_1+\dots+n_k} f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_k^{n_k}} \right) \Big|_{(x_{01}, \dots, x_{0k})} \frac{(x_1 - x_{01})^{n_1} \dots (x_k - x_{0k})^{n_k}}{n_1! \dots n_k!}. \quad (8.3)$$

### • Příklady:

8.9 Spočítejte všechny nenulové členy Taylorova rozvoje funkce  $f(x, y) = x^2y$  a pro jednotlivé řády rozvoje vyčíslete vždy hodnotu  $f(2,1; 2,9)$ . Výsledky porovnejte s hodnotou, udanou kalkulačkou.

$$T_0 = 12, T_1 = 12,8, T_2 = 12,79, T_3 = 12,789 \text{ (kalkulačkou } 12,789)$$

8.10 Pomocí Taylorova rozvoje funkce  $f(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}$  do prvního, druhého a třetího řádu vyčíslete vždy přibližnou hodnotu  $f(1,1; 2,05)$ . Výsledky porovnejte s hodnotou, udanou kalkulačkou.

$$T_1 = 3,1\overline{66}, T_2 = 3,169\ 120, T_3 = 3,168\ 984 \text{ (kalkulačkou } 3,168\ 990\dots)$$

8.11 Spočítejte všechny nenulové členy Taylorova rozvoje funkce  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  a pro jednotlivé řády rozvoje vyčíslete vždy hodnotu  $f(0,95; 1,05; 1,1)$ . Výsledky porovnejte s hodnotou, udanou kalkulačkou.

$$T_0 = 0, T_1 = 0, T_2 = 0,0525, T_3 = 0,05425 \text{ (kalkulačkou } 0,05425)$$

8.12 Pomocí Taylorova rozvoje funkce  $f(x, y, z) = \frac{1}{xyz}$  do prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu vyčíslete vždy přibližnou hodnotu  $f(0,9; 2,1; 3,1)$ . Výsledky porovnejte s hodnotou, udanou kalkulačkou.

$$T_1 = 0,169\overline{444}, T_2 = 0,170602\dots, T_3 = 0,170634\dots, T_4 = 0,170648\dots, \text{ (kalkulačkou } 0,170678\dots)$$

8.13 Vypočítejte Taylorův polynom druhého stupně funkce  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  v bodech

(a)  $P_1 = (0, 0)$ ,

(b)  $P_2 = (1, 2)$ .

(a)  $T_1(0, 0) = 1 - x^2 - y^2$

(b)  $T_2(1, 2) = e^{-5} [x(x + 8y - 20) + y(7y - 40) + 56]$

8.14 Vypočítejte Taylorův polynom funkce z příkladu 8.10

(a) třetího stupně v bodě  $(0, 0)$ ,

(b) druhého stupně v bodě  $(1, 2)$ .

(a)  $T_3(0, 0) = 1 + 2x^2 + \frac{y^2}{2}$

(b)  $T_2(1, 2) = \frac{1}{3} [4x + y - 8(x - 1)(y - 2) - 5] + \frac{5}{27} \left[ 2(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 2)^2 \right]$

8.15 Vypočítejte Taylorův polynom třetího stupně funkce z příkladu 8.12 v bodě  $(1, 1, 1)$ .

$$T_3(1, 1, 1) = -x^3 - y^3 - z^3 - x^2y - x^2z - xy^2 - xz^2 - y^2z - yz^2 - xyz + 6(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz) - 15(x + y + z) + 20$$

8.16 Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 2}$  v bodě  $(2, 1)$ .

$$2x - y - 2 + \frac{1}{2} [-3(x - 2)^2 + 4(x - 2)(y - 1) - 2(y - 1)^2]$$

8.17 Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce  $f(x, y) = \sqrt{e^{2x} - y^2 + 1}$  v bodě  $(0, 1)$ .

$$2 + x - y + \frac{1}{2} [x^2 + 2x(y - 1) - 2(y - 1)^2]$$

8.18 Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y} - 1}$  v bodě  $(2, 1)$ .

$$1 + \frac{x}{2} - y + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \right]$$

8.19 Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce  $f(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$  v bodě  $(0, 1)$ .

$$1 + 2(y - 1) + \frac{1}{2} [-x^2 + 2(y - 1)^2]$$

8.20 Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 y z}$  v bodě  $(1, 1, 1)$ .

$$T_3(1, 1, 1) = -4x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y - 3x^2z - 2xy^2 - 2xz^2 - 2y^2z - yz^2 - 2xyz + 7(3x^2 + z^2 + 2xy + 2xz) + 8y^2 + 9yz - 2(21x + 11z) - 23y + 36$$

## Kapitola 9

# Fourierovy řady

Metoda rozkladu obecných periodických funkcí na součet nekonečného počtu sinových a kosinových vln byla pojmenována po francouzském matematiku Jean-Baptiste Josephu Fourierovi (1768–1830). Fourierovy řady jsou v různé míře aplikovány ve většině fyzikálních oborů, např. v akustice, optice, kvantové fyzice, atd. Princip formulovaný nejprve pro Fourierovy řady byl později zobecněn v tzv. Fourierově analýze. Libovolná periodická funkce  $f(x)$  s periodou  $T$ , integrovatelná v intervalu  $\langle x_0, x_0 + T \rangle$ , může být vyjádřena jako následující nekonečná suma (Fourierova řada):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x), \quad (9.1)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ . Fourierovy koeficienty  $a_k, b_k$  lze stanovit následujícím způsobem:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx, \quad (9.2)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad (9.3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin(k\omega x) dx. \quad (9.4)$$

Fourierova transformace je zobecněním komplexních Fourierových řad. Nahradíme-li diskrétní Fourierovy koeficienty  $a_k, b_k$  spojitou funkcí  $F(\xi) d\xi$ , potom za předpokladu  $1/T \rightarrow \xi$  (frekvence) přejde (záměnou sumy za integrál) diskrétní Fourierova řada do spojitě podoby

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \quad (9.5)$$

Ve fyzice a v technických aplikacích se Fourierova transformace zapisuje častěji pomocí *úhlové frekvence*  $\omega = 2\pi\xi$ . Fourierova transformace  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  (kde  $\hat{f}$  je tzv. *Fourierův obraz* funkce  $f$ , tj. vzoru) a zpětná Fourierova transformace  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$  jsou potom (při jisté ztrátě symetrie) definovány jako:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (9.6)$$

Zavedeme dále pojem *konvoluce* dvou funkcí  $f(x), g(x)$  (viz obrázek 9.1), která je definována jako:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy, \quad (9.7)$$

kde ovšem  $x$  a  $y$  neznamenají dva různé souřadnicové směry, ale pouze dvě různé proměnné. Fourierův obraz konvoluce funkcí  $f(x), g(x)$  potom bude:

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) e^{-i\omega x} dx dy. \quad (9.8)$$

Pomocí transformace  $\left\{ \begin{array}{l} x - y = z \\ y = y \end{array} \right\}$ , jejíž Jakobián  $\det \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ , dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(z) e^{-i\omega(y+z)} dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\omega z} dz = \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega). \quad (9.9)$$

Výsledný vztah můžeme tedy zapsat jednoduchým způsobem,

$$\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \widehat{g}, \quad (9.10)$$

Fourierův obraz konvoluce dvou funkcí  $f(x), g(x)$  se rovná součinu jejich Fourierových obrazů.

Příklad konvoluce dvou funkcí  $f * g$ , které jsou původně zadány například ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 3e^{-x} & x \in \langle 0, \infty \rangle, \end{cases} \quad (9.11)$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & x \in (2, \infty), \end{cases} \quad (9.12)$$

znázorňuje obrázek 9.1. Funkce  $f, g$  transformujeme podle rovnice (9.7) následujícím způsobem:

$$f(x) = 3e^{-x} \rightarrow f(y) = 3e^{-y}, \quad (9.13)$$

$$g(x) \rightarrow g(x - y) = g(z), \quad (9.14)$$

kde potom pro funkci  $g(z)$  (konvoluční jádro), platí  $g(z) = 1$ , pro  $z \in \langle 0, 2 \rangle$  (a tedy  $y \in \langle x, x - 2 \rangle$ ) a  $g(z) = 0$  pro  $z \notin \langle 0, 2 \rangle$  (a tedy  $y \notin \langle x, x - 2 \rangle$ ), zároveň také platí  $dz = -dy$ . Protože  $f(y) = 0$  pro  $y < 0$ , dostáváme tak tři oblasti integrace rovnice (9.7):

$$x - 2 < 0 \wedge x < 0 \quad (\text{obrázek 9.1a}), \quad (9.15)$$

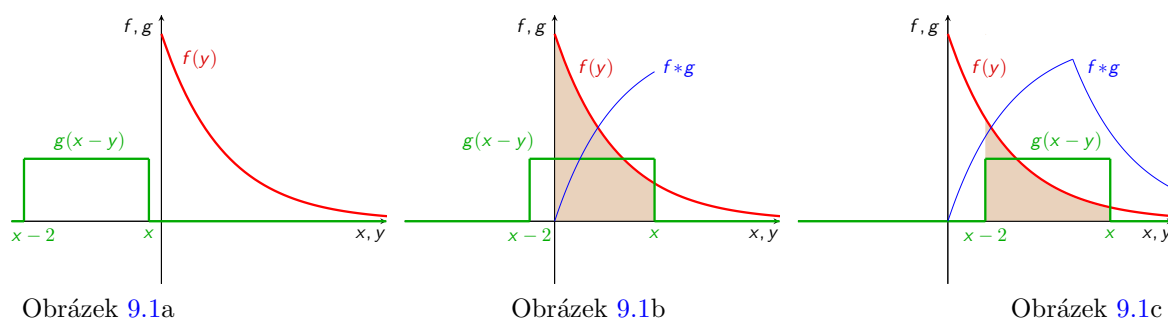
$$x - 2 < 0 \wedge x \geq 0 \quad (\text{obrázek 9.1b}), \quad (9.16)$$

$$x - 2 \geq 0 \wedge x > 0 \quad (\text{obrázek 9.1c}). \quad (9.17)$$

Integrace rovnice (9.7) bude mít pro tyto tři oblasti podobu:

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ 3 \int_0^x e^{-y} dy = 3(1 - e^{-x}) & \text{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 3 \int_{x-2}^x e^{-y} dy = 3e^{-x}(e^2 - 1) & \text{pro } x \in (2, \infty). \end{cases} \quad (9.18)$$

Výsledkem konvoluce dvou funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$  bude tedy funkce  $(f * g)(x)$ , jejíž hodnota se pro každé  $x \in (-\infty, \infty)$  bude rovnat velikosti zvýrazněné plochy na obrázku 9.1.



Obrázek 9.1: Schéma konvoluce  $f * g$  funkcí  $f(x)$ ,  $g(x)$ , původně popsanych rovnicemi (9.11) a (9.12). V obrázku 9.1a platí, že v rovnicích (9.13), (9.14) je  $x \in (-\infty, 0)$ , v obrázku 9.1b je  $x \in (0, 2)$ , v obrázku 9.1c je  $x \in (2, \infty)$ . Tvar výsledné funkce  $(f * g)(x)$  je zakreslen modrou barvou, funkce je popsána v rovnici (9.18), její hodnota se pro každé  $x$  bude rovnat velikosti zvýrazněné plochy.

## 9.1 Diskrétní Fourierovy řady

### • Příklady:

Napište Fourierovu řadu pro následující periodické funkce s periodou  $T$ :

$$9.1 \quad f(x) = \frac{x^2}{\pi}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{\pi}{3} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

$$9.2 \quad f(x) = \frac{x^2}{\pi}, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{4\pi}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k^2\pi} \cos(kx) - \frac{1}{k} \sin(kx) \right]$$

$$9.3 \quad f(x) = |x|, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(kx)$$

$$9.4 \quad f(x) = x|x|, \quad x \in \langle -L, L \rangle, \quad T = 2L \quad \frac{2L^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 - \pi^2 k^2)(-1)^k - 2}{k^3} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$9.5 \quad f(x) = \frac{|x^3|}{x}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad T = 2 \quad \frac{2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 - \pi^2 k^2)(-1)^k - 2}{k^3} \sin(k\pi x)$$

$$9.6 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ x - 1 & x \in \langle 1, 2 \rangle \end{cases}, \quad T = 2 \quad \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1 - (-1)^k}{k^2\pi^2} \cos(k\pi x) - \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x) \right]$$

$$9.7 \quad f(x) = e^{ax}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \text{konstanta } a \neq 0, \quad T = 2\pi$$

$$\frac{2}{\pi} \sinh(a\pi) \left[ \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 + k^2} (a \cos(kx) - k \sin(kx)) \right]$$

$$9.8 \quad f(x) = (x - 1)(x - 3), \quad x \in \langle 1, 3 \rangle, \quad T = 2 \quad -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\pi x)$$

$$9.9 \quad f(x) = \frac{x}{2L}, \quad x \in \langle 0, 2L \rangle, \quad T = 2L \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$9.10 \quad f(x) = x^4, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad T = 2 \quad \frac{1}{5} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 \pi^2 - 6}{k^4} \cos(k\pi x)$$

$$9.11 \quad f(x) = \operatorname{sgn} \left[ \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right], \quad x \in \langle 0, 2L \rangle, \quad T = 2L$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \left[ \frac{(2k+1)\pi}{L} x \right]$$

$$9.12 \quad f(x) = \begin{cases} -x & x \in \langle -1, 0 \rangle \\ x & x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}, \quad T = 2 \quad \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos[(2k+1)\pi x]$$

$$9.13 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ -1 & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle \\ 0 & |x| \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}, \quad T = 2\pi \quad \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ 1 - \cos \left( \frac{k\pi}{2} \right) \right] \sin(kx)$$

$$9.14 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -1, -\frac{1}{2} \rangle \\ \cos 3\pi x & x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ 0 & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}, \quad T = 2$$

$$-\frac{1}{3\pi} + \frac{6 \cos(2\pi x)}{5\pi} + \frac{\cos(3\pi x)}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 9} \cos \left( \frac{k\pi}{2} \right) \cos(k\pi x)$$

$$9.15 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle -1, 0 \rangle \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ x & x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}, \quad T = 2 \quad \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi x) - \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x)$$

$$9.16 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ -\frac{4}{\pi} x & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle \end{cases}, \quad T = \pi \quad 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[2(2k-1)x]}{(2k-1)^2}$$

$$9.17 \quad f(x) = \begin{cases} x(1-x) & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & x \in \langle -1, 0 \rangle \end{cases}, \quad T = 2$$

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k^2} (1 + \cos k\pi) \cos(k\pi x) - \frac{2}{k^3 \pi} (1 - \cos k\pi) \sin(k\pi x) \right]$$

$$9.18 \quad f(x) = |\sin x|, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)} \cos(2kx)$$

$$9.19 \quad f(x) = |\cos x|, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2 - 1)} \cos(2kx)$$

$$9.20 \quad f(x) = \sin x \cos x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle \quad \pi \sin(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{4 - k^2 \pi^2} \sin(k\pi x)$$



9.21  $f(x) = |x| + a$ ,  $x \in \langle -L, L \rangle$ , kde  $a$  je konstanta.

$$a + \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

9.22  $f(x) = \begin{cases} x - a & x \in \langle -L, 0 \rangle \\ x + a & x \in \langle 0, L \rangle \end{cases}$ , kde  $a$  je konstanta.

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a - (a + L)(-1)^k}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

## 9.2 Fourierova analýza

### • Příklady:

Určete konvoluci funkcí  $(f * g)(x)$ :

$$9.23 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 2 & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 2x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$9.24 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-2x} & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x} & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x}(1 - e^{-x}) & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$9.25 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x} & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}(e^{-x} + \sin x - \cos x) & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$9.26 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = 1$$

$$f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \cos x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$9.27 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ 0 & x \in \left( \frac{\pi}{2}, \infty \right) \end{cases}$$

$$f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \cos x & x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \sin x - \cos x & x \in \left( \frac{\pi}{2}, \infty \right) \end{cases}$$

$$9.28 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \quad f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{a^2 - 1} [a \sin x - \sin(ax)] & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \sin(ax), a > 0$$

$$9.29 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \quad f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi} \sin x - \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \frac{2}{\pi}(\sin x + \cos x) - \cos x & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \frac{2}{\pi}x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \infty \rangle \end{cases}$$

9.30 Určete Fourierův obraz funkce:

(a)  $f(x) = 1$  pro  $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ ,  $f(x) = 0$  pro  $x \notin \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ ,

(b)  $f(x) = e^{-bx}$  pro  $x \in \langle 0, \infty \rangle$ ,  $f(x) = 0$  pro  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $b > 0 = \text{konst.}$ ,

(c)  $f(x) = e^{-b|x|}$  pro  $x \in (-\infty, \infty)$ ,

(d)  $f(x) = e^{-bx^2}$  pro  $x \in (-\infty, \infty)$ ,

(e)  $f(x) = 1 + x$  pro  $x \in \langle -1, 0 \rangle$ ,  $f(x) = 1 - x$  pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $f(x) = 0$  pro  $|x| > 1$ ,

(f)  $f(x) = x^2$  pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ ,  $f(x) = 0$  pro  $|x| > 1$ .

(a)  $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

(b)  $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{b + i\omega}$

(c)  $\hat{f}(\omega) = \frac{2b}{b^2 + \omega^2}$

(d)  $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$

(e)  $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega)$

(f)  $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega^3} [(\omega^2 - 2) \sin \omega + 2\omega \cos \omega]$

9.31 Určete Fourierův obraz funkce:

(a)  $f(x) = \sin x$  pro  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $f(x) = 0$  pro  $x \notin \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $\hat{f}(\omega) = \frac{i\omega(1 - e^{-2\pi i\omega})}{1 - \omega^2}$

(b)  $f(x) = \cos x$  pro  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $f(x) = 0$  pro  $x \notin \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $\hat{f}(\omega) = -\frac{1 - e^{-2\pi i\omega}}{\omega^2 - 1}$

(c)  $f(x) = \sin x \cos x$  pro  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $f(x) = 0$  pro  $x \notin \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $\hat{f}(\omega) = -\frac{1 - e^{-2\pi i\omega}}{\omega^2 - 4}$

$$(d) f(x) = \sin^2 x \cos^2 x \text{ pro } x \in \langle 0, 2\pi \rangle, f(x) = 0 \text{ pro } x \notin \langle 0, 2\pi \rangle, \widehat{f}(\omega) = -\frac{2i(1 - e^{-2\pi i\omega})}{\omega(\omega^2 - 16)}$$

$$(e) f(x) = A^{Bx} \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, f(x) = 0 \text{ pro } x \notin \langle 0, 1 \rangle. \quad \widehat{f}(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega A^B}}{i\omega - B \ln A}$$

9.32 Na příkladech 9.23, 9.24, 9.25 a 9.26 ověřte platnost rovnice (9.10):

$$(a) (9.23): \widehat{f}(\omega) = -\frac{2i}{\omega}, \widehat{g}(\omega) = -\frac{i}{\omega}, \widehat{(f * g)}(\omega) = -\frac{2}{\omega^2}$$

$$(b) (9.24): \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2 + i\omega}, \widehat{g}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}, \widehat{(f * g)}(\omega) = \frac{1}{2 - \omega^2 + 3i\omega}$$

$$(c) (9.25): \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}, \widehat{g}(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2}, \widehat{(f * g)}(\omega) = \frac{1}{(1 + i\omega)(1 - \omega^2)}$$

$$(d) (9.26): \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2}, \widehat{g}(\omega) = \frac{1}{i\omega}, \widehat{(f * g)}(\omega) = \frac{1}{i\omega(1 - \omega^2)}$$



## Kapitola 10

# Úvod do komplexní analýzy

*Algebraický zápis* komplexního čísla (komplexní proměnné)  $z \in \mathbb{C}$  má tvar

$$z = x + iy, \quad (10.1)$$

kde  $x = \operatorname{Re}(z)$  je *reálná* část komplexního čísla a  $y = \operatorname{Im}(z)$  je *imaginární* část komplexního čísla. Číslo  $z^*$  (značí se také  $\bar{z}$ ) nazýváme číslem *komplexně sdruženým* k číslu  $z$ , kdy  $z^* = x - iy$ . Zápis stejného čísla lze provést v *goniometrickém*, případně *exponenciálním* tvaru,

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}, \quad (10.2)$$

kde  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  je *absolutní hodnota komplexního čísla* (norma, modul) a orientovaný úhel  $\varphi = \arccos(x/r) = \arcsin(y/r) = \operatorname{arctg}(y/x)$  je *argument komplexního čísla*. Pro libovolnou mocninu komplexního čísla  $z^m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , tedy platí (viz Eulerova identita v příkladu 8.5)

$$(x + iy)^m = r^m e^{im(\varphi + 2k\pi)} = r^m \{ \cos [m(\varphi + 2k\pi)] + i \sin [m(\varphi + 2k\pi)] \}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10.3)$$

Předpokládejme funkci *jedné* komplexní proměnné  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  definovanou na oblasti  $G : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2$ , případně v polárních souřadnicích  $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ , kdy  $G : r_1 \leq r \leq r_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ . Derivaci funkce jedné komplexní proměnné  $f'(z)$  definujeme potom na této oblasti jako limitu

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Rozvineme-li tento výraz zvlášť pro obě proměnné  $x, y$  (postupně položíme  $\Delta y = 0$  a  $\Delta x = 0$ ) způsobem popsaným v rovnicích (1.1) a (5.4), dostáváme

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{df}{dz} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (10.5)$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí obou rovnic dostáváme tzv. *Cauchyho-Riemannovy* podmínky existence derivace komplexní funkce  $f(z)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (10.6)$$

Funkce  $f(z)$  komplexní proměnné na oblasti  $G$  je tedy diferencovatelná v bodě  $z = x + iy$ , pokud pro reálně diferencovatelné funkce  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  platí podmínka (10.6). Takovou funkci potom nazýváme *regulární* v bodě  $z$ . Funkci  $f(z)$  která má derivaci na oblasti  $G$  všude, nazýváme *holomorfní* nebo *analytickou*. Body  $z$  v nichž funkce  $f(z)$  hladká na oblasti  $G$  není regulární nazýváme *singulárními body* nebo *singularitami*. Provedeme-li také druhé derivace rovnic (10.6), dostaneme pro obě funkce  $u, v$  tzv. *Laplaceovu* rovnici (viz rovnice (5.21) pro dvě proměnné)  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

Pomocí rovnic (10.5), (10.6) lze odvodit tzv. *Cauchyův teorém* (důkaz viz např. [Kvasnica \(2004\)](#)) pro libovolnou po částech hladkou uzavřenou křivku  $\mathcal{C}$  a funkci  $f(z)$  holomorfní na oblasti  $G$ ,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 \quad (10.7)$$

a také tzv. *Cauchyovu formuli* opět pro libovolnou po částech hladkou uzavřenou křivku  $\mathcal{C}$  a funkci  $f(z)$  holomorfní uvnitř této křivky a na této křivce, kde  $\zeta$  je libovolný bod uvnitř této křivky,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - \zeta}. \quad (10.8)$$

Cauchyova formule vyjadřuje tedy hodnotu holomorfní funkce  $f(z)$  v libovolném bodě  $\zeta$  uvnitř křivky  $\mathcal{C}$  pomocí integrálu závislého pouze na hodnotách této funkce v bodech ležících na křivce  $\mathcal{C}$ . Lze prokázat, že integrál (10.8) je rovněž holomorfní funkcí uvnitř křivky  $\mathcal{C}$  i na této křivce, z toho vyplývá, že derivace libovolného řádu funkce  $f(z)$  holomorfní v oblasti  $G$  jsou také holomorfními funkcemi v této oblasti. Navíc platí, že pokud má funkce komplexní proměnné první derivaci ve všech bodech oblasti  $G$ , pak je v této oblasti nekonečněkrát diferencovatelná - tato vlastnost nemá obdobu u funkcí reálné proměnné ([Kvasnica, 2004](#)).

Pokud má funkce  $f(z)$  v bodě  $z = \zeta$  singularitu (pokud je singularita konečného řádu, tedy „dobře se chovající“, jde o tzv. *izolovaný pól*)  $m$ -tého řádu, potom v okolí tohoto bodu platí relace

$$f(z) = \frac{a_m}{(z - \zeta)^m} + \dots + \frac{a_1}{z - \zeta} + g(z), \quad (10.9)$$

kde  $a_m \dots a_1$  jsou koeficienty a  $g(z)$  je jednoznačná holomorfní funkce v okolí bodu  $z = \zeta$  i v tomto bodě. Koeficient  $a_1 \equiv \text{Res } f(z)$  je tzv. *reziduum* funkce  $f(z)$  v bodě  $z = \zeta$ . Funkce  $f(z)$  může mít různé izolované póly v bodech  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ , v tom případě můžeme  $f(z)$  zapsat ve tvaru

$$f(z) = \frac{\text{Res}_n}{z - \zeta_n} + \dots + \frac{\text{Res}_2}{z - \zeta_2} + \frac{\text{Res}_1}{z - \zeta_1} + g(z). \quad (10.10)$$

Zobecněním těchto vztahů je tzv. *reziduová věta* pro integrál jednoznačné komplexní funkce  $f(z)$  která je holomorfní uvnitř libovolné uzavřené křivky  $\mathcal{C}$  i na této křivce, s výjimkou izolovaných pólů této funkce. Integrál funkce  $f(z)$  uvnitř křivky  $\mathcal{C}$  je potom roven integrálu této funkce po této křivce

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}_i, \quad (10.11)$$

Výpočet rezidua pro izolovaný pól  $m$ -tého řádu v bodě  $z = \zeta$  je dán vztahem

$$\text{Res} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow \zeta} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - \zeta)^m f(z)] \right\}, \quad (10.12)$$

v případě že funkce  $f(z)$  je podílem dvou komplexních polynomů,  $f(z) = P(z)/Q(z)$ , kdy  $P(z)$  je všude uvnitř křivky  $\mathcal{C}$  i na této křivce holomorfní funkcí a  $Q(z)$  má v bodě  $z = \zeta$  jednoduchý kořen, přejde vztah (10.12) do podstatně jednodušší podoby

$$\text{Res} = \frac{P(\zeta)}{Q'(\zeta)}. \quad (10.13)$$

Jako příklad aplikace reziduové věty lze uvést např. následující jednoduchý integrál reálné funkce  $f(x)$ , která nemá žádné singularity (izolované póly) na reálné ose:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} \rightarrow \oint_{\mathcal{C}_+} \frac{dz}{(1+z^2)^3} \quad \text{kde } \zeta_1, \zeta_2 = \pm i, \quad (10.14)$$

budeme-li integrovat podél uzavřené křivky  $\mathcal{C}_+$  obsahující část reálné osy a např. kladný izolovaný pól (v tomto případě díky jeho třetí mocnině jde o pól třetího řádu), bude podle vztahu (10.12) jeho reziduuum

$$\text{Res}_i = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} \right]^3 \right\} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16} \quad (10.15)$$

a dosazením do rovnice (10.11) dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}. \quad (10.16)$$

### • Příklady:

10.1 Zadaná komplexní čísla napište vždy v ostatních tvarech (algebraickém, goniometrickém nebo exponenciálním):

(a) $5\sqrt{3} + 5i$	$10 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	$10 e^{\frac{\pi i}{6}}$
(b) $3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$	$6 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$	$6 e^{\frac{\pi i}{4}}$
(c) $-12 \left( 1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \right)$	$8\sqrt{3} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$	$8\sqrt{3} e^{\frac{5\pi i}{6}}$
(d) $-6 + \frac{6i}{\sqrt{3}}$	$\frac{12}{\sqrt{3}} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$	$\frac{12}{\sqrt{3}} e^{\frac{5\pi i}{6}}$
(e) $-2(1 + \sqrt{3}i)$	$4 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$	$4 e^{\frac{4\pi i}{3}}$
(f) $3 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i)$	$3 e^{\frac{5\pi i}{4}}$
(g) $12 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	$6\sqrt{3} - 6i$	$12 e^{-\frac{\pi i}{6}}$
(h) $-2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	$-(\sqrt{3} + i)$	$2 e^{\frac{7\pi i}{6}}$
(i) $3 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{5\pi}{6} \right)$	$\frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i)$	$2 e^{\frac{5\pi i}{3}}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{(j)} & 2^{7/10} \left( \sin \frac{3\pi}{20} + i \cos \frac{3\pi}{20} \right) & (1+i)^{7/5} \qquad 2^{7/10} e^{\frac{7\pi i}{20}} \\
 \text{(k)} & 3e^{-\frac{2\pi i}{3}} & -\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i) \qquad 3 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \\
 \text{(l)} & \sqrt{2} e^{\frac{7\pi i}{12}} & (1+i)^{7/3} \qquad \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{7/3}
 \end{array}$$

10.2 Napište součet, součin a podíl následujících komplexních čísel:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} & z_1 = 2 + 3i, z_2 = 7 - i & z_1 + z_2 = 9 + 2i & z_1 z_2 = 17 + 19i & \frac{z_1}{z_2} = \frac{11 + 23i}{50} \\
 \text{(b)} & z_1 = 12 + i, z_2 = 6 - 3i & z_1 + z_2 = 18 - 2i & z_1 z_2 = 75 - 30i & \frac{z_1}{z_2} = \frac{23 + 14i}{15} \\
 \text{(c)} & z_1 = 7 + 3i, z_2 = 3 - 3i & z_1 + z_2 = 10 & z_1 z_2 = 30 - 12i & \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 5i}{3} \\
 \text{(d)} & z_1 = 2 + 12i, z_2 = 5 - i & z_1 + z_2 = 7 + 11i & z_1 z_2 = 22 + 58i & \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + 31i}{13} \\
 \text{(e)} & z_1 = 1 - i, z_2^* = 11 + 5i & z_1 + z_2 = 12 - 6i & z_1 z_2 = 6 - 16i & \frac{z_1}{z_2} = \frac{8 - 3i}{73} \\
 \text{(f)} & z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), z_2 = 3 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) & & & \\
 & z_1 + z_2 = \frac{-1 + 5\sqrt{3}i}{2} & z_1 z_2 = -6 & & \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{3} \\
 \text{(g)} & z_1 = 3 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right), z_2 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3} \right) & & & \\
 & z_1 + z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 + \left( \sqrt{3} - \frac{3}{2} \right) i & z_1 z_2 = 3(\sqrt{3} + i) & & \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} - (2 + 3\sqrt{3})i}{8}
 \end{array}$$

10.3 Napište následující mocniny (odmocniny) komplexních čísel:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & (1+i)^7 \qquad 8(1-i) \\
 \text{(b)} & (-\sqrt{3}+i)^8 \qquad 128(-1+\sqrt{3}i) \\
 \text{(c)} & \sqrt[3]{1} \qquad 1, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i) \\
 \text{(d)} & \sqrt[6]{729} \qquad \pm 3, \pm \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i) \\
 \text{(e)} & \sqrt{-2+2i} \qquad \sqrt[4]{8} \left[ \cos \left( \frac{3\pi}{8} + k\pi \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{8} + k\pi \right) \right], k = 0, 1 \\
 \text{(f)} & \sqrt[5]{1+\sqrt{3}i} \qquad \sqrt[5]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi \right) \right], k = 0, 1, 2, 3, 4
 \end{array}$$



$$\begin{aligned}
 \text{(g)} \quad & \sqrt[3]{5 - \frac{15i}{\sqrt{3}}} && \sqrt[3]{10} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1, 2 \\
 \text{(h)} \quad & \sqrt[3]{-5 + \frac{5i}{\sqrt{3}}} && \sqrt[6]{\frac{100}{3}} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1, 2 \\
 \text{(i)} \quad & \sqrt{-6 + \frac{6i}{\sqrt{3}}} && \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1
 \end{aligned}$$

10.4 Ověřte, jestli mohou být následující komplexní funkce  $f(z) = f(x + iy)$  holomorfní na otevřených podmnožinách komplexní roviny:

- |  |     |
|--|-----|
| (a) $3y - 3xi$                           | ano |
| (b) $3x^2 + 3y + 6xyi$                   | ne  |
| (c) $z^2 + \ln z + 1$                    | ano |
| (d) $z^3 + 5z - \sin z$                  | ano |
| (e) $ z^2 + y $                          | ne  |
| (f) $\frac{z-1}{z+1}$                    | ano |
| (g) $\sqrt{z+1+i}$                       | ano |
| (h) $\exp(-iz^2)$                        | ano |
| (i) $\exp\left[\frac{(z+1)^2}{i}\right]$ | ano |
| (j) $\ln\left(\frac{z+1}{i}\right)$      | ano |

10.5 Nalezněte holomorfní funkce komplexní proměnné  $f(z)$ , pokud je zadána pouze  $\operatorname{Re}[f(z)] = u(x, y)$  nebo pouze  $\operatorname{Im}[f(z)] = v(x, y)$ :

- |  |  |
|--|--|
| (a) $u = x e^{3y}$                     | holomorfní funkce $f(z)$ neexistuje      |
| (b) $u = x^2 + 3x - y^2 + 5y$          | $f(z) = z^2 + 3z - 5iz + C$              |
| (c) $u = e^x(\cos y + 2 \sin y)$       | $v = -\frac{\partial u}{\partial y} + C$ |
| (d) $u = \sin(2x) \cosh(2y)$           | $f(z) = \sin 2z + C$                     |
| (e) $u = x^2 - y^2 + \sin(x) \cosh(y)$ | $f(z) = z^2 + \sin z + C$                |
| (f) $u = x^3 - 3xy^2 + \ln z $         | $f(z) = z^3 + \ln z + C, z \neq 0$       |
| (g) $u = x - \frac{x}{x^2 + y^2}$      | $f(z) = z - \frac{1}{z} + C, z \neq 0$   |

$$(h) \quad v = y - \sin(x) \sinh(y) \qquad f(z) = z + \cos z + C$$

$$(i) \quad v = x + \sinh(x) \sin(y) \qquad f(z) = iz + \cos iz + C$$

10.6 Pomocí reziduové věty vypočítejte následující integrály (kde  $\mathcal{C}$  značí uzavřenou křivku obsahující všechny singularity dané funkce  $f(z)$ ,  $\mathcal{C}_+$  značí uzavřenou křivku obsahující pouze jednu libovolnou singularitu dané funkce):

$$(a) \quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2 - 1} dz \qquad 2\pi i$$

$$(b) \quad \oint_{\mathcal{C}_+} \frac{z}{z^2 - 1} dz \qquad \pi i$$

$$(c) \quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z^2 + 5} dz \qquad 2\pi i \frac{\sinh \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$(d) \quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz \qquad 2\pi i \sin(1)$$

$$(e) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \qquad \pi$$

$$(f) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2} dx \qquad \frac{\pi}{e} \sin(1)$$

$$(g) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{6x^2 + 6x + 3} dx \qquad \frac{\pi}{3\sqrt{e}} \cos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(h) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 3} \quad (\text{viz příklad 1.31}) \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 dx}{(x^2 + 4)^4} \qquad \frac{5\pi}{512}$$

# Kapitola 11

## Kombinatorika

*Kombinatorika* je jednou z nejstarších matematických disciplín, která se zabývá vnitřní strukturou tzv. *konfigurací* diskretních prvků (například čísel nebo jiných objektů), jejich existencí, hledáním počtu různých typů těchto prvků v závislosti na daných podmínkách, atd. Typickými příklady takových konfigurací jsou *kombinace*, *permutace* a *variace*. Kombinatorické principy tvoří matematický základ definice tzv. *statistických rozdělání*, používaných k popisu chování fyzikálních systémů například v kvantové mechanice, statistické fyzice, atd.

- **Kombinace bez opakování:**

Počet  $k$ -členných kombinací (kombinací  $k$ -té třídy) bez opakování z  $n$  prvků ( $k, n \in \mathbb{N} \cup 0$ ), tj. každý prvek se v dané kombinaci může vyskytovat pouze jednou, je dán vztahem

$$C(k, n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}, \quad (11.1)$$

kdy poslední výraz v závorce, tzv. *kombinační číslo*, čteme „ $n$  nad  $k$ “. Kombinační číslo je také určujícím faktorem v tzv. *binomické větě*,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad (11.2)$$

pomocí níž lze  $n$ -tou mocninu dvojčlenu  $x + y$  rozložit na součet  $n + 1$  členů.

Kombinace bez opakování je matematickým základem tzv. *Fermiho-Diracovy statistiky*, popisující systémy složené z tzv. *fermionů*, tedy ze vzájemně nerozlišitelných kvantových částic s *antisymetrickou vlnovou funkcí* a *poločíselným spinem* (například protonů, neutronů, elektronů, neutrin, atd.). Typickým jednoduchým příkladem může být počet různých dvojic, které lze vytvořit z celkového počtu 30 lidí, kde podmínka „bez opakování“ vyplývá z faktu, že každý určitý jedinec se v každé dvojici může vyskytovat pouze jednou. Zároveň lze na kombinaci pohlížet jako na variaci kdy tzv. *nezáleží na pořadí* prvků, tj. dvojice  $A-B$  je totožná s dvojicí  $B-A$ . Výsledkem je číslo 435.

- **Kombinace s opakováním:**

Počet  $k$ -členných kombinací s opakováním z  $n$  prvků, tj. daný prvek se v dané kombinaci může vyskytovat vícekrát (přičemž opět nezáleží na pořadí prvků), je dán vztahem

$$C'(k, n) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}. \quad (11.3)$$

Kombinace s opakováním je matematickým základem tzv. *Boseho-Einsteinovy statistiky*, popisující systémy složené z tzv. *bosonů*, tedy ze vzájemně nerozlišitelných kvantových částic se *symetrickou vlnovou funkcí* a *celočíslným spinem* (například fotonů, mezonů, gluonů, jader  ${}^4\text{He}$ , atd.).

Typickým příkladem může být počet různých způsobů, kterými lze koupit sadu osmi sazenic salátu, pokud mají v obchodě (v dostatečném množství) 6 různých druhů sazenic (v každé sadě se může kterýkoli z šesti druhů sazenic vyskytovat v libovolném počtu od 1 do 8). Výsledkem je číslo 1287.

### • Permutace bez opakování:

Obecně definujeme permutaci jako uspořádanou  $n$ -tici prvků, kdy celkový počet prvků výběrové množiny je rovněž  $n$ . Pokud se tyto prvky v každé takové uspořádané  $n$ -tici nemohou opakovat, počet různých takových  $n$ -tic (permutací bez opakování) je dán vztahem

$$P(n) = n! \quad (11.4)$$

Příklad: kolik různých uspořádání, obsahujících vždy všechna písmena, existuje pro pětici písmen  $a, b, c, d, e$ ? Počet takových uspořádaných petic ( $n = 5$ ) bez opakování je dán vztahem  $P(5) = 5!$ , celkový počet takových uspořádání (permutací) je tedy 120.

### • Permutace s opakováním:

Pokud je mezi  $n$  prvky výběrové množiny  $k$  skupin, které mají postupně  $n_1, n_2, \dots, n_k$  stejných prvků, potom je počet tzv. permutací s opakováním dán vztahem

$$P'_{n_1, n_2, \dots, n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}, \quad \text{kdy} \quad n = \sum_{i=1}^k n_i. \quad (11.5)$$

Příklad: kolik různých permutací existuje pro sedmiprvkovou množinu čtyř písmen s možným opakováním  $a, a, a, b, b, c, d$ , kdy první písmeno se zde vyskytuje třikrát a druhé písmeno dvakrát? Celkový počet takových permutací bude  $7!/(3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!) = 420$ .

Výraz (11.5) tvoří rovněž matematický základ zobecněné binomické věty (11.2) pro libovolný počet členů  $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , kdy pro tzv. *multinomický koeficient*

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad (11.6)$$

musí pro všechna  $m \in \mathbb{N}$  a  $k_i, n \in \mathbb{N} \cup 0$  opět platit  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Takto rozšířenou binomickou větu (11.2) potom zapíšeme jako tzv. *multinomickou větu* ve formě

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}, \quad (11.7)$$

kde součin  $m$  prvků  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$  lze zapsat pomocí symbolu pro násobení jako  $\prod_{i=1}^m x_i^{k_i}$ .

### • Variace bez opakování:

Variaci definujeme obecně jako uspořádanou  $k$ -tici (tj.  $k$ -tici, ve které tzv. *záleží na pořadí* prvků), vybranou ze sady, obsahující  $n$  prvků. Pokud se tyto prvky v každé takové uspořádané

$k$ -tici nemohou opakovat, počet různých takových  $k$ -tic,  $k \leq n$  (variací bez opakování), je dán vztahem

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (11.8)$$

Typickým příkladem může být následující úloha: kolik barevných trikolór lze vytvořit z celkem šesti barev? Variace bez opakování v tomto případě vyplývá z definice trikolóry (pokud by se některá ze tří barev opakovala, nepůjde o trikolóru). Zároveň záleží na pořadí jednotlivých prvků, tj. například trikolóra s pořadím barev *červená-modrá-zelená* je jiná trikolóra než trikolóra s pořadím barev *zelená-modrá-červená*. Celkový počet trikolór tedy bude  $6!/3! = 120$ .

• **Variace s opakováním:**

Počet uspořádaných  $k$ -tic (kdy opět záleží na pořadí prvků) s opakováním z  $n$  prvků, tj. kdy se daný prvek v dané  $k$ -tici může vyskytovat vícekrát, je dán vztahem

$$V'(k, n) = n^k. \quad (11.9)$$

Typický příklad: kolik dvojciferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4, 5? Opět zde záleží na pořadí jednotlivých prvků, tj. například číslo 21 je jiné číslo než číslo 12, zároveň ovšem musíme zahrnout i čísla 11, 22, atd., kde se číslice opakují. Celkový počet takových dvojciferných čísel bude  $5^2 = 25$ .

• **Příklady:**

11.1 Kolik kružnic je definováno 12 body, ležícími v jedné rovině, pokud žádné 3 body neleží v jedné přímce?

220

11.2 Určete, kolika způsoby lze ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou právě dvě ženy.

210

11.3 V bedně je 54 výrobků, z nichž 21 je první jakosti, 27 je druhé jakosti a zbytek je vadných. Kolika způsoby lze vybrat skupinu 6 výrobků tak, aby obsahovala 3 výrobky první jakosti, 2 druhé jakosti a jeden vadný výrobek?

147 420

11.4 Hokejové mužstvo má celkem 24 hráčů: 13 útočníků, 8 obránců a 3 brankáře. Kolik různých sestav může trenér vytvořit, jestliže sestava má mít 3 útočníky, 2 obránce a 1 brankáře?

6 552

11.5 Kolik prvků budeme potřebovat, abychom vytvořili šestkrát více kombinací čtvrté třídy (bez opakování prvků) než kombinací druhé třídy?

11

11.6 Trenér curlingu má k dispozici sedm hráčů: Aleše, Bedřicha, Cyrila, Davida, Emila, Filipa a Gustava. Má sestavit čtyřčlenné družstvo.

- (a) kolik družstev může sestavit,
- (b) kolik družstev může sestavit, pokud z trojice Aleš, Bedřich a Cyril hraje jen jeden,
- (c) kolik družstev může sestavit, pokud z trojice Aleš, Bedřich a Cyril hrají nejvýše dva a z dvojice David a Emil jeden nehraje,
- (d) kolik družstev může sestavit, pokud z trojice Aleš, Bedřich a Cyril hrají nejvýše dva a nehraje současně Filip a Gustav.

(a) 35

(b) 12

(c) 18

(d) 21

11.7 Kolik existuje pěticiferných čísel?

90 000

11.8 Kolik čísel lze vytvořit ze sady neopakujících se číslic 7, 3, 5, 2, 4, 8, 1, 9 tak, aby čísla obsahovala letopočet objevení Ameriky?

1 680

11.9 Na Kypru se poznávací značky na autech skládají z bloku 3 písmen, za kterým následuje čtyřciferné číslo. První část se vybírá pouze ze čtrnácti písmen A, B, E, H, I, J, K, M, N, P, T, X, Y, Z.

- (a) Kolik existuje takových poznávacích značek?
- (b) Kolik značek má každé písmeno jiné?
- (c) V kolika značkách je na prvním místě samohláska?
- (d) V kolika značkách je samohláska pouze na 1. a 3. pozici?

(a)  $14^3 \cdot 9 \cdot 10^3 = 24\,696\,000$

(b)  $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 10^3 = 19\,656\,000$

(c)  $4 \cdot 14^2 \cdot 9 \cdot 10^3 = 7\,056\,000$

(d)  $4^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10^3 = 1\,440\,000$

11.10 Kolika způsoby můžeme sestavit z patnácti lidí libovolně velkou pracovní skupinu? Ve skupině může být 1 až 15 lidí.

32 767

11.11 V nádobě se nachází  $10^5$  částic ideálního plynu. Jaká je pravděpodobnost, že se všechny zcela náhodně se pohybující částice ocitnou v levé polovině nádoby, pokud částicemi budou

(a) molekuly  $\text{NH}_3$ ?

(b) jádra  ${}^4\text{He}$ ?

(a)  $2^{-10^5}$

(b)  $(10^5 + 1)^{-1}$

11.12 Uvažujme  $k = 3$  mince, kdy každá může nabývat dvou „hodnot“, tj. *panna* nebo *orel*. Je zřejmé, že pokud hodíme všemi mincemi zároveň, může nastat celkem  $n = 8$  možných výsledků: PPP, PPO, POP, OPP, OOP, OPO, POO, OOO. Každý jednotlivý výsledek nazveme *mikrostavem*, který zohledňuje stav každé mince (nebo částice, pokud půjde o obecný fyzikální systém). Pokud budeme rozlišovat pouze počet hozených panen nebo orlů, specifikujeme tzv. *makrostav* (označme ho například  $E_i$ ), v tomto případě tedy máme 4 možné makrostavy: 3P, 2P+1O, 1P+2O, 3O. Počet mikrostavů, tvořících makrostav, nazýváme *statistická váha* (násobnost mikrostavu)  $W(E_i)$ . Pro 4 makrostavy dostáváme v našem případě  $W_0 = 1, W_1 = 3, W_2 = 3, W_3 = 1$ , kde pořadová čísla jednotlivých makrostavů odpovídají počtu např. panen v daném makrostavu. Pravděpodobnost výskytu určitého makrostavu  $P(E_i)$  je dána podílem jeho statistické váhy  $W(E_i)$  a celkového počtu mikrostavů  $n$ . Entropie  $S$  určitého makrostavu  $E_i$  bude  $S = \ln W$ . Vypište počet možných mikrostavů a pravděpodobnosti jednotlivých makrostavů v případě, že házíme

(a) čtyřmi mincemi

(b) dvaceti mincemi, který makrostav je nejpravděpodobnější?

(c) jaká je pravděpodobnost makrostavu s 12 pannami a 8 orly?

(d) sto mincemi, který makrostav je nejpravděpodobnější?

(e) napište entropii makrostavů  $E_0, E_1, E_{\max}$

(a)  $n = 16, P_0 = 1/16, P_1 = 1/4, P_2 = 3/8, P_3 = 1/4, P_4 = 1/16$

(b)  $n = 2^{20}, P_0 = 1/2^{20}, P_1 = 20/2^{20}, P_2 = 190/2^{20}, \dots, P(E_i) = \frac{20!}{i!(20-i)!2^{20}}, \dots,$   
 $P_{20} = 1/2^{20}, P_{\max} = P_{10}$

(c) přibližně 0,12

(d)  $n = 2^{100}, P_0 = 1/2^{100}, P_1 = 100/2^{100}, P_2 = 4950/2^{100}, \dots, P(E_i) = \frac{100!}{i!(100-i)!2^{100}},$   
 $\dots, P_{100} = 1/2^{100}, P_{\max} = P_{50}$

(e) 0,  $\ln 100 \approx 4,6, \ln 100! - 2 \ln 50! \approx 66,78$  - nejpravděpodobnější makrostav má tedy nejvyšší entropii, nejméně pravděpodobný nejnižší (nulovou)

11.13 Mějme 3 částice ideálního plynu a 5 „příhrádek“ - kvantových „krabic“, označme je například  $a, b, c, d, e$ . Částice mohou být do jednotlivých příhrádek rozmístěny libovolným způsobem, odpovídajícím ovšem jejich typu (například není možné aby více

fermionů bylo v jedné přihrádce). Každou jednotlivou variaci, případně kombinaci, systému částic označme jako mikrostav. Jako „makrostav“ označme soubor mikrostavů, kdy jsou buď všechny tři částice v jedné přihrádce (označme jej jako „makrostav“ „3“), nebo jsou dvě částice v jedné přihrádce a třetí v jiné (označme jej jako „makrostav“ „2/1“), nebo je každá částice v jedné samostatné přihrádce (označme jej jako „makrostav“ „1/1/1“). V uvedeném systému se tedy mohou vyskytovat nejvýše 3 „makrostavy“.

- (a) kolik mikrostavů může nastat postupně pro molekuly  $\text{NH}_3$ , jádra  ${}^4\text{He}$ , protony?
- (b) kolik „makrostavů“ může nastat postupně pro molekuly  $\text{NH}_3$ , jádra  ${}^4\text{He}$ , protony?
- (c) jaká je pravděpodobnost výskytu mikrostavu, kdy všechny tři částice budou v jedné určité přihrádce (například  $a$ ), postupně pro molekuly  $\text{NH}_3$ , jádra  ${}^4\text{He}$ , protony?
- (d) jaká je pravděpodobnost výskytu mikrostavu, kdy každá ze tří částic bude samostatně v přihrádkách  $a$ ,  $c$ ,  $e$ , postupně pro molekuly  $\text{NH}_3$ , jádra  ${}^4\text{He}$ , protony?
- (e) jaká je pravděpodobnost výskytu jednotlivých „makrostavů“ postupně pro molekuly  $\text{NH}_3$ , jádra  ${}^4\text{He}$ , protony?

(a) 125, 35, 10

(b) 3, 3, 1

(c)  $1/125$ ,  $1/35$ , 0

(d)  $6/125$ ,  $1/35$ ,  $1/10$

(e) „makrostav“ „3“:  $1/25$ ,  $1/7$ , 0  
„makrostav“ „2/1“:  $12/25$ ,  $4/7$ , 0  
„makrostav“ „1/1/1“:  $12/25$ ,  $2/7$ , 1



## Kapitola 12

# Počer pravděpodobnosti<sup>1</sup>

Rozdělení pravděpodobnosti *diskrétní* náhodné veličiny  $X$  vyjadřuje tzv. pravděpodobnostní funkce  $P(X)$  s hodnotami pravděpodobnosti  $p(x_i) = p_i$ , kde  $\sum_i p_i = 1$ . Rozdělení pravděpodobnosti *spojité* náhodné veličiny  $X$  udává funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti (hustoty pravděpodobnosti)  $f(x)$ , pro kterou platí  $\int_{\Omega} f(x) dx = 1$ , kde  $\Omega$  je definiční obor veličiny  $X$ . Pro hodnoty  $x \notin \Omega$  platí  $f(x) = 0$ . Významná rozdělení pravděpodobnosti jsou:

- *Rovnoměrné* rozdělení pravděpodobnosti *diskrétní* i *spojité* náhodné veličiny  $X$ , které přiřazuje všem jejím hodnotám stejnou pravděpodobnost. Rovnoměrné rozdělení má ve všech bodech daného intervalu  $\langle a, b \rangle$ , konstantní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \text{pro } x \notin \langle a, b \rangle \end{cases}. \quad (12.1)$$

- *Poissonovo* rozdělení pravděpodobnosti *diskrétní* náhodné veličiny  $X$ , které lze vyjádřit pomocí zvoleného parametru  $\lambda > 0$  jako

$$p_i = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}. \quad (12.2)$$

- *Normální* (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti *spojité* náhodné veličiny  $X$ , které je definováno hustotou pravděpodobnosti ve tvaru tzv. Gaussovy funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (12.3)$$

kde parametr  $\mu$  znamená střední hodnotu veličiny  $X$ , parametr  $\sigma$  jeho směrodatnou odchylku (viz dále).

Ve statistické fyzice se také střední počet rozlišitelných částic (např. molekul) ve stavu s energií  $E$  určuje pomocí tzv. *Maxwellovy-Boltzmannovy* rozdělovací funkce. Pro nerozlišitelné částice platí tzv. *Fermiho-Diracovo* rozdělení pro fermiony (elektrony, protony, neutrina, atd.) a *Boseho-Einsteinovo* rozdělení pro bosony (např. fotony). V matematické statistice se často používá tzv. *Studentovo* rozdělení (viz např. [Pánek, 2001](#)), atd. V návaznosti na rozdělení pravděpodobnosti můžeme určit celou řadu *statistických nástrojů*, pomocí nichž můžeme analyzovat náhodnou veličinu  $X$  (reprezentující například soubor naměřených hodnot). Mezi nejdůležitější z nich patří:

---

<sup>1</sup>V této kapitole jsou použité příklady z knihy: [Musilová & Musilová \(2006\)](#).

- *Váha* - v případě *diskrétní* náhodné veličiny  $X$  s jednotlivými hodnotami  $x_i$  zavádíme tzv. váhu  $w_i$ , kterou můžeme zpravidla stanovit na základě tzv. *vnitřních nejistot* (chyb  $\delta x_i$  hodnot  $x_i$  (například chyby měření, atd.), tedy na základě relace

$$w_i \sim \frac{1}{\delta x_i^2}. \quad (12.4)$$

Dále zavedeme tzv. sumu vah  $S_w$  a tzv. střední váhu  $w_s$ ,

$$S_w = \sum_{i=1}^N w_i, \quad w_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i = \frac{S_w}{N}, \quad (12.5)$$

kde  $N$  je celkový počet diskrétních hodnot  $x_i$ . Mezi váhami a hodnotami pravděpodobnosti existuje tedy volná relace - pokud suma vah  $S_w = 1$ , potom  $w_i = p_i$ . Obdobným způsobem můžeme v případě spojité náhodné veličiny zavést tzv. váhovou funkci  $w(x)$ , jejíž „suma“ bude dána jako  $\int_{\Omega} w(x) dx$ . Je tedy opět zřejmé, že pokud tento integrál bude normován (bude roven jedné) bude platit  $w(x) = f(x)$ , váhová funkce se takto stává hustotou pravděpodobnosti.

- *Střední hodnota* (aritmetický průměr), která se obvykle značí  $\bar{x}$ ,  $\langle x \rangle$  nebo také  $\mu$ . V případě diskrétní náhodné veličiny  $X$  bude střední hodnota definována jako suma všech hodnot  $x_i$  veličiny  $X$  dělená jejich počtem nebo jako suma násobků všech hodnot veličiny  $X$  s příslušnými hodnotami pravděpodobnostní funkce, tedy

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i p_i. \quad (12.6)$$

V případě použití druhého vztahu mluvíme také o tzv. očekávané hodnotě, značené  $E(X)$ , resp. o váženém aritmetickém průměru. Jemný rozdíl mezi těmito pojmy závisí na definici prvku  $x_i$  veličiny  $X$ , případně na způsobu volby tzv. statistické váhy. Tzv. *váhouvanou* střední hodnotu (váhovaný aritmetický průměr) stanovíme jako

$$\langle x \rangle = \frac{1}{S_w} \sum_{i=1}^N x_i w_i. \quad (12.7)$$

Střední hodnotu (neváhouvanou a váhouvanou) *spojité* náhodné veličiny  $X$  stanovíme jako

$$\langle x \rangle = E(X) = \int_{\Omega} x f(x) dx, \quad \langle x \rangle = \frac{\int_{\Omega} x w(x) dx}{\int_{\Omega} w(x) dx}. \quad (12.8)$$

V případě dále uváděných statistických nástrojů je stanovení jejich váhovaných podob zcela obdobné.

- *Rozptyl a směrodatná odchylka* jsou nejčastěji označovány jako  $D(X)$ ,  $\text{var}(X)$ , případně  $\sigma^2(X)$  (rozptyl) a  $\sigma(X)$  (směrodatná odchylka). Rozptyl (disperze) je definován jako střední hodnota druhých mocnin odchylek od střední hodnoty (aritmetického průměru) veličiny  $X$ , směrodatná odchylka je odmocninou z rozptylu. Pro *diskrétní* náhodnou veličinu  $X$  se stejnou váhou (pravděpodobností) všech hodnot  $x_i$  je rozptyl definován jako

$$D(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (12.9)$$

V případě různých pravděpodobností diskrétních hodnot náhodné veličiny  $X$  bude rozptyl určen vztahem

$$D(X) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - \langle x \rangle)^2 = -\langle x \rangle^2 + \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot p_i. \quad (12.10)$$

Pro *spojitou* náhodnou veličinu  $X$  je rozptyl definován vztahem

$$D(X) = \int_{\Omega} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx = -\langle x \rangle^2 + \int_{\Omega} x^2 f(x) dx. \quad (12.11)$$

Pro směrodatnou odchylku obecně platí  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

- *Nejpravděpodobnější hodnotu*  $P_{\max}(X)$  pro *diskrétní* náhodnou veličinu  $X$  stanovíme jako hodnotu  $x_i$  s nejvyšší hodnotou pravděpodobnostní funkce  $p_i$ , tedy  $P_{\max}(X) = (x_i, \max(p_i))$ . V případě *spojité* náhodné veličiny  $X$  určíme nejpravděpodobnější hodnotu  $P_{\max}(X)$  jako maximum funkce hustoty pravděpodobnosti  $f(x)$  v definičním oboru  $\Omega$  veličiny  $X$ , tedy  $P_{\max}(X) = \max(f(x))$  pro  $x \in \Omega$ .
- *Medián* ( $\tilde{x}_{0,5}$ ) a *čtvrtkvantily* ( $\tilde{x}_{0,25}$ ,  $\tilde{x}_{0,75}$ , také nazývané dolní a horní kvartil) jsou hodnoty  $x_i$ , v nichž je monotónně uspořádaný statistický soubor rozdělen na příslušné množství stejně početných částí. Medián tedy dělí statistický soubor na dvě stejně početné poloviny. Výhodou mediánu oproti střední hodnotě je jeho neovlivnitelnost extrémně vychýlenými hodnotami. Například u souboru  $\{1, 2, 2, 3, 27\}$  medián  $\tilde{x}_{0,5} = 2$ , střední hodnota  $\langle x \rangle = 7$ . V případě *spojité* náhodné veličiny  $X$  určíme medián a čtvrtkvantily (případně jakkoli jinak definované kvantily) z integrálních rovnic

$$\int_{-\infty}^{\tilde{x}_{0,5}} f(x) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\tilde{x}_{0,25}} f(x) dx = \frac{1}{4}, \quad \int_{-\infty}^{\tilde{x}_{0,75}} f(x) dx = \frac{3}{4}. \quad (12.12)$$

- *Distribuční funkce*  $F(x)$  vyjadřuje pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny  $X$  s daným rozdělením pravděpodobnosti bude menší nebo rovna  $x$ . V případě *diskrétní* náhodné veličiny  $X$  bude distribuční funkce  $F(x)$  daná předpisem

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i, \quad (12.13)$$

bude tedy v bodech  $x_i$  nespojitá a mezi body  $x_i$  konstantní. Pro *spojitou* náhodnou veličinu  $X$  můžeme distribuční funkci  $F(x)$  zapsat jako integrál funkce hustoty pravděpodobnosti,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (12.14)$$

Každá distribuční funkce  $F(x)$  je neklesající a zprava spojitá, její asymptotické vlastnosti lze vyjádřit jako  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ , pro libovolnou dvojici  $x_1, x_2$  platí  $P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ .

## ● Příklady:

12.1 Střelec provedl  $N = 150$  výstřelů na terč, který je tvořen soustavou  $n = 5$  mezikruží  $MK_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Mezikruží  $MK_i$  přitom zasáhl  $N_i$ -krát, kde  $N_1 = 15$ ,  $N_2 = 20$ ,  $N_3 = 35$ ,  $N_4 = 45$ ,  $N_5 = 35$ . Za zásah mezikruží  $MK_i$  získal  $i$  bodů. Náhodnou veličinu  $X$  s diskrétním rozdělením definujeme jako počet bodů, získaných pro jeden náhodný výstřel. Určete:

- (a) rozdělení  $\{(x_i, p_i)\}$  veličiny  $X$ ,
- (b) pravděpodobnost, že pro náhodný výstřel získá střelec alespoň  $I$  bodů,  $I = 1, 2, 3, 4, 5$ ,
- (c) střední hodnotu veličiny  $X$ ,
- (d) směrodatnou odchylku veličiny  $X$ ,
- (e) pravděpodobnost, že při výstřelu získá střelec počet bodů v intervalu  $i \in \langle 2, 4 \rangle$ .

(a)  $\left\{ \left(1, \frac{1}{10}\right), \left(2, \frac{2}{15}\right), \left(3, \frac{7}{30}\right), \left(4, \frac{3}{10}\right), \left(5, \frac{7}{30}\right) \right\}$

(b)  $P_1 = 1, P_2 = \frac{9}{10}, P_3 = \frac{23}{30}, P_4 = \frac{8}{15}, P_5 = \frac{7}{30}$

(c)  $3,4\bar{3}$

(d)  $1,26$

(e)  $\frac{2}{3}$

12.2 Na letištních záchodech jsou čtyři kabinky. Je dána distribuční funkce obsazení kabin:  $F(0) = 0,1$ ,  $F(1) = 0,35$ ,  $F(2) = 0,6$ ,  $F(3) = 0,95$ ,  $F(4) = 1$ . Určete:

- (a) rozdělení náhodné veličiny  $X$ , odpovídající počtu obsazených kabin,
- (b) střední hodnotu veličiny  $X$  a její rozptyl,
- (c) pravděpodobnost, že budou obsazeny alespoň dvě kabinky.

(a)  $\{(0; 0,1), (1; 0,25), (2; 0,25), (3; 0,35), (4; 0,05)\}$

(b)  $2; 1,2$

(c)  $0,65$

12.3 Je dána funkce  $f(x) = k \cdot x$  pro  $0 \leq x \leq 2$  a  $f(x) = 0$  v ostatních případech. Určete:

- (a) konstantu  $k$  tak, aby funkce byla hustotou pravděpodobnosti,
- (b) střední hodnotu a rozptyl,
- (c) nejpravděpodobnější hodnotu,
- (d) medián a čtvrtkvantily  $\tilde{x}_{0,25}, \tilde{x}_{0,75}$ ,
- (e) distribuční funkci.

(a)  $k = \frac{1}{2}$

(b)  $\frac{4}{3}, \frac{2}{9}$

(c) 2

(d)  $\tilde{x}_{0,5} = \sqrt{2}, \tilde{x}_{0,25} = 1, \tilde{x}_{0,75} = \sqrt{3}$

(e)  $F(x) = 0 \forall x < 0, F(x) = \frac{1}{4}x^2 \forall 0 \leq x \leq 2, F(x) = 1 \forall x > 2$

12.4 Je dána funkce  $f(x) = \frac{k}{(x+1)^2}$  pro  $x \geq 0$  a  $f(x) = 0$  pro  $x < 0$ . Určete:

(a) konstantu  $k$  tak, aby funkce byla hustotou pravděpodobnosti,

(b) distribuční funkci,

(c) nejpravděpodobnější hodnotu, medián a čtvrtkvantily  $\tilde{x}_{0,25}, \tilde{x}_{0,75}$ .

(a)  $k = 1$

(b)  $F(x) = 0 \forall x \leq 0, F(x) = \frac{x}{x+1} \forall x > 0$

(c) 0,  $\tilde{x}_{0,5} = 1, \tilde{x}_{0,25} = \frac{1}{3}, \tilde{x}_{0,75} = 3$

12.5 Jsou dány funkce  $f(x) = \frac{k}{x^2}$  pro  $1 \leq x \leq 2$ ,  $f(x) = 0$  v ostatních případech,  $g(x) = c(x-x^2)$  pro  $0 \leq x \leq 1$ ,  $g(x) = 0$  v ostatních případech. Určete:

(a) konstanty  $k$  a  $c$  tak, aby funkce byly hustotami pravděpodobnosti,

(b) příslušné distribuční funkce,

(c) nejpravděpodobnější hodnotu, střední hodnotu, rozptyl a medián pro každé z rozdělení.

(a)  $k = 2, c = 6$

(b)  $F_1(x) = 0 \forall x < 1, F_1(x) = 2\frac{x-1}{x} \forall 1 \leq x \leq 2, F_1(x) = 1 \forall x > 2, F_2(x) = 0 \forall x < 0, F_2(x) = 3x^2 - 2x^3 \forall 0 \leq x \leq 1, F_2(x) = 1 \forall x > 1$

(c)  $f : 1, 2 \ln 2, 2 - 4 \ln^2 2, \frac{4}{3}, g : \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \frac{1}{2}$

12.6 Házíme dvěma kostkami. Náhodnou veličinou  $X$  označme součet bodů na obou kostkách při jednom hození. Určete:

(a) rozdělení veličiny  $X$ ,

(b) distribuční funkci,

(c) střední hodnotu, rozptyl a nejpravděpodobnější hodnotu,

(d) pravděpodobnost, že součet bodů na kostkách bude ležet v intervalu  $\langle 5, 7 \rangle$ .

(a)  $\left\{ (1, 0), \left(2, \frac{1}{36}\right), \left(3, \frac{1}{18}\right), \left(4, \frac{1}{12}\right), \left(5, \frac{1}{9}\right), \left(6, \frac{5}{36}\right), \left(7, \frac{1}{6}\right), \left(8, \frac{5}{36}\right), \left(9, \frac{1}{9}\right), \left(10, \frac{1}{12}\right), \left(11, \frac{1}{18}\right), \left(12, \frac{1}{36}\right) \right\}$

- (b)  $F(x) = 0 \forall x < 2$ ,  $F(x) = \frac{1}{36} \forall x \in \langle 2, 3 \rangle$ ,  $F(x) = \frac{1}{12} \forall x \in \langle 3, 4 \rangle$ ,  $F(x) = \frac{1}{6} \forall x \in \langle 4, 5 \rangle$ ,  $F(x) = \frac{5}{18} \forall x \in \langle 5, 6 \rangle$ ,  $F(x) = \frac{5}{12} \forall x \in \langle 6, 7 \rangle$ ,  $F(x) = \frac{7}{12} \forall x \in \langle 7, 8 \rangle$ ,  $F(x) = \frac{13}{18} \forall x \in \langle 8, 9 \rangle$ ,  $F(x) = \frac{5}{6} \forall x \in \langle 9, 10 \rangle$ ,  $F(x) = \frac{11}{12} \forall x \in \langle 10, 11 \rangle$ ,  $F(x) = \frac{35}{36} \forall x \in \langle 11, 12 \rangle$ ,  $F(x) = 1 \forall x \geq 12$
- (c) 7; 5,83; 7
- (d)  $\frac{5}{12}$

# Příloha A

## Křivočaré souřadnice

Většina jevů v přírodě (a tedy i fyzikálních dějů) neprobíhá přísně pravoúhle a není vhodné a často ani schůdné je jednoduše popisovat pomocí kartézské metriky. V tom případě je výhodné zvolit takovou souřadnou soustavu (zpravidla křivočarou), která co nejlépe odpovídá geometrii popisovaného děje. Nejčastěji používanými křivočarými souřadnými soustavami jsou soustava *válcová* (*cylindrická*) a soustava *kulová* (*sférická*). Dále existuje řada speciálních křivočarých souřadných soustav, např. eliptická, parabolická, kónická, atd., včetně soustav neortogonálních, tj. takových, kdy jednotlivé souřadnicové směry nespírají pravý úhel. Zvládnutí matematického aparátu, popisujícího křivočaré souřadnice, jejich vztahy a vzájemné převody, je pro fyzikální praxi nezbytné. V následujících poznámkách si ukážeme základní principy a praktické postupy při počítání v kartézských, válcových a kulových souřadných soustavách.

### A.1 Kartézská soustava

Ačkoli kartézská soustava vlastně nepatří mezi křivočaré soustavy, uvádíme ji zde jako základní a nejjednodušší ortogonální souřadnou soustavou, na níž si názorně ukážeme základní vztahy a geometrické principy, které v rámci složitějších, skutečně křivočarých souřadných soustav již pouze analogicky upřesníme a aplikujeme. Její zásadní předností je, že (jednotkové) vektory kartézské báze,

$$\vec{e}_x = \hat{x} = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_y = \hat{y} = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_z = \hat{z} = (0, 0, 1), \quad (\text{A.1})$$

jsou konstantní (mají stále stejnou velikost a stále stejný směr), derivace těchto vektorů jsou tedy nulové.<sup>1</sup> Pro druhou mocninu vzdálenosti dvou bodů v diferenciálním tvaru platí

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad \text{což lze zobecnit tzv. } \textit{metrickou formou}, \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{A.2})$$

kde indexy  $i, j$  značí jednotlivé souřadnicové směry ( $i, j = x, y, z$ ) a zároveň tak určují jednotlivé složky  $3 \times 3$  metrického tenzoru. *Kovariantní* metrický tenzor  $g_{ij}$  kartézské soustavy má tedy elementární tvar jednotkové matice. Význam *kontravariantního* metrického tenzoru  $g^{ij}$  kartézské soustavy je formálně určen druhou mocninou velikosti vektoru

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2. \quad (\text{A.3})$$

<sup>1</sup>V dalším textu budeme jednotkové vektory zapisovat ve „stříškovém“ tvaru, tedy např.  $\hat{x}$  místo  $\vec{e}_x$ .

Zároveň musí pro každou metriku obecně platit  $g_{ij}g^{ij} = \mathbf{1}$ , kovariantní a kontravariantní metrický tenzor tak budou vždy tvořit vzájemně inverzní matice. V kartézské soustavě budou mít tedy tvar

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

### A.1.1 Diferenciální operátory

- *Gradient* skalární funkce  $f = f(x, y, z)$  je v kartézské soustavě definován jako vektor ve tvaru

$$\vec{\nabla} f = \text{grad } f = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (\text{A.5})$$

Gradient vyjadřuje v každém bodě skalárního pole *směr největšího růstu* tohoto pole. *Gradient vektoru* (vektorového pole)  $\vec{A}(x, y, z)$  je definován jako tenzor 2. řádu ve tvaru

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \text{grad } \vec{A} = \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}). \quad (\text{A.6})$$

Protože se jedná o tzv. *tenzorový součin*, kdy se jednotlivé vektory báze násobí jako matice, z nichž první je sloupcová a druhá řádková, je třeba pro určení prvků tenzoru zachovat jejich pořadí. Pomocí maticového formalismu můžeme tenzor gradientu vektorového pole zapsat jako

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \begin{matrix} & \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{x}} & \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ \hat{\mathbf{y}} & \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \\ \hat{\mathbf{z}} & \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \end{matrix}. \quad (\text{A.7})$$

- *Divergence* vektoru (vektorového pole)  $\vec{A}(x, y, z)$  je definována jako skalár (skalární pole)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{A.8})$$

Divergenci vektoru lze v *ortogonálních* soustavách rovněž chápat jako stopu tenzoru gradientu vektorového pole. V obecných *ortogonálních* souřadnicích může být zapsána ve formě

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (h^k A^k) + \Gamma_{jl}^k h^l A^l \right] \delta_j^k = \frac{\partial}{\partial x_j} (h^j A^j) + \Gamma_{jl}^j h^l A^l. \quad (\text{A.9})$$

S využitím rovnice (2.53) lze tento výraz přepsat rovněž do tvaru

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) - \Gamma_{jk}^l h_l A_l \right] \delta_j^k = \frac{\partial}{\partial x_j} (h_j A_j) - \Gamma_{jj}^l h_l A_l. \quad (\text{A.10})$$



Členy  $h_i$  jsou tzv. *Laméovy koeficienty* (často také nazývané *škálovací faktory*, nezaměňovat se stejnojmennými Laméovými koeficienty v mechanice kontinua), pojmenované po francouzském matematikovi Gabrieli Lamé, kde v příslušném metrickém tenzoru platí

$$h_i h_i = g_{ii}, \quad h^i h^i = g^{ii} \quad (\text{A.11})$$

(proto nyní uvažujeme jen ortogonální soustavy, jejichž metrické tenzory mají nenulové prvky pouze na hlavní diagonále). Výraz  $\Gamma_{jk}^l$  je tzv. *Christoffelův symbol* (pojmenovaný po německém matematikovi a fyzikovi Elwini Bruno Christoffelovi), definující tzv. *členy křivosti* v křivočarých souřadných soustavách,

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} g^{lm} \left( \frac{\partial g_{km}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_m} \right), \quad (\text{A.12})$$

kde indexy  $l, m$  jsou tzv. volné indexy, které mohou kdykoli nabývat kterékoli z hodnot 1, 2, 3. Explicitní výraz pro divergenci vektoru v obecné ortogonální soustavě lze zapsat formou

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_i h_j h_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (h_j h_k A_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (h_k h_i A_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (h_i h_j A_k) \right], \quad (\text{A.13})$$

Ta je zcela ekvivalentní kompaktnější formě zápisu,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_j h_k A_i) \Big|_{i \neq j \neq k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} h^i A^i). \quad (\text{A.14})$$

Složky  $h^i A^i$  (v literatuře se většinou zkráceně uvádí pouze  $A^i$ ) vektoru  $\vec{A}$  odpovídají (viz rovnice (2.53))  $h^i A^i = g^{ij} (h_j A_j)$  a  $g$  je determinant metrického tenzoru, který je identický s druhou mocninou příslušného Jakobiánu souřadnicové transformace. Platí tedy

$$\sqrt{|\det g_{ij}|} = J, \quad \sqrt{|\det g^{ij}|} = J^{-1}. \quad (\text{A.15})$$

Obecně také platí, že divergencí *tenzoru* řádu  $n$  je tenzor řádu  $n - 1$ , divergencí tenzoru druhého řádu tak bude vektor. Kompaktní forma zápisu divergence *tenzoru 2. řádu* bude mít tvar

$$\nabla_j A^{ij} = A_i, \quad (\text{A.16})$$

její explicitní zápis v kartézském systému (prakticky se jedná o maticové násobení vektoru s transponovanou maticí; při skalárním součinu dvou vektorů se také jedná o maticové násobení dvou vektorů, kdy druhý z vektorů je transponovaný, tedy sloupcový) bude vypadat

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot A_{ij} &= \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{matrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}^T \end{matrix} = \\ & \hat{\mathbf{x}} \left( \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left( \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

- *Rotací* vektoru (vektorového pole)  $\vec{A}(x, y, z)$  v kartézské soustavě nazýváme vektor

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{\mathbf{x}} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (\text{A.18})$$

Obecný výraz pro vektor rotace  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  vektoru  $\vec{A}$  v libovolné *ortogonální* souřadné soustavě lze definovat způsobem

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} [\nabla_j (h_k A_k)] \hat{\mathbf{x}}_i = \epsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) - \Gamma_{jk}^l h_l A_l \right] \hat{\mathbf{x}}_i. \quad (\text{A.19})$$

V rovnici (A.19) výraz  $\epsilon_{ijk}$  (kde všechny tři indexy  $i, j, k$  mohou odpovídat postupně všem třem souřadnicovým směrům) odpovídá antisymetrickému, (tzv. *Levi-Civitovu*, viz rovnice (2.44)) symbolu, který nabývá hodnoty 1 pro sudé permutace indexů,  $-1$  pro liché permutace indexů.

Díky symetrii indexů ve složkách vektoru rotace a díky úplné antisymetričnosti Levi-Civitova  $\epsilon$ -symbolu, se výrazy  $\Gamma_{jk}^l A_l$  v rovnici (A.19) vyruší, celý výraz se tak zjednoduší do podoby

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) \right] \hat{\mathbf{x}}_i. \quad (\text{A.20})$$

V kartézské soustavě, kde  $h_1, h_2, h_3 = 1$ , bude rovnice (A.20) odpovídat rovnici (A.18). Zapišeme-li vektor rotace znovu po složkách, dostaneme

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (\text{A.21})$$

- *Laplacián* (Laplaceův operátor) je definován jako divergence gradientu, tedy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  (používá se pro něj symbol  $\Delta$ ), jedná se tedy o skalární operátor, který může působit na skalární funkce, vektory (po jednotlivých složkách), tenzory (po jednotlivých prvcích), aniž by měnil jejich *řád* (t.j. skalár zůstává skalárem, vektor vektorem, atd.). V kartézské soustavě má laplacián zcela jednoduchý tvar: analogicky k rovnici (A.8), kde složky vektoru  $\vec{A}$  nahradíme složkami vektoru gradientu, můžeme psát

$$\begin{aligned} \Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div grad} &= \hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \hat{\mathbf{z}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

### A.1.2 Plochy, objemy

Označme  $S_k$  plochu s konstantní hodnotou souřadnice  $x_k$ , ohraničenou souřadnicovými křivkami  $x_i, x_i + \Delta x_i, x_j, x_j + \Delta x_j$ . V kartézské soustavě půjde např. o plochu s konstantní hodnotou  $z = z_0$ , ohraničenou přímkami  $x = x_0, x = x_0 + \Delta x, y = y_0, y = y_0 + \Delta y$ . Výpočet velikosti takové plochy je zde samozřejmě zcela triviální, půjde o obdélník (čtverec) s obsahem  $\Delta x \Delta y$ . Obecný vztah pro výpočet velikosti takové plochy bude mít ovšem tvar

$$S_k = \int_{x_{0i}}^{x_{0i} + \Delta x_i} \int_{x_{0j}}^{x_{0j} + \Delta x_j} J'_{ij} dx_i dx_j, \quad (\text{A.23})$$

kde  $J'_{ij}$  je druhá odmocnina absolutní hodnoty determinantu příslušné submatice metrického tenzoru. V uvedeném případě by se jednalo o determinant  $J'_{ij} = \sqrt{|g_{ii}g_{jj} - g_{ij}g_{ji}|}$  (v případě ortogonálního souřadného systému bude determinant uvedených submatic sám o sobě kladný, pokud použijeme sudé permutace indexů a nediagonální členy dané submatice budou nulové). Integrand rovnice (A.23) definujeme jako *elementární plochu*  $dS_k = J'_{ij} dx_i dx_j$ . V kartézské soustavě budou zjevně determinanty všech tří submatic  $J'_{ij} = 1$ . Dále, označíme-li  $V$  objem prostoru, vymezeného plochami s konstantními souřadnicemi  $x_i, x_i + \Delta x_i, x_j, x_j + \Delta x_j, x_k, x_k + \Delta x_k$ , obecný vztah pro výpočet velikosti takového objemu bude mít tvar

$$V = \int_{x_{0i}}^{x_{0i} + \Delta x_i} \int_{x_{0j}}^{x_{0j} + \Delta x_j} \int_{x_{0k}}^{x_{0k} + \Delta x_k} J dx_i dx_j dx_k, \quad (\text{A.24})$$

kde  $J$  je druhá odmocnina absolutní hodnoty determinantu metrického tenzoru (Jakobián - viz rovnice (A.15)). Integrand rovnice (A.24) vyjadřuje *elementární objem*  $dV = J dx_i dx_j dx_k$ . V kartézské soustavě opět  $J = 1$ , vymezený prostor bude mít tvar pravoúhlého kvádrů o objemu  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .

### A.1.3 Vektory polohy, rychlosti a zrychlení

V kartézské soustavě je zápis vektorů velmi jednoduchý, polohový vektor  $\vec{r}$ , vektor rychlosti  $\vec{v}$  a vektor zrychlení  $\vec{a}$  budou mít postupně tvar,

$$\vec{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} = (x, y, z), \quad (\text{A.25})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{\mathbf{x}} + \dot{y}\hat{\mathbf{y}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}} = (v_x, v_y, v_z), \quad (\text{A.26})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{\mathbf{x}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{y}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{z}} = a_x\hat{\mathbf{x}} + a_y\hat{\mathbf{y}} + a_z\hat{\mathbf{z}} = (a_x, a_y, a_z), \quad (\text{A.27})$$

kde  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\dot{y} = dy/dt$  a  $\dot{z} = dz/dt$ .

## A.2 Válcová soustava

Válcová soustava může být vhodná pro popis celé řady osově symetrických a rotačních jevů, např. elektrického a magnetického pole okolo přímých vodičů, vírů v tekutinách, galaxií, hvězdných disků, atd. Souřadnicové směry jsou:  $\rho$  - vzdálenost od osy válcové symetrie,  $\phi$  - azimutální úhel,  $z$  - výška. Převod z válcové do kartézské soustavy je dán vztahy<sup>2</sup>

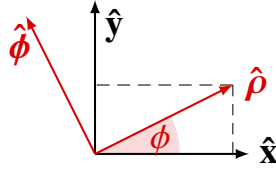
$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (\text{A.28})$$

Pro zpětnou transformaci z kartézské do válcové soustavy platí<sup>3</sup>

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x} \text{ pro } x \neq 0, \text{ případně } \phi = \arccos \frac{x}{\rho}, \quad z = z. \quad (\text{A.29})$$

<sup>2</sup>V dalším popisu budeme rozlišovat  $\rho$  pro radiální válcovou souřadnici,  $r$  pro radiální kulovou souřadnici. V případě jednotkových bázových vektorů budeme rozlišovat  $\hat{\rho}$  pro válcovou souřadnici,  $\hat{r}$  pro kulovou souřadnici. Nekonstantnost jednotkových vektorů válcové i kulové báze je rovněž zvýrazněna skloněným písmem, konstantní bázové vektory jsou zapsány stojatými písmeny.

<sup>3</sup>Pro vyčerpávající popis vztahu pro azimutální úhel  $\phi$  doporučuji např.: Musilová & Musilová (2006).



Obrázek A.1: Schéma vzájemné transformace jednotkových bázových vektorů kartézské a válcové souřadné soustavy (viz rovnice (A.30) a (A.33)).

Vztah pro azimutální úhel  $\phi$  je strukturovanější, výraz uvedený v rovnici (A.29) platí jednoznačně pouze pro 1. kvadrant,  $\phi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ . Pro ostatní kvadranty je třeba vždy zvažít znaménka souřadnic  $x$  a  $y$ , pokud např.  $x < 0 \wedge y \geq 0$ , jedná se o 2. kvadrant, atd.

Jednotkové vektory válcové báze budou mít v kartézské soustavě tvar (viz sčítání vektorů)

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad \hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad \hat{z} = (0, 0, 1). \quad (\text{A.30})$$

Jediným konstantním bázovým vektorem bude vektor  $\hat{z}$ , ostatní bázové vektory mění směr v závislosti na úhlu  $\phi$ . Nenulové derivace bázových vektorů ve směru souřadnicových os a nenulové časové derivace bázových vektorů budou (z rovnice (A.30))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0) = \hat{\phi}, & \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{\phi} \dot{\phi}, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} &= (-\cos \phi, -\sin \phi, 0) = -\hat{\rho}, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\hat{\rho} \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Pokud budeme derivovat jednotkové vektory válcové báze ve směru kartézských souřadnicových os, potom např. ve směru osy  $x$  dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} &= \frac{\partial (\cos \phi, \sin \phi, 0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right) = -\hat{\phi} \frac{\sin \phi}{\rho}, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} &= \frac{\partial (-\sin \phi, \cos \phi, 0)}{\partial x} = \hat{\rho} \frac{\sin \phi}{\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Obdobně získáme derivace ve všech ostatních směrech. Zpětná transformace jednotkových bázových vektorů (viz rovnice (A.30)) bude

$$\hat{x} = \hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi, \quad \hat{y} = \hat{\rho} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi, \quad \hat{z} = \hat{z}. \quad (\text{A.33})$$

Metrickou formu pro válcovou soustavu snadno odvodíme, uvědomíme-li si, že vzdálenost dvou bodů v prostoru musí být nezávislá na volbě souřadného systému, tedy  $ds^2$  z rovnice (A.2) se musí pro všechny souřadné soustavy rovnat. Z rovnice (A.28) dostaneme,

$$dx = d\rho \cos \phi - \rho \sin \phi d\phi, \quad dy = d\rho \sin \phi + \rho \cos \phi d\phi, \quad dz = dz, \quad (\text{A.34})$$

dosazením do rovnice (A.2) dostáváme válcovou metrickou formu

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (\text{A.35})$$

můžeme tedy napsat kovariantní ( $g_{ij}$ ) i kontravariantní ( $g^{ij}$ ) metrický tenzor a také (viz rovnice (A.11)) příslušné *Laméovy koeficienty* válcové souřadné soustavy,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_\rho = 1, h_\phi = \rho, h_z = 1. \quad (\text{A.36})$$

Nenulové *Christoffelovy symboly* válcové metriky z rovnice (A.12) budou

$$\Gamma_{\phi\phi}^\rho = -\rho, \quad \Gamma_{\phi\rho}^\phi = \frac{1}{\rho}. \quad (\text{A.37})$$

### A.2.1 Diferenciální operátory

- *Gradient* skalární funkce  $f = f(\rho, \phi, z)$  ve válcové soustavě odvodíme z rovnice (A.5), kam za jednotkové bázové vektory dosadíme výrazy z rovnice (A.33) a jednotlivé složky gradientu rozvineme řetězovým pravidlem pro derivace. Po rozepsání dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= (\hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi) \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \\ &+ (\hat{\rho} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi) \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Jednotlivé parciální derivace vypočítáme z rovnice (A.29),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \phi}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \phi}{\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Po dosazení a úpravě dostaneme výslednou podobu gradientu

$$\vec{\nabla} f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z} = \left( \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (\text{A.40})$$

Nyní již za jednotkové vektory válcové báze nedosazujeme jejich složky z rovnice (A.30), kde jsme je „viděli“ ze soustavy kartézské. Analogicky k rovnici (A.6) (tenzorový součin) a s použitím rovnice (A.40) je potom *gradient vektorového pole*  $\vec{A}(\rho, \phi, z)$  ve válcové soustavě definován jako tenzor 2. řádu ve tvaru

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) (A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{\mathbf{z}}). \quad (\text{A.41})$$

Na rozdíl od kartézské soustavy zde již jednotkové bázové vektory  $\hat{\rho}$  a  $\hat{\phi}$  nejsou konstantní, operátor gradientu tedy fakticky působí i na ně (jejich derivace - viz rovnice (A.31)). Pomocí maticového formalismu můžeme tenzor gradientu vektorového pole ve válcové soustavě zapsat

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\rho} \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right) & \hat{\rho} \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) & \hat{\rho} \left( \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \\ \hat{\phi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{\rho} \right) & \hat{\phi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_\rho}{\rho} \right) & \hat{\phi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \right) \\ \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \right) & \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) & \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Stejného výsledku docílíme v tomto případě i jiným postupem, např. s použitím formalismu *Christoffelových symbolů* (viz rovnice (A.37)), kde, na rozdíl od rovnice (A.19), zapíšeme

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{h_j h_k} [\nabla_j (h_k A_k)] \hat{\mathbf{x}}_j \hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{h_j h_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) - \Gamma_{jk}^l h_l A_l \right] \hat{\mathbf{x}}_j \hat{\mathbf{x}}_k. \quad (\text{A.43})$$

Postup podle rovnice (A.43) lze ovšem použít pouze pro ortogonální souřadné soustavy, postup podle rovnice (A.41) platí zcela obecně.

- *Divergence* vektoru (vektorového pole)  $\vec{A}(\rho, \phi, z)$  je ve válcových souřadnicích ve smyslu rovnice (A.41), analogicky k rovnici (A.8), definována jako skalár (skalární pole)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \left( \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial A_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Porovnáním s rovnicí (A.42) opět vidíme, že divergence je stopou tenzoru gradientu vektorového pole. Divergencí *tenzoru 2. řádu*, popsaného maticí  $3 \times 3$ , bude vektor (tenzor 1. řádu). Explicitní formu zápisu divergence *tenzoru 2. řádu* ve válcových souřadnicích (srovnej s rovnicí (A.17) zde již uvádět nebudu, zájemce odkazuji na literaturu, např. Abramowitz & Stegun (1972), Young (1993), Arfken & Weber (2005), atd.

- *Rotaci* vektoru (vektorového pole)  $\vec{A}(\rho, \phi, z)$  ve válcové soustavě, kde  $h_\rho = 1$ ,  $h_\phi = \rho$ ,  $h_z = 1$ , odvodíme podle již uvedeného vztahu (A.20). Dostáváme

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.45})$$

- *Laplacián* odvodíme (viz rovnice (A.22)), nahradíme-li v rovnici divergence (A.44) složky vektoru  $\vec{A}$  odpovídajícími složkami vektoru gradientu z rovnice (A.40). Dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \hat{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \hat{\phi} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \hat{\mathbf{z}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

## A.2.2 Plochy, objemy

Stejně jako v kartézské soustavě označme  $S_k$  plochu s konstantní hodnotou souřadnice  $x_k$ , ohraničenou souřadnicovými křivkami  $x_i, x_i + \Delta x_i, x_j, x_j + \Delta x_j$ . Ve válcové soustavě půjde např. o plochu s konstantní hodnotou  $z = z_0$ , ohraničenou polopřímkami  $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$  a křivkami (kružnicemi)  $\rho = \rho_1, \rho = \rho_2$ . Výpočet velikosti takové plochy již není tak zcela triviální, jako v kartézské soustavě, půjde o průnik kruhové výseče s plochou mezi dvěma soustřednými kružnicemi. Pokud budeme uvažovat jinou plochu, např. s konstantní souřadnicí  $\rho = \rho_0$ , ohraničenou souřadnicovými plochami  $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2, z = z_1, z = z_2$ , půjde o část

válcové plochy. Při výpočtech velikostí těchto ploch vyjdeme z rovnic (A.23) a (A.36), tedy,

$$\begin{aligned}
S_\rho &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{g_{\phi\phi} g_{zz}} d\phi dz = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} \rho d\phi dz = \rho \Delta\phi \Delta z, \\
S_\phi &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{g_{zz} g_{\rho\rho}} dz d\rho = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} dz d\rho = \Delta z \Delta\rho, \\
S_z &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{g_{\rho\rho} g_{\phi\phi}} d\rho d\phi = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho d\rho d\phi = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} \Delta\phi.
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Ve válcovém souřadném systému budou nediagonální členy submatic  $J'_{ij}$  (viz rovnice (A.23)) nulové. Označíme-li  $V$  objem prostoru, vymezeného souřadnicovými plochami s konstantními souřadnicemi  $\rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2, z_1, z_2$ , výpočet velikosti tohoto objemu bude mít dle rovnice (A.24) tvar

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} \rho d\rho d\phi dz = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} \Delta\phi \Delta z. \tag{A.48}$$

V ortogonálním válcovém souřadném systému můžeme Jakobián  $J$  stanovit jako  $\sqrt{g_{\rho\rho} g_{\phi\phi} g_{zz}} = \rho$ . Obdobným způsobem můžeme při odpovídajícím stanovení integračních mezí vypočítat v daném souřadném systému velikost jakéhokoli jiného, složitějšího útvaru.

### A.2.3 Vektory polohy, rychlosti a zrychlení

Při popisu vektorů ve válcové soustavě vyjdeme z jejich popisu v soustavě kartézské, zahrneme všechny rovnice pro derivace jednotkových vektorů i vektorových složek (rovnice (A.28)-(A.33)). Polohový vektor a vektor rychlosti ve válcové soustavě budou

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\rho\hat{\rho} + z\hat{z})}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} + \dot{z}\hat{z} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}. \tag{A.49}$$

Tento tvar lze očekávat, uvědomíme-li si, že polohový vektor vždy vychází z počátku souřadnic. Vektory rychlosti a zrychlení jsou zároveň definovány jako

$$\vec{v} = v_\rho\hat{\rho} + v_\phi\hat{\phi} + v_z\hat{z}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_\rho\hat{\rho} + a_\phi\hat{\phi} + a_z\hat{z}. \tag{A.50}$$

Derivováním rovnice (A.49) podle času dostáváme jednotlivé složky vektoru zrychlení

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = \frac{dv_\rho}{dt} - \rho\dot{\phi}^2, \quad a_\phi = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = \frac{dv_\phi}{dt} + \dot{\rho}\dot{\phi}, \quad a_z = \ddot{z} = \frac{dv_z}{dt}. \tag{A.51}$$

Protože  $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  (řetězové pravidlo pro derivování, v tomto případě pro parciální derivace  $\vec{v} = \vec{v}(t, \rho, \phi, z)$ ), potom zrychlení, vyjádřené pomocí složek vektoru rychlosti bude

$$a_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\rho}{\partial z}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\rho} - \frac{v_\phi^2}{\rho}, \quad (\text{A.52})$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\phi} + \frac{v_\rho v_\phi}{\rho}, \quad (\text{A.53})$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_z}. \quad (\text{A.54})$$

### A.3 Kulová soustava

Kulová soustava je vhodná pro popis jevů s centrální symetrií, jako jsou např. fyzikální pole, tvořená hmotnými body, astronomickými tělesy, atd. Mimo jiné se implicitně používá také v kartografii, kde soustava poledníků a rovnoběžek je vlastně soustava azimutálních a sférických úhlových souřadnic (viz dále). Zde je ovšem sférický úhel počítán jiným způsobem, v „matematické konvenci“ roste od 0 do  $\pi$ , v „kartografické konvenci“ roste od  $-\pi/2$  do  $\pi/2$ , navíc v opačném smyslu vůči směru nárůstu azimutální souřadnice.

Souřadnicové směry jsou:  $r$  - vzdálenost od středu kulové symetrie,  $\theta$  - sférický úhel,  $\phi$  - azimutální úhel. Převod z kulové do kartézské soustavy je dán vztahy

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (\text{A.55})$$

Pro zpětnou transformaci z kartézské do kulové soustavy platí<sup>4</sup>

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (\text{A.56})$$

Analogicky k rovnici (A.30) budou mít jednotkové vektory kulové báze v kartézské soustavě tvar (viz pravidla pro sčítání vektorů)

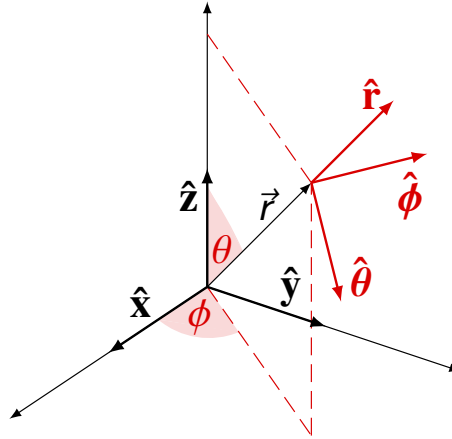
$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \\ \hat{\theta} &= \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \\ \hat{\phi} &= -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0). \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

V kulové soustavě není žádný z vektorů báze konstantní. Derivace bázových vektorů ve směru jednotlivých souřadnicových os budou (z rovnice (A.57))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= \hat{\theta}, & \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} &= \hat{\phi} \sin \theta, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{r}, & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} &= \hat{\phi} \cos \theta, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} &= -\hat{r} \sin \theta - \hat{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

<sup>4</sup>Uvedené vztahy pro  $\theta$  a  $\phi$  neuvádí jednoznačné výrazy pro všechny kvadranty, viz rovnice (A.29). Pro exaktní popis doporučuji např.: Musilová & Musilová (2006).





Obrázek A.2: Vzájemná poloha jednotkových bázových vektorů kartézské a kulové souřadné soustavy (viz rovnice (A.57) a (A.60)).

Časové derivace bázových vektorů budou

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{r}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{\theta} \dot{\theta} + \hat{\phi} \dot{\phi} \sin \theta, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\hat{r} \dot{\theta} + \hat{\phi} \dot{\phi} \cos \theta, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\hat{r} \dot{\phi} \sin \theta - \hat{\theta} \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{A.59}$$

Zpětnou transformací jednotkových bázových vektorů (viz rovnice (A.57)) dostáváme

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{r} \sin \theta \cos \phi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi, \\ \hat{y} &= \hat{r} \sin \theta \sin \phi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi, \\ \hat{z} &= \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta.\end{aligned}\tag{A.60}$$

Metrickou formu pro kulovou soustavu dostaneme diferencováním rovnice (A.55),

$$\begin{aligned}dx &= dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi, \\ dy &= dr \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi, \\ dz &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta,\end{aligned}\tag{A.61}$$

dosazením do rovnice (A.2) dostáváme kulovou metrickou formu

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.\tag{A.62}$$

Kovariantní ( $g_{ij}$ ) i kontravariantní ( $g^{ij}$ ) metrický tenzor a také (viz rovnice (A.11)) příslušné *Laméovy koeficienty* kulové souřadné soustavy budou,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta.\tag{A.63}$$

Podle rovnice (A.12) odvodíme nenulové *Christoffelovy symboly* kulové metriky,

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \Gamma_{\theta r}^\theta (\Gamma_{r\theta}^\theta) = \Gamma_{\phi r}^\phi (\Gamma_{r\phi}^\phi) = \frac{1}{r}, \Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta, \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{\phi\theta}^\phi (\Gamma_{\theta\phi}^\phi) = \cotg \theta. \quad (\text{A.64})$$

### A.3.1 Diferenciální operátory

- *Gradient* skalární funkce  $f = f(\rho, \phi, z)$  v kulové soustavě odvodíme podle rovnice (A.5), kam za jednotkové bázové vektory dosadíme výrazy z rovnice (A.60) a jednotlivé složky gradientu rozvineme řetězovým pravidlem pro derivace. Po rozepsání dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \left( \hat{r} \sin \theta \cos \phi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi \right) \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \\ &+ \left( \hat{r} \sin \theta \sin \phi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi \right) \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \\ &+ \left( \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta \right) \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Jednotlivé parciální derivace vypočítáme z rovnice (A.56),

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \theta \cos \phi, & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \theta \sin \phi, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Po dosazení a úpravě dostaneme výslednou podobu gradientu

$$\vec{\nabla} f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right). \quad (\text{A.67})$$

Opět zde za jednotkové vektory kulové báze nedosazujeme jejich složky z rovnice (A.57), kde jsme je „viděli“ ze soustavy kartézské. Analogicky k rovnici (A.6) (tenzorový součin) a s použitím rovnice (A.67) je potom *gradient vektorového pole*  $\vec{A}(r, \theta, \phi)$  v kulové soustavě definován jako tenzor 2. řádu ve tvaru

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \left( \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}). \quad (\text{A.68})$$

Na rozdíl od válcové soustavy zde operátor gradientu již působí na všechny jednotkové bázové vektory (jejich derivace - viz rovnice (A.58)). Pomocí maticového formalismu

můžeme tenzor gradientu vektorového pole v kulové soustavě zapsat

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \begin{matrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial r} & \frac{\partial A_\theta}{\partial r} & \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r} \cot \theta & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta}{r} \cot \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.69})$$

Stejného výsledku docílíme i v tomto případě např. s použitím formalismu *Christoffelových symbolů* (viz rovnice (A.37)) dle obecného vztahu (A.43), tento postup lze ovšem použít pouze pro ortogonální souřadné soustavy, zatímco postup podle rovnice (A.68) platí zcela obecně.

- *Divergence* vektoru (vektorového pole)  $\vec{A}(r, \theta, \phi)$  je v kulových souřadnicích ve smyslu rovnice (A.68), analogicky k rovnici (A.8), definována jako skalár (skalární pole)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \hat{r} \cdot \hat{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} \right) + \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta}{r} \cot \theta \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Porovnáním s rovnicí (A.69) opět vidíme, že divergence je stopou tenzoru gradientu vektorového pole.

- *Rotaci* vektoru (vektorového pole)  $\vec{A}(r, \theta, \phi)$  v kulové soustavě, kde  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$ ,  $h_\phi = r \sin \theta$ , odvodíme podle rovnice (A.20), v tomto případě dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

- *Laplacián* odvodíme (viz rovnice (A.22)), nahradíme-li v rovnici divergence (A.70) složky vektoru  $\vec{A}$  odpovídajícími složkami vektoru gradientu z rovnice (A.67), výsledný tvar, zapsaný v kompaktní formě bude

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (\text{A.72})$$

### A.3.2 Plochy, objemy

Stejně jako v předchozích soustavách označme  $S_k$  plochu s konstantní hodnotou souřadnice  $x_k$ , ohraničenou souřadnicovými křivkami  $x_i, x_i + \Delta x_i, x_j, x_j + \Delta x_j$ . V kulové soustavě půjde např. o plochu s konstantní hodnotou  $r = r_0$ , ohraničenou dvojicí křivek (kružnicemi) se souřadnicemi  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  a  $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$ . Výpočet velikosti takové plochy již zde není vůbec triviální, půjde o část plochy s dvojnásobnou křivostí, ohraničenou dvěma rozbíhajícími se souřadnicovými plochami (v nichž leží křivky se souřadnicemi  $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$ ) a dvěma

kružnicemi se středy na společné ose, avšak ležícími v různých rovinách, kolmých na tuto osu (křivky se souřadnicemi  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ ). Pokud budeme uvažovat jinou plochu, např. s konstantní souřadnicí  $\phi = \phi_0$ , ohraničenou souřadnicovými plochami  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, r = r_1, r = r_2$ , půjde o část kruhové výseče, omezené dvěma soustřednými kružnicemi. Při výpočtech velikostí těchto ploch vyjdeme opět z rovnice (A.23) a z rovnice (A.63), tedy

$$\begin{aligned} S_r &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} d\theta d\phi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = r^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \Delta\phi, \\ S_\theta &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{\phi\phi} g_{rr}} d\phi dr = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r \sin \theta d\phi dr = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \sin \theta \Delta\phi, \\ S_\phi &= \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta}} dr d\theta = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r dr d\theta = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \Delta\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

V kulovém, tedy opět ortogonálním souřadném systému, budou všechny nediagonální členy submatic  $J'_{ij}$  (viz rovnice (A.23)) nulové. Označme tradičně  $V$  objem prostoru, vymezeného souřadnicovými plochami s konstantními souřadnicemi  $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$ , tvar takového útvaru odpovídá v tomto případě průniku jehlanu s koncentrickou sférickou mezivrstvou (mezikoulím), vztah pro výpočet velikosti takového objemu bude mít dle rovnice (A.24) tvar

$$V = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \Delta\phi. \quad (\text{A.74})$$

V ortogonálním kulovém souřadném systému obdobně jako ve válcovém systému můžeme Jakobian  $J$  stanovit jako  $\sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} = r^2 \sin \theta$ . Popsaná metoda umožní při odpovídajícím stanovení integračních mezí vypočítat v kulovém souřadném systému velikosti jakkoli složitějších útvarů.

### A.3.3 Vektory polohy, rychlosti a zrychlení

Při popisu vektorů v kulové soustavě vyjdeme z jejich základního popisu v soustavě kartézské, zahrneme všechny rovnice pro derivace jednotkových vektorů i složek vektorů (rovnice (A.55)-(A.60)). Polohový vektor a vektor rychlosti v kulové soustavě budou

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\hat{r}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r(\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta). \quad (\text{A.75})$$

Tento závěr lze opět očekávat, uvědomíme-li si, že polohový vektor vychází z počátku souřadnic. Vektory rychlosti a zrychlení jsou zároveň definovány jako

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} + v_\phi\hat{\phi}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_\phi\hat{\phi}. \quad (\text{A.76})$$

Derivováním rovnice (A.75) podle času dostáváme jednotlivé složky vektoru zrychlení v kulové souřadné soustavě,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = \frac{dv_r}{dt} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{A.77})$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{dv_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (\text{A.78})$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta = \frac{dv_\phi}{dt} + \dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta. \quad (\text{A.79})$$

Protože  $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  (řetězové pravidlo pro derivování, v tomto případě pro parciální derivace  $\vec{v} = \vec{v}(t, r, \theta, \phi)$ ), potom zrychlení, vyjádřené v kulové souřadné soustavě pomocí složek vektoru rychlosti bude

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + \underbrace{v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_r} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}, \quad (\text{A.80})$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \underbrace{v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r}, \quad (\text{A.81})$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \underbrace{v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r}. \quad (\text{A.82})$$

Bylo by jistě možné popsat mnohem více podrobností, např. operace s vektory a tenzory v rámci popisovaných soustav, atd., zde jsou ukázány alespoň některé postupy spíše z praktického pohledu. V dalších odstavcích ukážeme stručně alespoň jednu neortogonální souřadnou soustavu, jejíž popis byl do jisté míry vyvolán tvorbou numerické výpočetní sítě pro hydrodynamické modelování konkrétního fyzikálního jevu.

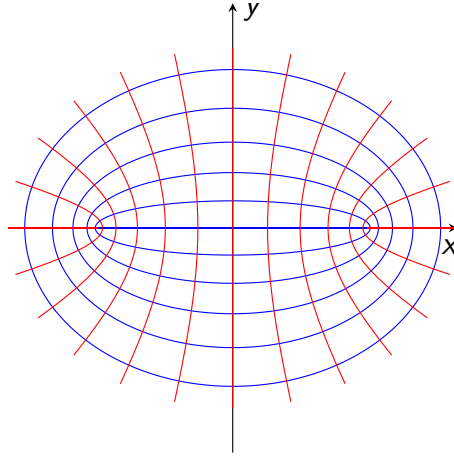
## A.4 Eliptická soustava

Dále stručně uvedeme tři specifické ortogonální soustavy, které mohou souviset s předchozí tematikou nebo s uvedenými příklady (případně mohou mít zajímavé fyzikální uplatnění) - eliptickou, parabolickou, a „anuloidovou“. Dvourozměrná eliptická souřadná soustava (viz obrázek A.3) je definována dvěma třídami souřadnicových křivek s konstantními parametry  $\sigma \in \langle 0, \infty \rangle$  a  $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$  (toto značení není zcela ustálené, v různých literaturách může být různé), se dvěma společnými ohnisky v bodech  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$ . V trojrozměrné verzi přibude ještě (válcová symetrie vzhledem k ose  $z$ ) azimutální úhlový parametr  $\phi$ .

Transformační rovnice z kartézské do eliptické soustavy v trojrozměrném případě budou

$$x = a \cosh \sigma \cos \tau \cos \phi, \quad y = a \cosh \sigma \cos \tau \sin \phi, \quad z = a \sinh \sigma \sin \tau. \quad (\text{A.83})$$

Z definice hyperbolického sinu a kosinu (1.15),(1.16) a z exponenciálního vyjádření sinu a kosinu (viz Eulerovy vztahy v příkladu 8.5) snadno odvodíme zpětné transformační vztahy, které ovšem budou mít (v pravotočivém pořadí proměnných  $\sigma, \phi, \tau$ ) komplexní tvar (rovinu



Obrázek A.3: Schéma dvourozměrné eliptické soustavy v rovině  $x, y$ , společná ohniska jsou v bodech  $(-a, 0), (a, 0)$ . Modře vyznačené jsou eliptické křivky s konstantním parametrem  $\sigma$ , s posloupností (od nejužších k nejširším)  $\sigma = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ , červeně vyznačené jsou hyperbolické křivky s konstantním parametrem  $\tau$ , s posloupností (zprava do leva) od  $\tau = 0$  do  $\tau = \pi$  s intervalem  $\pi/12$ . V trojrozměrné verzi (viz popis) potom vyobrazenému směru  $y$  odpovídá směr  $z$ .

$\rho$ - $z$ , kde  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , si můžeme představit jako Gaussovou rovinu),

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{argcosh} \frac{\rho + iz}{a} + \operatorname{argcosh} \frac{\rho - iz}{a} \right], & \phi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ \tau &= \frac{1}{2i} \left[ \operatorname{argcosh} \frac{\rho + iz}{a} - \operatorname{argcosh} \frac{\rho - iz}{a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

Metrická forma takové eliptické soustavy bude mít tvar

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2 [(\cosh^2 \sigma \sin^2 \tau + \sinh^2 \sigma \cos^2 \tau) (d\sigma^2 + d\tau^2) + \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau d\phi^2] = \\ &= a^2 [(\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) (d\sigma^2 + d\tau^2) + \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau d\phi^2] = \\ &= a^2 [(\cosh^2 \sigma - \cos^2 \tau) (d\sigma^2 + d\tau^2) + \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau d\phi^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Kovariantní metrický tenzor  $g_{ij}$  a příslušné *Laméovy koeficienty* eliptické souřadné soustavy v pořadí směrů  $\sigma, \phi, \tau$  budou,

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} a^2 (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau & 0 \\ 0 & 0 & a^2 (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.86})$$

$$h_\sigma = a \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau}, \quad h_\phi = a \cosh \sigma \cos \tau, \quad h_\tau = a \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau}. \quad (\text{A.87})$$

Kontravariantní metrický tenzor  $g^{ij}$  diagonální metriky bude tenzor s převrácenými hodnotami prvků na hlavní diagonále. Jakobián souřadnicové transformace z kartézské do eliptické soustavy bude

$$J = a^3 (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \cosh \sigma \cos \tau = a^3 (\cosh^2 \sigma - \cos^2 \tau) \cosh \sigma \cos \tau, \quad (\text{A.88})$$

jakobiánem zpětné transformace bude výraz  $J^{-1}$ . Nenulové *Christoffelovy symboly* eliptické metriky (viz rovnice A.12) budou,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\sigma\sigma}^{\sigma} = \Gamma_{\sigma\tau}^{\tau}(\Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma}) &= \frac{\sinh 2\sigma}{2(\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau)}, \Gamma_{\tau\tau}^{\tau} = \Gamma_{\sigma\tau}^{\sigma}(\Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma}) = \frac{\sin 2\tau}{2(\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau)}, \Gamma_{\sigma\phi}^{\phi}(\Gamma_{\phi\sigma}^{\sigma}) = \tanh \sigma, \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\sigma} &= -\frac{\sinh 2\sigma \cos^2 \tau}{2(\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau)}, \Gamma_{\phi\phi}^{\tau} = \frac{\cosh^2 \sigma \sin 2\tau}{2(\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau)}, \Gamma_{\phi\tau}^{\phi}(\Gamma_{\tau\phi}^{\phi}) = -\operatorname{tg} \tau.\end{aligned}\quad (\text{A.89})$$

Diferenciální operátory gradientu skalární funkce, divergence a rotace vektoru a laplaciánu budou mít (s použitím formalismu Laméových koeficientů pro ortogonální soustavy a také rovnic A.14 a A.20) v této eliptické souřadné soustavě postupně tvar,

$$\vec{\nabla} f = \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}}{a\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau}}, \frac{\frac{\partial f}{\partial \phi}}{a \cosh \sigma \cos \tau}, \frac{\frac{\partial f}{\partial \tau}}{a\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau}} \right), \quad (\text{A.90})$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \cosh \sigma A_{\sigma} \right)}{a(\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \cosh \sigma} + \\ &+ \frac{\frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi}}{a \cosh \sigma \cos \tau} + \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \cos \tau A_{\tau} \right)}{a(\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \cos \tau},\end{aligned}\quad (\text{A.91})$$

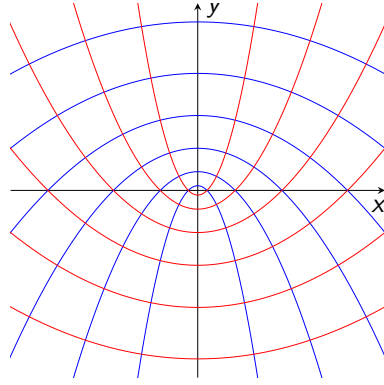
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{\cosh \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} (\cos \tau A_{\phi}) - \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \frac{\partial A_{\tau}}{\partial \phi}}{a\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \cosh \sigma \cos \tau} \hat{\sigma} + \\ &+ \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} A_{\tau} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} A_{\sigma} \right)}{a(\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau)} \hat{\phi} + \\ &+ \frac{\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \frac{\partial A_{\sigma}}{\partial \phi} - \cos \tau \frac{\partial}{\partial \sigma} (\cosh \sigma A_{\phi})}{a\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \cosh \sigma \cos \tau} \hat{\tau},\end{aligned}\quad (\text{A.92})$$

$$\Delta = \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \cosh \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \cos \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right)}{a^2 (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \cosh \sigma \cos \tau} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}}{a^2 \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau}.\quad (\text{A.93})$$

Ostatní operátorové identity a geometrické parametry odvodíme analogickým způsobem jako v případě válcové nebo sférické souřadné soustavy.

## A.5 Parabolická soustava

Parabolická souřadná soustava je ve dvourozměrné verzi (viz obrázek A.4) definována dvěma třídami parabolických souřadnicových křivek s konstantními parametry  $u$  a  $v$  (toto značení opět není zcela ustálené, v různých literaturách může být různé) a se společným ohniskem v bodě  $(0, 0)$ . V trojrozměrné verzi přibude ještě (válcová symetrie vzhledem k ose  $z$ ) azimutální úhlový parametr  $\phi$ .



Obrázek A.4: Schéma dvourozměrné parabolické soustavy v rovině  $x, y$ . Modře vyznačené jsou křivky s konstantním parametrem  $u = 0,5$  (nejúžší); 1; 1,5; 2; 2,5; 3 (nejširší), červeně vyznačené jsou křivky se stejnou posloupností konstantních parametrů  $v$ . V trojrozměrném případě (viz popis) potom vyobrazenému směru  $y$  odpovídá směr  $z$ .

Transformační rovnice v trojrozměrném případě budou

$$x = uv \cos \phi, \quad y = uv \sin \phi, \quad z = \frac{u^2 - v^2}{2}. \quad (\text{A.94})$$

Zpětné transformační vztahy v pravotočivém pořadí proměnných  $u, v, \phi$  budou mít tvar

$$u = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z}, \quad v = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (\text{A.95})$$

Metrická forma parabolické soustavy bude mít tvar

$$ds^2 = (u^2 + v^2) (du^2 + dv^2) + u^2 v^2 d\phi^2. \quad (\text{A.96})$$

Kovariantní metrický tenzor  $g_{ij}$  a příslušné *Laméovy koeficienty* parabolické souřadné soustavy v pořadí směrů  $u, v, \phi$  budou,

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} u^2 + v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 v^2 \end{bmatrix}, \quad h_u = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_\phi = uv. \quad (\text{A.97})$$

Kontravariantní metrický tenzor  $g^{ij}$  diagonální metriky bude tenzor s převrácenými hodnotami prvků na hlavní diagonále. Jakobián souřadnicové transformace z kartézské do parabolické soustavy bude

$$J = uv (u^2 + v^2), \quad (\text{A.98})$$

jakobiánem zpětné transformace bude výraz  $J^{-1}$ . Nenulové *Christoffelovy symboly* parabolické metriky (viz rovnice A.12) budou,

$$\Gamma_{uu}^u = \Gamma_{uv}^v (\Gamma_{vu}^v) = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \Gamma_{vv}^v = \Gamma_{uv}^u (\Gamma_{vu}^u) = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad \Gamma_{uu}^v = \frac{2u - v}{u^2 + v^2}, \quad \Gamma_{vv}^u = \frac{2v - u}{u^2 + v^2}. \quad (\text{A.99})$$



Diferenciální operátory gradientu skalární funkce, divergence a rotace vektoru a laplaciánu budou mít (s použitím formalismu Laméových koeficientů pro ortogonální soustavy a také rovnic A.14 a A.20) v parabolické souřadné soustavě postupně tvar,

$$\vec{\nabla} f = \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{1}{uv} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right), \quad (\text{A.100})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\frac{\partial}{\partial u} (u\sqrt{u^2 + v^2} A_u)}{u(u^2 + v^2)} + \frac{\frac{\partial}{\partial v} (v\sqrt{u^2 + v^2} A_v)}{v(u^2 + v^2)} + \frac{1}{uv} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, \quad (\text{A.101})$$

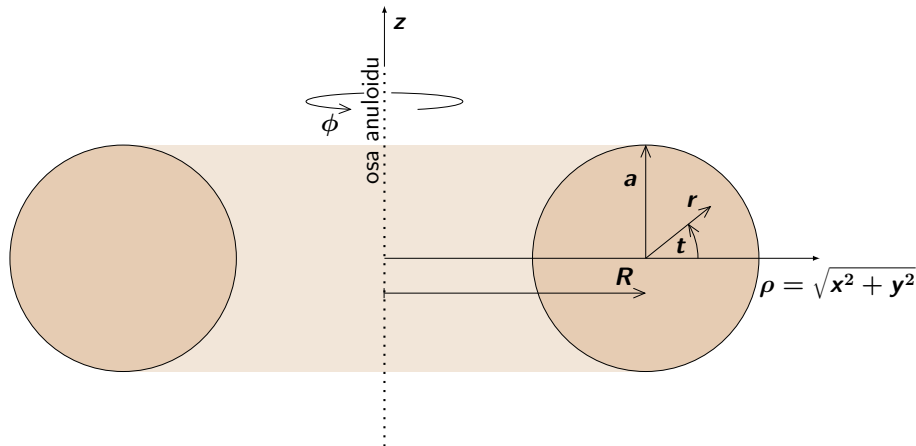
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{\frac{\partial}{\partial v} (uvA_\phi) - \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial A_v}{\partial \phi}}{uv\sqrt{u^2 + v^2}} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial A_u}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial u} (uvA_\phi)}{uv\sqrt{u^2 + v^2}} \hat{\mathbf{v}} + \\ & + \frac{\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{u^2 + v^2} A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{u^2 + v^2} A_u)}{u^2 + v^2} \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

$$\Delta = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left( u \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left( v \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{u^2 v^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (\text{A.103})$$

Ostatní operátorové identity a geometrické parametry odvodíme obdobně jako v případě válcové nebo sférické souřadné soustavy.

## A.6 „Anuloidová“ soustava

V tomto případě také nebudeme uvádět úplný popis všech vztahů a operátorů, i s ohledem na to, že daná soustava je příliš „specifická“, resp. týká se pouze jednoho typu geometrického tělesa, tzv. *anuloidu* (toroidu) - viz obrázek A.5 (popis soustavy rovněž odkazuje k příkladům 6.49 a 6.60). Ukážeme pouze, jak je možné flexibilně adaptovat principy, odvozené pro předchozí „uni-verzální“ geometrické systémy na (v podstatě jakýkoli) speciální případ. Anuloidem nazýváme



Obrázek A.5: Příčný řez anuloidem v rovině  $\rho$ - $z$ , jednotlivé směry odpovídají válcové soustavě.

těleso, které vznikne rotací kružnice okolo osy, která leží v rovině této kružnice a nemá s ní společný bod (vznikne tak válcově symetrická trubice - torus, připomínající „duši pneumatiky“).

Označíme-li  $R$  poloměr osy toru,  $a$  poloměr trubice (toru),  $r$  radiální vzdálenost uvnitř trubice vzhledem k ose trubice,  $t$  úhlovou souřadnici vnitřku trubice a značení ostatních směrů bude odpovídat standardní cylindrické notaci, tj.  $\rho$  bude odpovídat radiální vzdálenosti od osy celého anuloidu,  $\phi$  bude azimutální úhel anuloidu a  $z$  vertikální souřadnice (vše je vyznačené v obrázku A.5), můžeme za anuloidové (proměnné) souřadnice považovat  $r, \phi, t$  (v pravotočivém smyslu). Transformační vztahy můžeme zapsat následovně,

$$x = (R + r \cos t) \cos \phi, \quad y = (R + r \cos t) \sin \phi, \quad z = r \sin t. \quad (\text{A.104})$$

Vztahy pro zpětnou transformaci budou mít v tomto případě tvar

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}, \quad t = \arcsin \frac{z}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2}}. \quad (\text{A.105})$$

Kovariantní metrický tenzor  $g_{ij}$  a příslušné *Laméovy koeficienty* anuloidové souřadné soustavy budou,

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (R + r \cos t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}, \quad h_r = 1, \quad h_\phi = R + r \cos t, \quad h_t = r. \quad (\text{A.106})$$

Vzhledem k tomu, že jde o diagonální metriku, bude kontravariantním metrickým tenzorem  $g^{ij}$  zpětné transformace rovněž tenzor s převrácenými hodnotami prvků na hlavní diagonále. Jakobián souřadnicové transformace z kartézské do anuloidové soustavy tedy bude

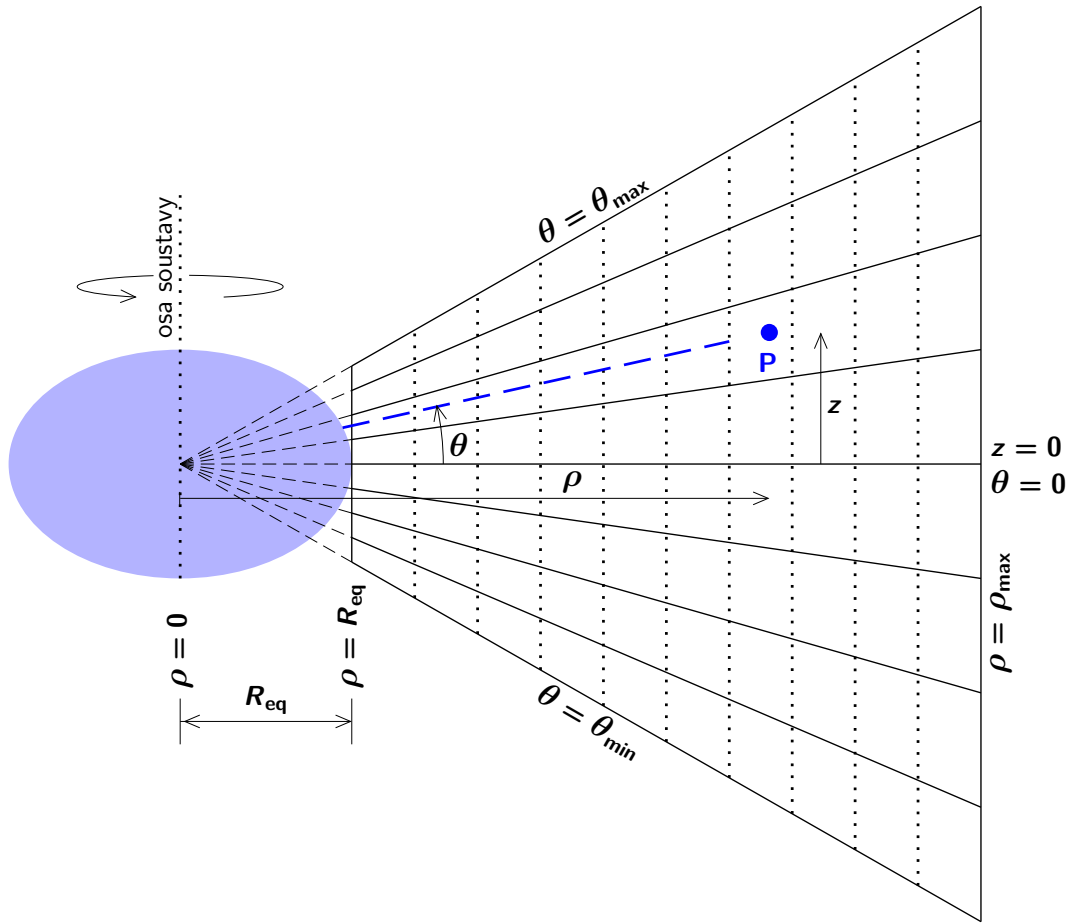
$$J = r(R + r \cos t), \quad (\text{A.107})$$

jakobiánem zpětné transformace bude opět výraz  $J^{-1}$ . Ostatní parametry lze snadno odvodit analogickým způsobem jako v předchozích soustavách.

## A.7 Příklad neortogonální soustavy

Podívejme se nyní na jiný možný geometrický případ, který může vyžadovat zavedení neortogonální souřadné soustavy. Jedná se o geometrický popis rozsáhlého plynného disku, rozprostírajícího se okolo velmi rychle rotující a tudíž silně zploštělé hvězdy, který je v blízkosti hvězdy velmi tenký a ve velkých vzdálenostech od hvězdy se výrazně vertikálně rozšiřuje. Zároveň je samozřejmě rotačně (válcově) symetrický. Obrázek A.6 schématicky znázorňuje tuto soustavu ve vertikální rovině  $\rho$ - $\theta$  ( $\phi = \text{konst.}$ ), souřadnicové směry zde jsou:  $\rho$  - radiální cylindrická souřadnice,  $\phi$  - azimutální úhel,  $\theta$  - sférický úhel, který je ovšem počítán v kladném a záporném směru od rovníkové roviny. Volné parametry (kromě zvoleného rovníkového poloměru hvězdy  $R_{\text{eq}}$ ) jsou maximální cylindrická radiální vzdálenost  $\rho = R_{\text{max}}$  a maximální sférický úhel, označený jako  $\theta_{\text{max}}$  (zrcadlově k němu je  $\theta_{\text{min}}$ ). Soustava je válcově symetrická, osa symetrie je kolmá k rovině disku ( $z = 0 \wedge \theta = 0$ ) a prochází středem hvězdy ( $\rho = 0$ ). Můžeme ji tedy nazývat například **cylindricko-kónickou soustavou**<sup>5</sup> (standardní, tzv. *kónická* souřadná soustava znamená něco poněkud jiného - jde o ortogonální soustavu, definovanou soustřednými

<sup>5</sup>Jako zkrácený pracovní název budeme v dalším textu používat výraz *disková soustava*. Radiální a azimutální souřadnice jsou shodné se soustavou válcovou, jednotlivé souřadnicové směry tedy značíme  $\rho, \phi, \theta$ , jednotkové bázevé vektory značíme  $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$ .



Obrázek A.6: Schématický obrázek *cylindricko-kónické* souřadné soustavy v rovině  $\rho$ - $\theta$  ( $\phi = \text{konst.}$ ).

kulovými plochami a dvěma třídami vzájemně ortogonálních obecně eliptických kuželových ploch s osami  $x$  a  $z$ , s vrcholy v počátku souřadného systému).

Transformační rovnice z této *cylindricko-kónické* do kartézské souřadné soustavy jsou (pro lepší grafickou přehlednost budeme v rovnicích této souřadné soustavy pro tangens používat v anglické literatuře zavedené označení  $\tan$ , namísto v české literatuře běžného  $\text{tg}$ )

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = \rho \tan \theta. \quad (\text{A.108})$$

Pro zpětnou transformaci z kartézské do *diskové* soustavy dostáváme<sup>6</sup>

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (\text{A.109})$$

Analogicky k rovnicím (A.30) a (A.57) budou mít jednotkové vektory *diskové* báze v kartézské soustavě tvar (viz pravidla pro sčítání vektorů)

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi, & \hat{\phi} &= -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi, \\ \hat{\theta} &= -(\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) \sin \theta + \hat{z} \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

<sup>6</sup>V tomto místě platí totéž, co v případě válcových a kulových souřadnic.

Zpětnou transformací jednotkových bázových vektorů (viz rovnice (A.110)) dostáváme

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi, \quad \hat{\mathbf{y}} = \hat{\rho} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi, \quad \hat{\mathbf{z}} = \frac{\hat{\rho} \sin \theta + \hat{\theta}}{\cos \theta}. \quad (\text{A.111})$$

V *diskové* soustavě není žádný z vektorů báze konstantní. Derivace bázových vektorů ve směru jednotlivých souřadnicových os budou (z rovnice (A.110))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} &= \hat{\phi}, & \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \theta} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \rho} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} &= -\hat{\rho}, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \rho} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} &= -\hat{\phi} \sin \theta, & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\frac{\hat{\rho} + \hat{\theta} \sin \theta}{\cos \theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

Časové derivace bázových vektorů budou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{\phi} \dot{\phi}, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\hat{\rho} \dot{\phi}, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\hat{\rho} \dot{\theta}}{\cos \theta} - \hat{\phi} \dot{\phi} \sin \theta - \hat{\theta} \dot{\theta} \tan \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

Metrickou formu pro *diskovou* soustavu odvodíme diferencováním rovnice (A.108),

$$dx = \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi, \quad dy = \sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi, \quad dz = \tan \theta d\rho + \frac{\rho}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad (\text{A.114})$$

dosazením do rovnice (A.2) dostáváme nediagonální *diskovou* metrickou formu ve tvaru

$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{\cos^2 \theta} + \frac{2\rho \sin \theta}{\cos^3 \theta} d\rho d\theta + \rho^2 \left( d\phi^2 + \frac{d\theta^2}{\cos^4 \theta} \right). \quad (\text{A.115})$$

Kovariantní a kontravariantní metrické tenzory soustavy se souřadnicemi v pořadí  $\rho, \phi, \theta$  budou

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \theta} & 0 & \frac{\rho \sin \theta}{\cos^3 \theta} \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ \frac{\rho \sin \theta}{\cos^3 \theta} & 0 & \frac{\rho^2}{\cos^4 \theta} \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} & 0 & \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.116})$$

Jacobiho matice transformace z kartézské soustavy a matice inverzní transformace budou

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ \tan \theta & 0 & \frac{\rho}{\cos^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad J_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\frac{\sin \phi}{\rho} & \frac{\cos \phi}{\rho} & 0 \\ -\frac{\cos \phi \sin \theta \cos \theta}{\rho} & -\frac{\sin \phi \sin \theta \cos \theta}{\rho} & \frac{\cos^2 \theta}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.117})$$

příslušné jakobiány tedy budou,

$$J = |\det J_{ij}| = \sqrt{|\det g_{ij}|} = \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta}, \quad J^{-1} = |\det J_{ij}^{-1}| = \sqrt{|\det g^{ij}|} = \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2}. \quad (\text{A.118})$$

Nenulové Christoffelovy symboly *diskové* metriky jsou

$$\Gamma_{\rho\phi}^{\phi} (\Gamma_{\phi\rho}^{\phi}) = \Gamma_{\rho\theta}^{\theta} (\Gamma_{\theta\rho}^{\theta}) = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} = -\rho, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \sin \theta \cos \theta. \quad (\text{A.119})$$

Protože se nejedná o ortogonální metriku (vyjádřenou diagonálním metrickým tenzorem), nedefinujeme zde žádné *Laméovy* koeficienty.

### A.7.1 Diferenciální operátory

- *Gradient* skalární funkce  $f = f(\rho, \phi, \theta)$  v *diskové* soustavě odvodíme stejným způsobem, jako v předchozích soustavách. Jednotlivé nenulové parciální derivace pro *diskovou* soustavu z rovnice (A.109) budou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \phi, & \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \phi}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \phi, & \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \phi}{\rho}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} = -\frac{\cos \phi \sin \theta \cos \theta}{\rho}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} = -\frac{\sin \phi \sin \theta \cos \theta}{\rho}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\cos^2 \theta}{\rho}. \end{aligned}$$

Stejně jako v předchozích souřadných soustavách dostáváme gradient skalární funkce,

$$\vec{\nabla} f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.120})$$

Stejným postupem jako v předchozích souřadných soustavách můžeme také získat tenzor gradientu *vektorového pole*, který můžeme pomocí maticového formalismu v *diskové* soustavě zapsat,

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{\theta} \\ \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \rho} & \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \rho} & \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \phi} - \frac{A_{\phi}}{\rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{A_{\rho}}{\rho} - \frac{A_{\theta} \sin \theta}{\rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \phi} \\ \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \theta} - \frac{A_{\theta}}{\rho} & \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \theta} & \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{A_{\theta} \sin \theta}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.121})$$

- *Divergence* vektoru (vektorového pole)  $\vec{A}(\rho, \phi, \theta)$  je v *diskových* souřadnicích opět definována jako skalární součin vektoru gradientu s obecným vektorem, tedy

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot (A_{\rho} \hat{\rho} + A_{\phi} \hat{\phi} + A_{\theta} \hat{\theta}), \quad (\text{A.122})$$

kde ovšem, na rozdíl od ortogonálních systémů, nejsou obecně skalární součiny rozdílných vektorů báze nulové, tedy neplatí  $e_i e^j = \delta_i^j$ . Jmenovitě v tomto systému bude nenulový součin

$$e_i e^j = \hat{\rho} \cdot \hat{\theta} = -\sin \theta. \quad (\text{A.123})$$

Přímým výpočtem a po úpravách dostáváme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) + \cos \theta \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right]. \quad (\text{A.124})$$

Na rozdíl od ortogonálních soustav není v tomto případě divergence jednoduchou stopou tenzoru gradientu vektorového pole (A.121), nýbrž je třeba ještě přičíst prvky na vedlejší diagonále (respektive ty, které odpovídají nenulovým prvkům metrického tenzoru (A.116)), násobené skalárním součinem příslušných jednotkových vektorů, v tomto případě rovnicí (A.123).

- *Rotaci* vektoru (vektorového pole)  $\vec{A}(\rho, \phi, \theta)$  v *diskových* souřadnicích nemůžeme odvodit podle rovnice (A.20) (soustava není ortogonální), v tomto případě musíme provést přímý výpočet z definice rotace vektoru,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \times (A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_\theta \hat{\theta}), \quad (\text{A.125})$$

kde musíme nejprve provést všechny (nenulové) derivace jednotkových bazových vektorů (viz rovnice (A.112)), potom vektorové součiny. Ponecháme-li pouze nenulové komponenty, tj. vypustíme-li nulové derivace jednotkových bazových vektorů a také členy se stejnými bazovými vektory a tedy s nulovým vektorovým součinem, dostáváme explicitní výraz

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \hat{\rho} \times \hat{\phi} \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} + \frac{A_\phi}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) + \hat{\phi} \times \hat{\theta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) + \\ & + \hat{\theta} \times \hat{\rho} \left( \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{A_\theta}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.126})$$

Vektorové součiny bazových vektorů zde ovšem nebudou tak jednoduché, jako v případě ortogonálních soustav, na základě rovnice (A.110) pro sudé permutace dostaneme

$$\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \frac{\hat{\rho} \sin \theta + \hat{\theta}}{\cos \theta}, \quad \hat{\phi} \times \hat{\theta} = \frac{\hat{\rho} + \hat{\theta} \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \hat{\theta} \times \hat{\rho} = \hat{\phi} \cos \theta. \quad (\text{A.127})$$

Po dosazení a úpravách dostaneme výslednou podobu rotace vektoru v *diskové* soustavě,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \hat{\rho} \left\{ \frac{\tan \theta}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \right\} + \\ & \hat{\phi} \left\{ \frac{\cos \theta}{\rho} \left[ \cos \theta \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) \right] \right\} + \\ & \hat{\theta} \left\{ \frac{1}{\rho \cos \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] + \frac{\sin \theta}{\rho} \left( \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.128})$$

- *Laplacián* odvodíme z rovnice divergence (A.122), ve které nahradíme složky vektoru  $\vec{A}$  odpovídajícími složkami vektoru gradientu z rovnice (A.120), výsledný tvar (není nutné zde opakovat podrobný vektorový zápis, postup je zcela obdobný, jako v předchozích případech), zapsaný v kompaktní formě bude

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin 2\theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta}. \quad (\text{A.129})$$

### A.7.2 Plochy, objemy

Stejně jako v předchozích soustavách odvodíme velikosti základních ploch a základního objemu prostorové buňky, tj. plochy a objem, ohraničené jednotlivými souřadnicovými rovinami (včetně stejného způsobu značení, další značení viz také obr. A.6). Objem jedné buňky souřadnicové sítě bude

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 d\rho \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\phi_2 - \phi_1) (|\tan \theta_2| - |\tan \theta_1|). \quad (\text{A.130})$$

Determinanty submatic metrického tenzoru, odpovídající jednotlivým plochám prostorové buňky (způsob značení je popsán v rámci popisu válcové a kulové soustavy) budou

$$J'_\rho = \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta}, \quad J'_\phi = \frac{\rho}{\cos^2 \theta}, \quad J'_\theta = \frac{\rho}{\cos \theta} \quad (\text{A.131})$$

a plochy jednotlivých buněk sítě budou mít velikost

$$S_\rho = \rho^2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \rho^2 (\phi_2 - \phi_1) (|\tan \theta_2| - |\tan \theta_1|), \quad (\text{A.132})$$

$$S_\phi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} (|\tan \theta_2| - |\tan \theta_1|), \quad (\text{A.133})$$

$$S_\theta = \frac{1}{\cos \theta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\cos \theta}. \quad (\text{A.134})$$

### A.7.3 Vektory polohy, rychlosti a zrychlení

Při popisu vektorů v *diskové* soustavě vyjdeme jako obvykle z jejich základního popisu v soustavě kartézské, zahrneme všechny rovnice pro derivace jednotkových vektorů i vektorových složek (rovnice (A.108)-(A.113)). Polohový vektor v *diskové* soustavě bude

$$\vec{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} = \frac{\hat{\rho}\rho + \hat{\theta}\rho \sin \theta}{\cos^2 \theta}. \quad (\text{A.135})$$

Tento závěr již není tak názorný a snadno představitelný, jako v případě předchozích typů souřadnic. Vektor rychlosti  $\vec{v}$  bude

$$\vec{v} = \hat{\rho} \left( \frac{\dot{\rho} + \rho\dot{\theta} \tan \theta}{\cos^2 \theta} \right) + \hat{\phi} \rho \dot{\phi} + \hat{\theta} \left( \frac{\dot{\rho} \tan \theta}{\cos \theta} + \frac{\rho\dot{\theta}}{\cos^3 \theta} \right). \quad (\text{A.136})$$

Vektory rychlosti a zrychlení musí být zároveň definovány jako

$$\vec{v} = v_\rho \hat{\rho} + v_\phi \hat{\phi} + v_\theta \hat{\theta}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_\rho \hat{\rho} + a_\phi \hat{\phi} + a_\theta \hat{\theta}. \quad (\text{A.137})$$

Derivováním rovnice (A.136) podle času dostáváme jednotlivé složky vektoru zrychlení v *diskové* souřadné soustavě

$$\begin{aligned} a_\rho &= \frac{\ddot{\rho} + \tan \theta [\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\theta}(\dot{\rho} + \rho \dot{\theta} \tan \theta)]}{\cos^2 \theta} - \rho \dot{\phi}^2 = \frac{dv_\rho}{dt} - \rho \dot{\phi}^2 - \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \left( \dot{\rho} \tan \theta + \frac{\rho \dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \right), \\ a_\phi &= \rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi} = \frac{dv_\phi}{dt} + \dot{\rho} \dot{\phi}, \\ a_\theta &= \frac{1}{\cos \theta} \left[ \ddot{\rho} \tan \theta + \frac{\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\theta}(\dot{\rho} + \rho \dot{\theta} \tan \theta)}{\cos^2 \theta} \right] = \frac{dv_\theta}{dt} - \frac{\tan \theta \dot{\theta}}{\cos \theta} \left( \dot{\rho} \tan \theta + \frac{\rho \dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.138})$$

Z uvedených rovnic snadno zjistíme, že pro hlavní členy složek rychlosti platí

$$\dot{\rho} = v_\rho - v_\theta \sin \theta, \quad \dot{\phi} = \frac{v_\phi}{\rho}, \quad \dot{\theta} = \frac{(v_\theta - v_\rho \sin \theta) \cos \theta}{\rho}. \quad (\text{A.139})$$

Protože  $d\vec{v}/dt = \partial\vec{v}/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}$ , můžeme napsat zrychlení, vyjádřené v *diskové* souřadné soustavě, pomocí složek vektoru rychlosti

$$a_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} + v_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\rho} - \frac{v_\phi^2 + v_\theta^2}{\rho} + \frac{v_\rho v_\theta \sin \theta}{\rho}, \quad (\text{A.140})$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\phi} + \frac{v_\rho v_\phi}{\rho} - \frac{v_\phi v_\theta \sin \theta}{\rho}, \quad (\text{A.141})$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + v_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\theta} - \frac{v_\theta^2 \sin \theta}{\rho} + \frac{v_\rho v_\theta \sin^2 \theta}{\rho}. \quad (\text{A.142})$$

Členy na pravých stranách rovnic (A.140)-(A.142), spojené svorkou, vyjadřují (nelineární) advekci, zbývající členy reprezentující tzv. *fiktivní* (setrvačné) síly - odstředivá síla, Coriolisova síla, Eulerova síla.

Porovnáním rovnic (A.108) a (A.139) můžeme zapsat složky vektoru rychlosti  $v_\rho$ ,  $v_\phi$ ,  $v_\theta$  v *diskové* soustavě pomocí složek vektoru rychlosti  $v_{\rho, \text{cyl}}$ ,  $v_{\phi, \text{cyl}}$ ,  $v_z$  ve standardní válcové souřadné soustavě (odstavec A.2). Dostáváme tak vzájemný vztah mezi velikostmi složek rychlosti v obou soustavách,

$$v_\rho = v_{\rho, \text{cyl}} + \frac{z}{\rho} v_z = v_{\rho, \text{cyl}} + v_z \tan \theta, \quad v_\phi = v_{\phi, \text{cyl}}, \quad v_\theta = \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} v_z = \frac{v_z}{\cos \theta}. \quad (\text{A.143})$$

Vezmeme-li dále v úvahu vertikální hydrostatickou rovnováhu v takovém disku,  $v_z = 0$ , pohybové rovnice (A.140)-(A.142) budou identické s odpovídajícími pohybovými rovnicemi (A.52)-(A.54) ve standardní válcové geometrii.



## Příloha B

# Stručný úvod do parciálních diferenciálních rovnic

Parciální diferenciální rovnice jsou, na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic (viz kapitola 3), diferenciální rovnice, obsahující parciální derivace funkcí více proměnných. Jedná se například o rovnice vývojové (transportní - viz příloha C), které jsou jednosměrné v čase a zpravidla směřují k nějakému ustálenému stavu - rovnice 1. řádu (např. tzv. *Burgersova* rovnice) nebo o rovnice 2. řádu, tedy tzv. *parabolické* parciální diferenciální rovnice, nebo o parciální diferenciální rovnice, popisující periodické děje (vlnová rovnice) - tzv. *hyperbolické* parciální diferenciální rovnice, nebo se jedná o tzv. *eliptické* parciální diferenciální rovnice (Poissonova rovnice, Laplaceova rovnice), atd. Dělení parciálních diferenciálních rovnic na jednotlivé typy je i z praktického hlediska podstatné, poněvadž každý z nich se zpravidla řeší jiným způsobem.

### B.1 Parciální diferenciální rovnice 1. řádu

#### B.1.1 Homogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu

Nejjednoduššími parciálními diferenciálními rovnicemi jsou lineární homogenní rovnice 1. řádu dvou nezávisle proměnných  $x, y$ , vyskytují se zde tedy pouze první (parciální) derivace v lineárním výrazu

$$a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Řešením takové rovnice bude funkce  $u(x, y)$ . Funkci dvou proměnných, reprezentovanou plochou, můžeme charakterizovat pomocí vrstevnic  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , kde  $s$  je parametr. Funkce  $u[x(s), y(s)]$  je tedy na vrstevnicích konstantní, můžeme ji považovat za funkci jedné proměnné (parametru  $s$ ),

$$\frac{du[x(s), y(s)]}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0, \quad (\text{B.2})$$

kdy hledáme řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (tzv. *charakteristické soustavy*)

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y), \quad (\text{B.3})$$

které označujeme jako *charakteristiky* (také 1. integrál). Obecnou rovnici charakteristik potom definujeme jako  $\varphi(x, y) = C$  a obecné řešení rovnice dvou proměnných lze zapsat jako  $u(x, y) =$

$\Phi[\varphi(x, y)]$ , kdy funkci  $\Phi$  lze považovat za libovolnou funkci jedné proměnné  $\varphi$ . V případě rovnice  $n$  nezávisle proměnných bude mít obecné řešení tvar

$$u(x_1, \dots, x_n) = \Phi[\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)]. \quad (\text{B.4})$$

• **Příklady řešení lineárních homogenních parciálních diferenciálních rovnic:**

1. Mějme zadanou jednoduchou homogenní rovnici dvou nezávisle proměnných,

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (\text{B.5})$$

charakteristická soustava tedy bude  $dx/ds = x^2$ ,  $dy/ds = y^2$ , jejím řešením budou charakteristiky  $-1/x = s + C_1$ ,  $-1/y = s + C_2$  a po vyloučení parametru  $s$  dostáváme  $1/y - 1/x = C = \varphi(x, y)$ . Výsledné obecné řešení tedy bude

$$u(x, y) = \Phi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right). \quad (\text{B.6})$$

2. Jiný jednoduchý příklad může představovat například homogenní rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (\text{B.7})$$

jejíž charakteristická soustava bude  $dx/ds = 1$ ,  $dy/ds = -6x^2$ , kdy řešením první rovnice soustavy bude charakteristika  $x = s + C_1$  a protože  $dy = -6(s + C_1)^2 ds$ , druhá charakteristika bude  $y = -2s^3 - 6s^2 C_1 - 6s C_1^2 + C_2$ . Vyjádříme-li z první charakteristiky  $s = x - C_1$  a tento výraz dosadíme do druhé charakteristiky, dostáváme rovnici  $y + 2x^3 = 2C_1^3 + C_2 = C = \varphi(x, y)$ . Výsledné obecné řešení tedy bude

$$u(x, y) = \Phi(y + 2x^3). \quad (\text{B.8})$$

K tomuto výsledku lze ovšem dospět mnohem rychleji, uvědomíme-li si, že v případě homogenní rovnice dostaneme vydělením rovnic charakteristické soustavy obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu, tedy  $(dy/ds)/(dx/ds) = dy/dx = -6x^2$  a tedy  $y = -2x^3 + C$ .

3. Mějme zadání homogenní rovnici tří proměnných  $x, y, z$ ,

$$(z - y) \frac{\partial u}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.9})$$

s okrajovou podmínkou  $u(0, y, z) = yz$ . Charakteristická soustava v tomto případě bude  $dx/ds = (z - y)$ ,  $dy/ds = (x - z)$ ,  $dz/ds = (y - x)$ , po jejím sečtení dostáváme  $dx/ds + dy/ds + dz/ds = 0$  a po integraci podle  $s$  dostáváme  $x + y + z = C_1$ . Protože zadaná rovnice obsahuje tři proměnné, potřebujeme ještě jednu obecnou rovnici charakteristik, například vynásobením každé charakteristiky odpovídající proměnnou dostaneme výrazy  $x dx/ds = (z - y)x$ ,  $y dy/ds = (x - z)y$ ,  $z dz/ds = (y - x)z$ . Po jejím sečtení (opět s nulovým součtem), po její integraci podle  $s$  a po vynásobení dvěma (kdy  $x' = dx/ds$ , atd.) dostáváme  $2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$  a tedy  $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$ . Obecné řešení bude

$$u(x, y, z) = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2). \quad (\text{B.10})$$

Po dosazení okrajové podmínky dostaneme  $\Phi(y + z, y^2 + z^2) = yz$ , označíme-li  $y + z = \xi$ ,  $y^2 + z^2 = \eta$ , můžeme psát  $\Phi(\xi, \eta) = (\xi^2 - \eta)/2$ . Explicitním řešením okrajové úlohy bude funkce

$$u(x, y, z) = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = xy + xz + yz. \quad (\text{B.11})$$

• **Nelineární homogenní parciální diferenciální rovnice - neviskózní Burgersova rovnice:**

Jedná se o nelineární rovnici (nazývanou také *transportní* rovnice) funkce  $u(t, x)$  dvou nezávisle proměnných  $t, x$  (kdy v prostorovém členu je tato funkce násobkem, tj. vyšší mocninou), která popisuje nelineární postupnou vlnu. V jednorozměrném případě má podobu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{B.12})$$

Charakteristické rovnice vzhledem k rovnici (B.12) budou

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = u, \quad \text{a také} \quad \frac{du}{ds} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Z první rovnice vyplývá  $t = s$ , jako parametr můžeme tedy zvolit přímo  $t$ . Třetí rovnice říká, že  $u$  je konstantní podél charakteristik, ze druhé rovnice potom vyplývá, že charakteristiky budou přímkami v rovině  $x, t$ . Řešení druhé a třetí charakteristické rovnice je jednoduché:

$$x = ut + C_1, \quad u = C_2. \quad (\text{B.14})$$

Uvědomíme-li si, že  $C_2$  musí být funkcí  $C_1$ , tedy  $C_2 = C_2(C_1)$ , substitucí  $x - ut$  za  $C_1$  dostáváme obecné řešení parciální diferenciální rovnice:

$$u(x, t) = C_2(x - ut) = \Phi(x - ut). \quad (\text{B.15})$$

Pro jednoznačné určení obecné funkce  $\Phi$  zavedeme počáteční (okrajovou) podmínku, například  $u(x, 0) = x$ . Potom můžeme psát  $u(x, 0) = C_2[x - u(x, 0) \cdot 0] = x$  a tedy  $C_2(x) = x$ . Dostáváme rovnici  $u = x - ut$ , výsledné jednoznačné řešení v tomto případě bude

$$u(x, t) = \frac{x}{1 + t}. \quad (\text{B.16})$$

### B.1.2 Nehomogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu

Nehomogenní parciální diferenciální rovnici 1. řádu dvou nezávisle proměnných můžeme obecně zapsat ve tvaru

$$a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = f(x, y). \quad (\text{B.17})$$

Obdobně jako v případě homogenní rovnice můžeme psát

$$\frac{du[x(s), y(s)]}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = f(x, y), \quad (\text{B.18})$$

kde potom hledáme řešení systému charakteristických rovnic

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y), \quad \frac{du}{ds} = f(x, y). \quad (\text{B.19})$$

• **Příklady řešení lineárních nehomogenních parciálních diferenciálních rovnic:**

1. Uvažujme jednoduchou nehomogenní parciální diferenciální rovnici dvou nezávisle proměnných

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x \text{ s okrajovou podmínkou } u(x, a) = 1, \quad (\text{B.20})$$

kde  $a$  je konstanta. Ze systému rovnic (B.19) vyplývá charakteristická soustava  $dx/ds = 1$ ,  $dy/ds = 1$ ,  $du/ds = x$ . Vydělením prvních dvou charakteristických rovnic a například třetí a první, dostáváme charakteristiky  $C_1 = y - x$ ,  $C_2 = u - x^2/2$ . Dostáváme tedy obecné řešení parciální diferenciální rovnice ve tvaru:

$$\Phi(y - x, u - x^2/2) = 0, \quad (\text{B.21})$$

kde  $\Phi$  je libovolná funkce charakteristik. Přepíšeme nyní rovnici pomocí okrajové podmínky jako funkci charakteristik a konstant, tj.  $\Phi(a - x, 1 - x^2/2) = \Phi(C_1, C_2) = 0$ , z první charakteristiky potom vyplývá  $x = a - C_1$ , z druhé charakteristiky dostáváme  $C_2 = 1 - (a - C_1)^2/2$ . Poslední výraz můžeme přepsat jako  $1 - (a - C_1)^2/2 - C_2 = \Phi(C_1, C_2) = 0$ , po dosazení do charakteristik dostaneme explicitní výraz  $1 - [a^2 - 2a(y - x) + (y - x)^2]/2 - u + x^2/2 = 0$ . Výsledné řešení okrajové úlohy pro zadanou rovnici potom bude

$$u(x, y) = xy + a(y - x) - \frac{y^2 + a^2}{2} + 1. \quad (\text{B.22})$$

2. Nehomogenní parciální diferenciální rovnice dvou nezávisle proměnných má tvar

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2, \text{ s okrajovou podmínkou } u(x, a) = x^2 - a^2, \quad (\text{B.23})$$

kde  $a$  je konstanta. Ze systému rovnic (B.19) vyplývá charakteristická soustava  $dx/ds = y$ ,  $dy/ds = -x$ ,  $du/ds = y^2 - x^2$ . Všimněme si, že v tom případě platí  $y dx/ds + x dy/ds = du/ds$ . Rovnici  $dy/dx = -x/y$ , její integrace dává první charakteristiku  $x^2 + y^2 = C_1$ . Rovnici  $y dx/ds + x dy/ds = du/ds$  můžeme zapsat jako  $d(xy)/ds = du/ds$ , po její integraci dostáváme druhou charakteristiku  $u - xy = C_2$ . Obecné řešení parciální diferenciální rovnice bude mít tvar:

$$\Phi(x^2 + y^2, u - xy) = 0, \quad (\text{B.24})$$

kde  $\Phi$  je libovolná funkce charakteristik. Přepíšeme nyní opět rovnici pomocí okrajové podmínky jako funkci charakteristik a konstant, tj.  $\Phi(x^2 + a^2, x^2 - a^2 - ax) = \Phi(C_1, C_2) = 0$ . Z první charakteristiky vyplývá  $x = \pm\sqrt{C_1 - a^2}$ , z druhé charakteristiky potom vplyne rovnice pro obě charakteristiky ve tvaru  $C_1 - 2a^2 \mp a\sqrt{C_1 - a^2} - C_2 = 0$ . Po dosazení původních výrazů do charakteristik dostaneme explicitní výraz  $x^2 + y^2 - 2a^2 \mp a(\pm\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}) - u + xy = 0$ . Výsledné řešení okrajové úlohy pro zadanou rovnici bude

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + xy - a\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} - 2a^2. \quad (\text{B.25})$$

• **Příklady řešení nelineárních nehomogenních parciálních diferenciálních rovnic:**

1. Nehomogenní nelineární parciální diferenciální rovnice dvou nezávisle proměnných má tvar

$$xu \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} = -xy, \text{ s okrajovou podmínkou } u \left( x, \frac{a^2}{x} \right) = h, \quad (\text{B.26})$$

kde  $a, h$  jsou konstanty. Ze systému rovnic (B.19) vyplývá charakteristická soustava  $dx/ds = xu, dy/ds = yu, du/ds = -xy$ . Integrace rovnice  $dy/dx = y/x$  dává první charakteristiku  $y/x = C_1$ . Všimněme si, že v tomto případě platí  $y dx/ds + x dy/ds = 2uxy$ , tuto rovnici můžeme tedy zapsat jako  $d(xy)/ds = -2u du/ds = -du^2/ds$ , po její integraci dostáváme druhou charakteristiku  $u^2 + xy = C_2$ . Obecné řešení parciální diferenciální rovnice bude mít tvar:

$$\Phi \left( \frac{y}{x}, u^2 + xy \right) = 0, \quad (\text{B.27})$$

kde  $\Phi$  je libovolná funkce charakteristik. Přepíšeme nyní opět rovnici pomocí okrajové podmínky jako funkci charakteristik a konstant, tj.  $\Phi(a^2/x^2, h^2 + a^2) = \Phi(C_1, C_2) = 0$ . Z první charakteristiky vyplývá  $x = \pm \sqrt{a^2/C_1}$ , z druhé charakteristiky potom vyplyne rovnice pro obě charakteristiky ve tvaru  $h^2 + a^2 - C_2 = 0$ . Po dosazení původních výrazů do charakteristik dostaneme explicitní výraz  $h^2 + a^2 - u^2 - xy = 0$ . Výsledné řešení okrajové úlohy pro zadanou rovnici bude

$$u(x, y) = \sqrt{h^2 + a^2 - xy}. \quad (\text{B.28})$$

2. Nehomogenní nelineární parciální diferenciální rovnice dvou nezávisle proměnných má tvar

$$yu \frac{\partial u}{\partial x} - xu \frac{\partial u}{\partial y} = x - y, \text{ s okrajovou podmínkou } u(x, x) = h, \quad (\text{B.29})$$

kde  $h$  je konstanta. Ze systému rovnic (B.19) vyplývá charakteristická soustava  $dx/ds = yu, dy/ds = -xu, du/ds = x - y$ . Opět zde integrace rovnice  $dy/dx = -x/y$  dává první charakteristiku  $x^2 + y^2 = C_1$ . Rovnici  $dx/ds + dy/ds = d(x+y)/ds$  můžeme zapsat jako  $d(x+y)/ds = u(x-y) = u du/ds$ , po její integraci dostáváme druhou charakteristiku  $u^2 + 2x + 2y = C_2$ . Obecné řešení parciální diferenciální rovnice bude mít tvar:

$$\Phi(x^2 + y^2, u^2 + 2x + 2y) = 0, \quad (\text{B.30})$$

kde  $\Phi$  je libovolná funkce charakteristik. Přepíšeme nyní opět rovnici pomocí okrajové podmínky jako funkci charakteristik a konstant, tj.  $\Phi(2x^2, h^2 + 4x) = \Phi(C_1, C_2) = 0$ . Z první charakteristiky vyplývá  $x = \pm \sqrt{C_1/2}$ , z druhé charakteristiky potom vyplyne rovnice pro obě charakteristiky ve tvaru  $h^2 \pm 4\sqrt{C_1/2} - C_2 = 0$ . Po dosazení původních výrazů do charakteristik dostaneme explicitní výraz  $h^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} - u^2 - 2x - 2y = 0$ . Výsledné řešení okrajové úlohy pro zadanou rovnici bude

$$u(x, y) = \sqrt{2\sqrt{2(x^2 + y^2)} - 2x - 2y + h^2}. \quad (\text{B.31})$$

Analogickým způsobem lze řešit (téměř) jakoukoli parciální diferenciální rovnici 1. řádu. Podstatné je vždy nalezení jisté symetrie v zadání rovnice, která umožní sestavení charakteristických rovnic a nalezení příslušných charakteristik. Zájemce o hlubší porozumění této problematice odkazují například na skripta [Arsenin \(1977\)](#); [Pospíšil \(2006\)](#); [Franců \(2011\)](#).

## B.2 Parciální diferenciální rovnice 2. řádu

### B.2.1 Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu

Obecná parciální diferenciální rovnice 2. řádu funkce  $u(x, y)$  (pro jednoduchost se omezíme pouze na funkce dvou proměnných) má tvar:

$$\begin{aligned} a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u + d(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

nebo, ve zjednodušené notaci, používané v dalším textu ( $u_x = \partial u / \partial x$ ,  $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$ , atd.) :

$$\begin{aligned} a_{11}(x, y)u_{xx} + a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + \\ + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u + d(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Typ rovnice (v případě funkce dvou proměnných) je určen následujícími podmínkami:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad \text{rovnice parabolická,} \quad (\text{B.34})$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0 \quad \text{rovnice hyperbolická,} \quad (\text{B.35})$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad \text{rovnice eliptická.} \quad (\text{B.36})$$

Úpravou obecného tvaru rovnice transformací do nových proměnných prostřednictvím kvadratické formy lze získat kanonický tvar rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}(x, y)u_x - a_{22}(x, y)u_{yy} + \dots = 0 & \quad \text{rovnice parabolická,} \\ a_{11}(x, y)u_{xx} - a_{22}(x, y)u_{yy} + \dots = 0 & \quad \text{rovnice hyperbolická,} \\ a_{11}(x, y)u_{xx} + a_{22}(x, y)u_{yy} + \dots = 0 & \quad \text{rovnice eliptická.} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

V případě rovnice více proměnných je situace komplikovanější, typ rovnice je jednoznačně určen tzv. *maticí kvadratické formy*, resp. druhem její *definitnosti*. Příkladem transformace obecného polynomu druhého stupně na kvadratickou formu může být:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2xy + 2y^2 &= 3 \left( x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{2}{3}y^2 \right) = 3 \left[ \left( x + \frac{1}{3}y \right)^2 - \frac{1}{9}y^2 + \frac{2}{3}y^2 \right] = \\ &= 3 \left[ \left( x + \frac{1}{3}y \right)^2 + \frac{5}{9}y^2 \right] = 3 \left( x + \frac{1}{3}y \right)^2 + \frac{5}{3}y^2. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Substitucí  $\begin{cases} x + \frac{1}{3}y = \xi_1 \\ y = \xi_2 \end{cases}$  dostáváme  $3\xi_1^2 + \frac{5}{3}\xi_2^2$ , což lze zapsat jako:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

Obdobným způsobem můžeme transformovat obecnou parciální diferenciální rovnici 2. řádu: pokud je diagonální matice kvadratické formy pozitivně nebo negativně definitní, tj. její vlastní hodnoty (viz rovnice (2.17)-(2.19)) jsou buď všechny kladné nebo všechny záporné, potom se jedná o rovnici eliptickou. Pokud je diagonální matice kvadratické formy indefinitní (tj. kdy

některé vlastní hodnoty jsou kladné, některé záporné), potom se jedná buď o rovnici hyperbolickou (odlišuje se znaménko pouze jedné vlastní hodnoty) nebo ultrahyperbolickou. Pokud je diagonální matice kvadratické formy semidefinitní (některé vlastní hodnoty jsou nulové), potom se jedná se o rovnici parabolickou (jedna vlastní hodnota je nulová), případně tzv. parabolickou v širším smyslu.

Kanonický tvar jednotlivých typů rovnic, například pro obecnou funkci čtyř proměnných  $u = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , vypadá potom schématicky následovně:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \pm \frac{\partial u}{\partial x_4} + \dots = 0 \quad \text{parabolická,} \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \pm \frac{\partial u}{\partial x_3} \pm \frac{\partial u}{\partial x_4} + \dots = 0 \quad \text{parabolická v širším smyslu,} \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \dots = 0 \quad \text{hyperbolická,} \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \dots = 0 \quad \text{ultrahyperbolická,} \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \dots = 0 \quad \text{eliptická.} \quad (\text{B.44})$$

V dalším výkladu ukážeme řešení některých vybraných parciálních diferenciálních rovnic parabolických, hyperbolických a eliptických.

### • Fyzikální podoba parabolických parciálních diferenciálních rovnic

Nejobvyklejší tvar parabolické parciální diferenciální rovnice (např. rovnice vedení tepla) je:

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + \dots), \quad (\text{B.45})$$

kde „konstanta“  $k$  (což nemusí být doslova konstanta, člen  $k$  pouze neobsahuje funkci proměnných  $x, y, \dots$ ) má význam:  $k = \lambda/(c_p \rho)$ , kde  $\lambda$  znamená součinitel tepelné vodivosti,  $c_p$  tepelnou kapacitu (při stálém tlaku) a  $\rho$  hustotu.

### B.2.2 Metoda fundamentálního řešení (metoda Greenovy funkce)

Řešení rovnic pomocí formalismu Fourierovy transformace a konvoluce funkcí, zavedených v odstavci 9.2, si detailněji ukážeme na následujících řešených příkladech (v dalším textu budeme vždy uvádět zkratkami LS levou stranu rovnice a PS její pravou stranu) parabolických parciálních diferenciálních rovnic:

#### • Homogenní rovnice, nehomogenní obecná počáteční podmínka:

Homogenní úlohou rozumíme rovnici bez zdroje tepla, tj. bez pravé strany, nehomogenní pravá strana znamená dodatečný zdroj tepla. V případě homogenních počátečních respektive okrajových podmínek je příslušná funkce v čase  $t = 0$ , případně na definovaných okrajích, nulová.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{s nehomogenní počáteční podmínkou } u(0, x) = \varphi(x). \quad (\text{B.46})$$

$$\text{LS: } \widehat{u}_t(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t, x) e^{-ix\xi} dx = \widehat{u}_t(t, x). \quad (\text{B.47})$$

$$\text{PS: } \widehat{u}_{xx}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(t, x) e^{-ix\xi} dx = \underbrace{\left[ u_x e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{\infty}}_0 + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t, x) e^{-ix\xi} dx = -\xi^2 \widehat{u}(\xi). \quad (\text{B.48})$$

Dostáváme tedy obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu s jednoduše separovatelnými proměnnými:  $\widehat{u}_t(\xi) = -a^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi)$ , jejíž řešení snadno určíme jako  $\widehat{u}(\xi) = C e^{-a^2 \xi^2 t}$ , respektive  $\widehat{u}(t, \xi) = C(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}$ . Funkci  $C(\xi)$  určíme z počáteční podmínky (B.46):  $\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = C(\xi)$ ,  $\widehat{u}(t, \xi) = C(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}$ . Zavedeme funkci  $G(t, x)$  (Greenovu funkci) jako zpětný Fourierův obraz (vzor) funkce  $\widehat{G}(t, \xi) = e^{-a^2 \xi^2 t}$ , dostáváme tedy  $\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \cdot \widehat{G}(t, \xi) = (\varphi * G)(t, \xi)$ , a tedy  $u(t, x) = (\varphi * G)(t, x)$ :

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}(t, \xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2 \xi^2 t - i\xi x)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a\xi\sqrt{t} - \frac{ix}{2a\sqrt{t}})^2} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} d\xi = \left\{ \begin{array}{l} a\xi\sqrt{t} - \frac{ix}{2a\sqrt{t}} = \eta \\ a\sqrt{t} d\xi = d\eta \end{array} \right\} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = G(x, t). \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Výsledné řešení zadané parabolické parciální diferenciální rovnice potom bude

$$u(t, x) = (\varphi * G)(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) G(t, x - y) dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy. \quad (\text{B.50})$$

V obecném případě, kdy  $u(\tau, x) = \varphi(x)$  dostáváme výslednou funkci ve tvaru:

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} dy. \quad (\text{B.51})$$

- **Nehomogenní rovnice s homogenní počáteční podmínkou:**

$$u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{s homogenní počáteční podmínkou } u(0, x) = 0.$$

Předpokládáme řešení ve tvaru:  $u(t, x) = \int_0^t w(t, x, \sigma) d\sigma$ , kdy

$$u_t(t, x) = w(t, x, t) + \int_0^t w_t(t, x, \sigma) d\sigma, \quad u_{xx}(t, x) = \int_0^t w_{xx}(t, x, \sigma) d\sigma, \quad \text{potom platí}$$

$$w(t, x, t) + \int_0^t w_t(t, x, \sigma) d\sigma = a^2 \int_0^t w_{xx}(t, x, \sigma) d\sigma + f(t, x), \quad \text{to odpovídá}$$

$$\int_0^t \underbrace{[w_t(t, x, \sigma) - a^2 w_{xx}(t, x, \sigma)]}_{\text{předpoklad} = 0} d\sigma = \underbrace{f(t, x) - w(t, x, t)}_{\text{předpoklad} = 0}, \quad \text{z toho vyplývá}$$

$w_t(t, x, \sigma) = a^2 w_{xx}(t, x, \sigma)$ , s počáteční podmínkou  $w(\sigma, x, \sigma) = f(\sigma, x)$ , tedy

$$w(t, x, \sigma) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\sigma)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\sigma)}} dy. \quad (\text{B.52})$$

Výsledné řešení bude

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sigma, y)}{\sqrt{t-\sigma}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\sigma)}} d\sigma dy. \quad (\text{B.53})$$



- **Nehomogenní rovnice s nehomogenní počáteční podmínkou:**

$$u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{s nehomogenní počáteční podmínkou } u(0, x) = \varphi(x). \quad (\text{B.54})$$

Z linearity vyplývá, že funkci lze rozdělit následujícím způsobem:

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x), \quad (\text{B.55})$$

$$v_t(t, x) = a^2 v_{xx} + f, \quad v(0, x) = 0 \quad \text{1. funkce,} \quad (\text{B.56})$$

$$w_t = a^2 w_{xx}, \quad w(0, x) = \varphi(x) \quad \text{2. funkce.} \quad (\text{B.57})$$

Z počáteční podmínky  $\varphi(x) = v(0, x) + w(0, x) = w(0, x)$ , kde ovšem  $v(0, x) = 0$ , dostáváme:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) G(x, y, t) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, y) G(x, y, t - \sigma) d\sigma dy = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sigma, y)}{\sqrt{t-\sigma}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\sigma)}} d\sigma dy. \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

### B.2.3 Řešení parabolických parciálních diferenciálních rovnic Fourierovou metodou (metodou separace proměnných)

Metodu, která se velmi často používá při řešení parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu, si opět detailněji ukážeme na řešených příkladech parabolických parciálních diferenciálních rovnic.

- **Homogenní jednorozměrná úloha, homogenní okrajové podmínky, obecná počáteční podmínka:**

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u(t, 0) = 0 = u(t, \ell). \quad (\text{B.59})$$

Předpokládáme, že funkci  $u(t, x)$  lze vyjádřit jako součin dvou separovaných funkcí, kdy každá je funkcí jen jedné z obou proměnných:  $u(t, x) = T(t)X(x)$ . Obě strany rovnice (B.59) lze potom vyjádřit následujícím způsobem:

$$T'X = a^2 TX'', \quad \text{separujeme do podoby } \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda. \quad \text{Řešení PS potom bude} \quad (\text{B.60})$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad \text{z toho vyplývá } X(x) = v(x) = A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x. \quad (\text{B.61})$$

Zahrnutím okrajové podmínky získáme příslušné koeficienty PS:

$$X(0) = B = 0, \quad X(\ell) = A \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0, \quad \text{a tedy } \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{\ell}, \quad (\text{B.62})$$

kde konstanta  $A$  může nabývat libovolné hodnoty (např. 1). PS můžeme tedy zapsat jako

$$X_k = v_k = \sin \left( \frac{k\pi}{\ell} x \right). \quad (\text{B.63})$$

LS řešíme jako obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu,

$$\frac{T'}{T} = -a^2 \lambda, \quad \text{z toho vyplývá } T = C_k e^{-a^2 \lambda_k t} = C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}, \quad (\text{B.64})$$

Obě takto nalezené separátní funkce potom zapíšeme jako součin:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right). \quad (\text{B.65})$$

Fourierův koeficient  $C_k$  získáme pomocí počáteční podmínky:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k, \text{ a tedy } C_k = \frac{1}{\|v_k\|^2} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) v_k(\xi) d\xi. \quad (\text{B.66})$$

Normu  $\|v_k\|$  funkce  $v_k$  řešíme jako normu spojitě definovaného vektoru (viz rovnice (2.1)), tedy

$$\|v_k\|^2 = \int_0^{\ell} v_k^2(\xi) d\xi = \int_0^{\ell} \sin^2\left(\frac{k\pi}{\ell} \xi\right) d\xi = \frac{\ell}{2}, \quad C_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \xi\right) d\xi. \quad (\text{B.67})$$

Výslednou funkci můžeme potom zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\ell} \left[ \varphi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \xi\right) d\xi \right] e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right). \quad (\text{B.68})$$

• **Homogenní dvourozměrná úloha, homogenní okrajové podmínky, obecná počáteční podmínka:**

Vedení tepla v pravoúhlých směrech:

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell_1), \quad y \in (0, \ell_2), \quad u(0, x, y) = \varphi(x, y), \\ u(t, 0, y) = 0 = u(t, \ell_1, y), \quad u(t, x, 0) = 0 = u(t, x, \ell_2). \quad (\text{B.69})$$

Předpokládáme tři funkce, které lze separovat (srovnej rovnici (B.60)), takže každá je funkcí jen jedné ze tří proměnných:  $u = TXY$ . Obě strany rovnice (B.2.3) lze potom vyjádřit následujícím způsobem:

$$T'XY = a^2(TX''Y + TXY''), \text{ tedy } \frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (\text{B.70})$$

Dále předpokládáme:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda_1, \quad \frac{Y''}{Y} = -\lambda_2, \quad (\text{B.71})$$

což si můžeme dovolit vzhledem k následným úpravám LS rovnice. Dostáváme tak řešení PS,

$$X_m = \sin\left(\frac{m\pi}{\ell_1} x\right), \quad Y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_2} y\right). \quad (\text{B.72})$$

LS opět řešíme jako obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu,

$$T = C_{mn} e^{-a^2 \left[ \left(\frac{m\pi}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_2}\right)^2 \right] t}, \quad (\text{B.73})$$

Všechny tři nalezené separátní funkce potom zapíšeme jako součin

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{mn} e^{-a^2 \left[ \left(\frac{m\pi}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_2}\right)^2 \right] t} \times \sin\left(\frac{m\pi}{\ell_1} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_2} y\right). \quad (\text{B.74})$$

Fourierův koeficient získáme pomocí počáteční podmínky:

$$C_{mn} = \frac{1}{\|v_{mn}\|^2} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \varphi(\xi, \eta) \sin\left(\frac{m\pi\xi}{\ell_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{\ell_2}\right) d\xi d\eta, \quad (\text{B.75})$$

Norma  $\|v_{mn}\|$  funkce  $v_{mn}$  je analogicky k rovnici (B.67) dána jako

$$\|v_{mn}\|^2 = \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \sin^2\left(\frac{m\pi\xi}{\ell_1}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi\eta}{\ell_2}\right) d\xi d\eta = \frac{1}{2} [\xi]_0^{\ell_1} \times \frac{1}{2} [\eta]_0^{\ell_2} = \frac{\ell_1 \ell_2}{4}. \quad (\text{B.76})$$

Výslednou funkci můžeme zapsat ve tvaru:

$$u(x, y, t) = \frac{4}{\ell_1 \ell_2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \left[ \varphi(\xi, \eta) \sin\left(\frac{m\pi\xi}{\ell_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{\ell_2}\right) d\xi d\eta \right] \times \\ \times e^{-a^2 \left[ \left(\frac{m\pi}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_2}\right)^2 \right] t} \times \sin\left(\frac{m\pi}{\ell_1} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_2} y\right). \quad (\text{B.77})$$

V případě nehomogenních okrajových podmínek bude nalezení partikulárního řešení komplikovanější:

• **Homogenní jednorozměrná úloha, nehomogenní okrajové podmínky, homogenní počáteční podmínka:**

Chladnutí tyče:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell), \quad u(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = T_1, \quad u(t, \ell) = T_2. \quad (\text{B.78})$$

Funkci linearizujeme:  $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$ , kdy funkce  $w(t, x)$  přejde na stacionární funkci  $w(x)$  a bude splňovat okrajové podmínky následujícím způsobem:

$$w(t, 0) = T_1, \quad w(t, \ell) = T_2, \quad v(t, 0) = v(t, \ell) = 0. \quad (\text{B.79})$$

Pro stacionární funkce dále platí,

$$w(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell} x, \quad v(0, x) = -T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ell} x, \quad (\text{B.80})$$

$$v(0, x) + w(0, x) = 0 \text{ a tedy } v(0, x) = -w(0, x). \quad (\text{B.81})$$

Rovnice (B.78), rozdělená pro obě funkce  $v$  a  $w$  bude mít tvar

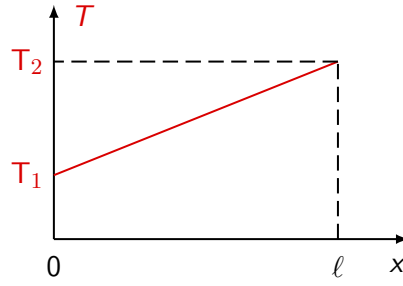
$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad w_t = a^2 w_{xx}, \quad (\text{B.82})$$

kdy ovšem prostorové derivace funkce  $w$  budou

$$w_x = \frac{T_2 - T_1}{\ell}, \quad w_{xx} = 0, \quad v_t = a^2 v_{xx}, \quad v = XT, \quad (t, 0) = 0 = v(t, \ell), \quad (\text{B.83})$$

$$X(x) = A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x \text{ a tedy } X_k = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right), \quad (\text{B.84})$$

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right). \quad (\text{B.85})$$

Obrázek B.1: Schématické znázornění průběhu funkce  $w(x)$ .

Z počáteční podmínky dále vyplývá

$$\begin{aligned}
 v(0, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) = -T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ell}x, \text{ z toho vyplývá:} \\
 C_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \left(-T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi = \\
 &= \frac{2}{\ell} T_1 \frac{\ell}{k\pi} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right)\right]_0^{\ell} + \frac{T_1 - T_2}{\ell} \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \xi \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi = \\
 &= \frac{2T_1}{k\pi} \left[(-1)^k - 1\right] + \frac{2(T_1 - T_2)}{\ell^2} \left\{ \left[-\xi \frac{\ell}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right)\right]_0^{\ell} + \frac{\ell}{k\pi} \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi \right\} = \\
 &= \frac{2T_1}{k\pi} \left[(-1)^k - 1\right] + \frac{2(T_1 - T_2)}{\ell^2} \left[-\frac{\ell^2}{k\pi}(-1)^k\right] = \\
 &= \frac{2T_1}{k\pi} \left[(-1)^k - 1\right] - \frac{2(T_1 - T_2)}{k\pi}(-1)^k = (-1)^k \left(\frac{2T_2}{k\pi}\right) - \left(\frac{2T_1}{k\pi}\right). \quad (\text{B.86})
 \end{aligned}$$

Výsledná funkce bude mít tvar:

$$u(t, x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell}x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \left(\frac{2T_2}{k\pi}\right) - \left(\frac{2T_1}{k\pi}\right)\right] e^{-(\frac{ak\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{B.87})$$

• **Nehomogenní jednorozměrná úloha s konstantním zdrojem tepla  $T_0$ , s homogenními podmínkami:**

$$u_t = a^2 u_{xx} + T_0, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell), \quad u(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = 0 = u(t, \ell). \quad (\text{B.88})$$

$$u(t, x) = TX, \quad X(x) = A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x, \quad X_k(x) = v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{B.89})$$

Zvolíme rovnici ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \quad (\text{B.90})$$

a pomocí další podmínky získáme nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici

$$C_k'(t) + a^2 \lambda_k C_k(t) = F_k(t), \quad \text{kde } F_k(t) \text{ je Fourierův koeficient nehomogenity.} \quad (\text{B.91})$$

Tuto rovnici dále řešíme:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \text{ a tedy } F_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(t, \xi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi = \\ &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} T_0 \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi = \frac{2T_0}{\ell} \frac{\ell}{k\pi} \left[-\cos\frac{k\pi}{\ell}\xi\right]_0^{\ell} = \frac{2T_0}{k\pi} [1 - (-1)^k]. \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

Nejdříve řešíme homogenní rovnici

$$C_k'(t) = -a^2 \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 C_k(t) \text{ a tedy } C_k(t) = K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}, \text{ z toho vyplývá} \quad (\text{B.93})$$

$$C_k'(t) = -\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + K'(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}. \quad (\text{B.94})$$

Dosazením do nehomogenní rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} -\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + K'(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + \left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} = \\ = \frac{2T_0}{k\pi} [1 - (-1)^k], \text{ z toho vyplývá } K'(t) = \frac{2T_0}{k\pi} [1 - (-1)^k] e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}. \end{aligned} \quad (\text{B.95})$$

$$K(t) = \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 \frac{2T_0}{k\pi} [1 - (-1)^k] e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + K_2. \quad (\text{B.96})$$

Z počáteční podmínky  $C_k(0) = 0$  vyplývá:

$$\begin{aligned} C_k(t) &= \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 \frac{2T_0}{k\pi} [1 - (-1)^k] + K_2 e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}, \text{ kde } C_k(0) = 0, \text{ tedy} \\ K_2 &= -\left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 \frac{2T_0}{k\pi} [1 - (-1)^k] = \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 \frac{2T_0}{k\pi} [(-1)^k - 1]. \end{aligned} \quad (\text{B.97})$$

Výsledná funkce bude mít tvar:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}\right) \frac{2T_0}{k\pi} \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 [1 - (-1)^k]}_{C_k(t)} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{B.98})$$

• **Nehomogenní jednorozměrná úloha s nekonstantním zdrojem tepla, homogenní podmínky:**

$$u_t = a^2 u_{xx} + tx, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell), \quad u(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = 0 = u(t, \ell), \quad (\text{B.99})$$

$$u(t, x) = TX, \quad X(x) = A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x, \quad X_k(x) = v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{B.100})$$

Opět řešíme rovnici ve tvaru:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \text{ tedy } C_k'(t) + a^2 \lambda_k C_k(t) = F_k(t). \quad (\text{B.101})$$

Tuto rovnici dále řešíme:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \text{ a tedy } F_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(t, \xi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi = \\ &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} t\xi \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi = \frac{2t}{\ell} \left\{ \left[ -\frac{\ell}{k\pi} \xi \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) \right]_0^{\ell} + \frac{\ell}{k\pi} \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi \right\} = \\ &= \frac{2t}{\ell} \frac{\ell^2}{k\pi} (-1)(-1)^k = \frac{2\ell t}{k\pi} (-1)^{k+1} = F_k(t). \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

Homogenní obyčejná diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} C_k'(t) + a^2 \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 C_k(t) &= 0 \text{ tedy } C_k(t) = K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}, \text{ z toho vyplývá} \\ C_k'(t) &= -\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + K'(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}. \end{aligned} \quad (\text{B.103})$$

Opět dosadíme do nehomogenní rovnice, dostáváme:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + K'(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + \left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} &= \frac{2\ell t}{k\pi} (-1)^{k+1}, \text{ a tedy} \\ K'(t) &= \frac{2\ell t}{k\pi} (-1)^{k+1} e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}. \end{aligned} \quad (\text{B.104})$$

$$K(t) = \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \int t e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} dt = \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left[ t \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} \right] - \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 \int e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} dt,$$

$$K(t) = \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left[ t \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} \right] - \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^4 e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + K_2. \quad (\text{B.105})$$

$$C_k(t) = K_2 e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left[ t \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 - \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^4 \right]. \quad (\text{B.106})$$

$$C_k(0) = 0, \text{ tedy } K_2 = \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^4, \text{ a tedy}$$

$$C_k(t) = \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^4 \left[ e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + t \left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 - 1 \right]. \quad (\text{B.107})$$

Výsledná funkce má tvar:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^4 \left[ e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + t \left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 - 1 \right] \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{B.108})$$

• **Nehomogenní jednorozměrná rovnice s nehomogenními podmínkami** (nástin řešení) :

$$u_t = a^2 u_{xx} + tx, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u(t, 0) = u_1(t), \quad u(t, \ell) = u_2(t). \quad (\text{B.109})$$

Funkci  $u(t, x)$  opět rozložíme:  $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$ , kde  $w$  bude splňovat okrajové podmínky.

$$v_t + w_t = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + f \text{ a tedy } v_t = a^2 v_{xx} + \underbrace{f + a^2 w_{xx} - w_t}_{\text{nehomogenita}}. \quad (\text{B.110})$$

$$\varphi(x) = v(0, x) + w(0, x) \text{ a tedy } v(0, x) = \varphi(x) - w(0, x). \quad (\text{B.111})$$

Pomocí funkcí  $v$  a  $w$  řešíme úlohu v principu stejně jako v předchozích případech.

## B.2.4 Jednoduché příklady prostorových úloh

- **Teplota v nekonečném rotačním válci** (použití Besselových funkcí) :

$$u_t = a^2 \left( u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho \right), \text{ radiální část laplaciánu ve válcových souřadnicích (A.46),} \quad (\text{B.112})$$

$$t > 0, \rho \in (0, c) \text{ kde } c \text{ je poloměr válce, } u(0, \rho) = f(\rho), u(t, 0) = 0 = u(t, c). \quad (\text{B.113})$$

Separací proměnných:

$$u = R(\rho)T(t) \text{ a tedy } \frac{T'}{a^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{R'}{R} = -\lambda^2, \quad (\text{B.114})$$

po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} \text{PS: } \rho R'' + R' + \lambda^2 \rho R &= 0, \\ \text{LS: } T' + a^2 \lambda^2 T &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.115})$$

Substitucí  $\lambda \rho = z$  dostáváme tzv. *Besselovu rovnici* s indexem  $\nu = 0$ ,

$$\frac{dR}{d\rho} = \lambda \frac{dR}{dz}, \quad \frac{d^2 R}{d\rho^2} = \lambda^2 \frac{d^2 R}{dz^2}, \text{ z toho vyplývá } z \frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{dR}{dz} + zR = 0, \quad (\text{B.116})$$

kdy obecná Besselova rovnice má tvar  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ . Jejím řešením je funkce

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \text{ z níž vyplývá } J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad (\text{B.117})$$

kde výraz  $\Gamma(\nu + k + 1)$  je tzv.  $\Gamma$  funkce, definovaná jako  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ . V našem případě dostáváme řešení PS ve tvaru

$$R(z) = J_0(z), \text{ a tedy } R(\rho) = J_0(\lambda\rho), \text{ a tedy } J_0(\lambda_n \rho) = R_n(\rho), \quad (\text{B.118})$$

s okrajovou podmínkou  $J_0(\lambda_n c) = 0$ , kde  $\lambda_n$  je kořenem této rovnice. Řešením LS bude funkce

$$T_n(t) = e^{-a^2 \lambda_n^2 t}. \quad (\text{B.119})$$

Pomocí tzv. Fourierova-Besselova rozvoje, definovaného jako  $\sum_{k=1}^{\infty} C_n J_\nu(\lambda_n x) = f(x)$  v každém bodě spojitosti funkce  $f(x)$ , získáme koeficient  $C_n$  (Fourierův-Besselův koeficient), kdy obecně platí:

$$C_n = \frac{2}{c^2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n c)} \int_0^c \xi J_\nu(\lambda_n \xi) f(\xi) d\xi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ v našem případě tedy} \quad (\text{B.120})$$

$$C_n = \frac{2}{c^2 J_1^2(\lambda_n c)} \int_0^c \xi J_0(\lambda_n \xi) f(\xi) d\xi. \quad (\text{B.121})$$

Výsledená funkce bude mít podobu

$$u(t, \rho) = \frac{2}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{J_1^2(\lambda_n c)} \int_0^c [\xi J_0(\lambda_n \xi) f(\xi) d\xi] e^{-a^2 \lambda_n^2 t}. \quad (\text{B.122})$$

• **Chladnutí koule** (homogenní rovnice) :

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ kde } R \text{ je poloměr koule,} \\ u(0, x, y, z) &= f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = f(r) \text{ a tedy } u(0, r) = f(r), \quad r \in (0, R), \\ u(t, x, y, z) &= u(t, r), \quad u(t, 0) = T_1, \quad u(t, R) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.123})$$

Jednotlivé parciální derivace budou:

$$u_x = u_r r_x + \underbrace{u_\varphi \varphi_x + u_\vartheta \vartheta_x}_0, \quad \text{z toho vyplývá } u_x = u_r \frac{x}{r}, \quad (\text{B.124})$$

$$u_{xx} = u_{rr} \frac{x^2}{r^2} + u_r \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = u_{rr} \frac{x^2}{r^2} + u_r \frac{r^2 - x^2}{r^3}, \quad (\text{B.125})$$

$$\Delta u = u_{rr} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + u_r \frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r, \quad \text{z toho vyplývá} \quad (\text{B.126})$$

$$u_t = a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) \quad (\text{sférická radiální část Laplaciánu - viz rovnice (A.72)}). \quad (\text{B.127})$$

Pomocí substituce  $v(r) = ru(r)$  a tedy  $u = v/r$  dostáváme:

$$u_t = \frac{1}{r} v_t, \quad u_r = -\frac{1}{r^2} v + \frac{1}{r} v_r, \quad u_{rr} = \frac{2}{r^3} v - \frac{1}{r^2} v_r - \frac{1}{r^2} v_r + \frac{1}{r} v_{rr} = \frac{2}{r^3} v - \frac{2}{r^2} v_r + \frac{1}{r} v_{rr}, \quad (\text{B.128})$$

$$u_t = a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right), \quad \text{tedy } \frac{1}{r} v_t = a^2 \left( \frac{2}{r^3} v - \frac{2}{r^2} v_r + \frac{1}{r} v_{rr} - \frac{2}{r^3} v + \frac{2}{r^2} v_r \right), \quad \text{a tedy} \quad (\text{B.129})$$

$$v_t = a^2 v_{rr}, \quad \text{kde } v(0, r) = r f(r) \quad v(t, 0) = r T_1, \quad v(t, R) = 0. \quad (\text{B.130})$$

Pomocí linearizace  $u = z + w$  dále dostáváme:

$$u(0, r) = f(r), \quad \text{tedy } z(0, r) = u(0, r) - w(r), \quad (\text{B.131})$$

$$w(r) = T_1 - \frac{T_1}{R} r, \quad z(0, r) = f(r) - T_1 + \frac{T_1}{R} r, \quad \tilde{z}(0, r) = r z(0, r). \quad (\text{B.132})$$

$$v(0, r) = r f(r), \quad \text{tedy } \tilde{z}(0, r) = r \left[ f(r) - T_1 + \frac{T_1}{R} r \right] \text{ dává:} \quad (\text{B.133})$$

$$v = ru = r(z + w), \quad z_t = a^2 z_{rr}, \quad z(t, 0) = z(t, R) = 0, \quad z = TX, \quad \text{a tedy} \quad (\text{B.134})$$

$$z(t, r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(\frac{ak\pi}{R})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{R} r\right). \quad (\text{B.135})$$

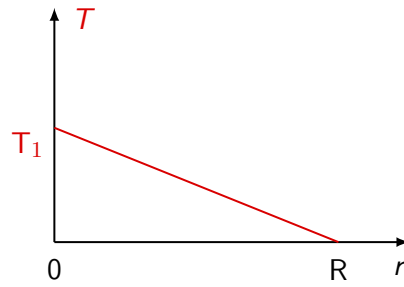
Fourierův koeficient bude mít tvar:

$$C_k = \frac{2}{R} \int_0^R r \left[ f(r) - T_1 + \frac{T_1}{R} r \right] \sin\left(\frac{k\pi}{R} r\right) dr. \quad (\text{B.136})$$

Výsledná funkce bude mít tvar:

$$u(t, r) = \underbrace{T_1 - \frac{T_1}{R} r}_w + \frac{2}{R} \int_0^R \left[ f(r) - T_1 + \frac{T_1}{R} r \right] \times \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\frac{ak\pi}{R})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{R} r\right) dr. \quad (\text{B.137})$$



Obrázek B.2: Schématické znázornění průběhu funkce  $w(r)$ .

### B.2.5 Řešení hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic Fourierovou metodou

Následující dva jednoduché řešené příklady ilustrují princip použití této metody v případě hyperbolických PDR:

- **Homogenní vlnová rovnice :**

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle, \quad (\text{B.138})$$

s Cauchyho počátečními podmínkami (viz odstavec 3.1.1)

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (\text{B.139})$$

a s Newtonovými okrajovými podmínkami (viz odstavec 3.2.1), kde  $\alpha, \beta \neq 0$ ,

$$\alpha u(t, 0) + \beta u_x(t, 0) = 0, \quad \alpha u(t, \ell) + \beta u_x(t, \ell) = 0. \quad (\text{B.140})$$

Separací proměnných:

$$u(t, x) = T(t)X(x) \text{ a tedy } \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad (\text{B.141})$$

po úpravě dostáváme

$$\text{LS: } T'' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad \text{PS: } X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (\text{B.142})$$

Z rovnice (B.142) dostáváme

$$T_k(t) = a_k \cos(\lambda_k a t) + b_k \sin(\lambda_k a t), \quad X_k(x) = c_k \cos(\lambda_k x) + d_k \sin(\lambda_k x), \quad (\text{B.143})$$

Obdobným způsobem jako v rovnici (B.62) dostáváme z Newtonových okrajových podmínek (B.140)

$$\alpha + \beta \lambda = 0, \quad \beta - \alpha \lambda = \beta^2 + \alpha^2 \neq 0, \quad \text{z toho vyplývá } \sin(\lambda_k x) = 0, \quad \text{a tedy } \lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}. \quad (\text{B.144})$$

Pro prostorovou funkci tedy dostáváme řešení (viz rovnice (B.63))

$$X_k = c_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) + d_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right). \quad (\text{B.145})$$

Obecné řešení lze tedy zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{\ell}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{\ell}t\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right]. \quad (\text{B.146})$$

Z Cauchyho počáteční podmínky (B.139) dostáváme

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[ \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right] = \varphi(x) \quad (\text{B.147})$$

a z podmínky (B.139) dostáváme

$$u_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{\ell} B_k \left[ \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right] = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{\ell} B_k v_k. \quad (\text{B.148})$$

Fourierovy koeficienty  $A_k$ ,  $B_k$  najdeme z rovnic (B.147) a (B.148) (viz také rovnice (B.66)),

$$A_k = \frac{1}{\|v_k\|^2} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) v_k(\xi) d\xi, \quad B_k = \frac{\ell}{ak\pi\|v_k\|^2} \int_0^{\ell} \psi(\xi) v_k(\xi) d\xi. \quad (\text{B.149})$$

Normu  $\|v_k\|$  funkce  $v_k$  řešíme jako normu spojitě definovaného vektoru (viz rovnice (2.1)), tedy

$$\|v_k\|^2 = \int_0^{\ell} v_k^2(\xi) d\xi = \int_0^{\ell} \left[ \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) \right]^2 d\xi = \int_0^{\ell} d\xi = \ell. \quad (\text{B.150})$$

Po dosazení dostáváme rovnici (B.146) ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right] \times \left[ \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) v_k(\xi) \cos\left(\frac{ak\pi}{\ell}t\right) d\xi + \frac{1}{ak\pi} \int_0^{\ell} \psi(\xi) v_k(\xi) \sin\left(\frac{ak\pi}{\ell}t\right) d\xi \right]. \quad (\text{B.151})$$

• **Nehomogenní vlnová rovnice s homogenními počátečními podmínkami :**

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f \quad (\text{kde } f \text{ je zdroj energie vlnění}), \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle, \quad (\text{B.152})$$

s homogenními Cauchyho počátečními podmínkami (viz odstavec 3.1.1)

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0 \quad (\text{B.153})$$

a s Newtonovými okrajovými podmínkami (viz odstavec 3.2.1), kde  $\alpha, \beta \neq 0$ ,

$$\alpha u(t, 0) + \beta u_x(t, 0) = 0, \quad \alpha u(t, \ell) + \beta u_x(t, \ell) = 0. \quad (\text{B.154})$$

Obdobně jako v předchozím příkladu:

$$u(t, x) = TX, \quad X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x), \quad X_k(x) = v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{B.155})$$

Zvolíme rovnici ve tvaru:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right). \quad (\text{B.156})$$

Pomocí další podmínky získáme nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici:

$$C_k''(t) + a^2 \lambda_k^2 C_k(t) = F_k(t) \text{ kde } F_k(t) \text{ je tzv. Fourierův koeficient nehomogenity,} \quad (\text{B.157})$$

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \text{ a tedy } F_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(t, \xi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \xi\right) d\xi. \quad (\text{B.158})$$

Dále bychom museli řešit nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu (B.157) (například metodou variace konstant - viz oddíl 3.2.1) pro konkrétní funkci  $F_k(t)$ . Zahrnutím počátečních podmínek (B.153) dostáváme řešení rovnice (B.157) alespoň v obecné integrální podobě:

$$C_k(t) = \frac{\ell}{ak\pi} \int_0^t F_k(\sigma) \sin\left[\frac{ak\pi}{\ell} (t - \sigma)\right] d\sigma. \quad (\text{B.159})$$

Jejím dosazením do rovnice obecného řešení (B.156) dostaneme (viz řešení rovnice obdobného typu v případě parabolických parciálních diferenciálních rovnic v oddíle B.2.3):

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell}{ak\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \int_0^t F_k(\sigma) \sin\left[\frac{ak\pi}{\ell} (t - \sigma)\right] d\sigma. \quad (\text{B.160})$$

## B.2.6 Ukázka možných způsobů řešení jednoduchých eliptických parciálních diferenciálních rovnic

Následující řešené příklady demonstrují některé základní způsoby počítání eliptických PDR:

### • Laplaceova rovnice :

Laplaceova rovnice je v kartézských souřadnicích v nejjednodušší formě definovaná ve tvaru

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0. \quad (\text{B.161})$$

V tomto příkladu budeme řešit Laplaceovu rovnici na obdélníkové oblasti s rozměry  $a, b$ , se smíšenými Dirichletovými a Neumannovými podmínkami (viz odstavec 3.2.1), v podobě

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0 \quad (y \neq 0), \quad u_y(x, b) = u_0 \sin\left(\frac{\pi}{2a} x\right) \quad (x \neq 0). \quad (\text{B.162})$$

Separací proměnných  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  dostáváme rovnici

$$X''Y + XY'' = 0 \text{ a tedy } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda, \quad (\text{B.163})$$

kde konstanta  $\lambda$  může nabývat hodnot  $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\lambda < 0$ .

1.  $\lambda = 0$ : Budeme předpokládat separované funkce  $X(x)$  a  $Y(y)$  ve tvaru polynomů, vzhledem k okrajovým podmínkám budou dostatečné polynomy 1. stupně, tedy  $X(x) = Ax + B$ ,  $Y(y) = Cy + D$ . Z okrajové podmínky  $u(0, y) = 0$  vyplývá  $B = 0 \vee C = D = 0$ , pokud ovšem  $C = D = 0$ , potom  $Y(y) = 0$  a tedy  $u(x, y) = 0$  všude. Pokračujeme-li s  $B = 0$ , dostáváme  $Ax(Cy + D) = 0$  a tedy, zahrneme-li další okrajovou podmínku  $u(x, 0) = 0$ , musí být  $AxD = 0$ . Příklad  $A = 0$  dává  $X(x) = 0$ , tedy  $u(x, y) = 0$  všude. Uvažujeme-li také  $D = 0$ , potom  $u(x, y) = ACy = 0$ , z další okrajové podmínky  $u_x(a, y) = 0$  vyplývá  $ACy = 0$ , tedy  $A = 0 \vee C = 0$ , v obou případech ovšem  $u(x, y) = 0$ . Příklad  $\lambda = 0$  dává tedy pouze triviální řešení.

2.  $\lambda > 0$ : Z rovnice (B.163) dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$u(x, y) = \left[ A \cosh(\sqrt{\lambda}x) + B \sinh(\sqrt{\lambda}x) \right] \left[ C \cos(\sqrt{\lambda}y) + D \sin(\sqrt{\lambda}y) \right]. \quad (\text{B.164})$$

Z okrajové podmínky  $u(0, y) = 0$  vyplývá  $A[C \cos(\sqrt{\lambda}y) + D \sin(\sqrt{\lambda}y)] = 0$ , tedy  $C = D = 0$ , potom ovšem  $Y(y) = 0$  a tedy  $u(x, y) = 0$  všude. Pokračujeme-li s  $A = 0$ , dostáváme  $u(x, y) = B \sinh(\sqrt{\lambda}x)[C \cos(\sqrt{\lambda}y) + D \sin(\sqrt{\lambda}y)]$ . Zahrneme-li další okrajovou podmínku  $u(x, 0) = 0$ , musí být  $BC \sinh(\sqrt{\lambda}x) = 0$ . Příklad  $B = 0$  dává  $X(x) = 0$ , tedy  $u(x, y) = 0$  všude. Pokračujeme-li s  $C = 0$ , potom  $u(x, y) = BD \sinh(\sqrt{\lambda}x) \sin(\sqrt{\lambda}y)$  a z další okrajové podmínky  $u_x(a, y) = 0$  vyplývá  $\sqrt{\lambda}BD \cosh(\sqrt{\lambda}a) \sin(\sqrt{\lambda}y) = 0$ , tedy  $B = 0 \vee D = 0$ , v obou případech ovšem  $u(x, y) = 0$ . Příklad  $\lambda > 0$  dává tedy také pouze triviální řešení.

3.  $\lambda < 0$ : Z rovnice (B.163) dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$u(x, y) = \left[ A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \right] \left[ C \cosh(\sqrt{\lambda}y) + D \sinh(\sqrt{\lambda}y) \right]. \quad (\text{B.165})$$

Z okrajové podmínky  $u(0, y) = 0$  vyplývá  $A[C \cosh(\sqrt{\lambda}y) + D \sinh(\sqrt{\lambda}y)] = 0$ , tedy  $C = D = 0$ , potom  $Y(y) = 0$  a tedy  $u(x, y) = 0$  všude. Pokračujeme s  $A = 0$ , dostáváme  $u(x, y) = B \sin(\sqrt{\lambda}x)[C \cosh(\sqrt{\lambda}y) + D \sinh(\sqrt{\lambda}y)]$ . Zahrneme-li další okrajovou podmínku  $u(x, 0) = 0$ , musí být  $BC \sin(\sqrt{\lambda}x) = 0$ . Příklad  $B = 0$  dává  $X(x) = 0$ , tedy  $u(x, y) = 0$  všude. Pokračujeme-li s  $C = 0$ , potom  $u(x, y) = BD \sin(\sqrt{\lambda}x) \sinh(\sqrt{\lambda}y)$  a z další okrajové podmínky  $u_x(a, y) = 0$  vyplývá  $\sqrt{\lambda}BD \cos(\sqrt{\lambda}a) \sinh(\sqrt{\lambda}y) = 0$ , tedy  $B = 0 \vee D = 0$  (v obou případech ovšem  $u(x, y) = 0$ )  $\vee \cos(\sqrt{\lambda}a) = 0$ . Poslední případ dává řešení

$$\cos(\sqrt{\lambda}a) = 0, \text{ tedy } \sqrt{\lambda} = \frac{(2k-1)\pi}{2a} \text{ a tedy}$$

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2a} x \right] \sinh \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2a} y \right], \text{ kde } K_k = BD. \quad (\text{B.166})$$

Uplatníme-li také čtvrtou okrajovou podmínku, dostáváme

$$u_0 \sin \frac{\pi}{2a} x = \sum_{k=1}^{\infty} K_k \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2a} x \right] \sinh \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2a} b \right]. \quad (\text{B.167})$$

Z argumentů funkce sinus vyplývá řešení pouze pro  $k = 1$ , tedy  $K_1 = u_0 / \sinh[\pi b / (2a)]$ . Výsledné řešení se zahrnutím všech okrajových podmínek bude

$$u(x, y) = u_0 \left[ \sinh \left( \frac{\pi b}{2a} \right) \right]^{-1} \sin \left( \frac{\pi x}{2a} \right) \sinh \left( \frac{\pi y}{2a} \right). \quad (\text{B.168})$$

Další typickou eliptickou parciální diferenciální rovnicí může být například tzv. *Poissonova rovnice* typu  $\Delta u(x, y) = f(x, y)$ , tedy nehomogenní eliptická rovnice, nejčastěji používaná ve formě gravitační Poissonovy rovnice,  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ , kde  $\Phi$  je gravitační potenciál,  $\rho$  je hustota hmoty a  $G$  je gravitační konstanta, nebo Poissonovy rovnice elektrostatického potenciálu,  $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon$ , kde  $\rho$  je hustota elektrického náboje a  $\epsilon$  je permitivita. Řešení vícerozměrné Poissonovy rovnice je analogické k řešení Laplaceovy rovnice a také například k řešení nehomogenní hyperbolické parciální diferenciální rovnice:

• **Poissonova rovnice s konstantní pravou stranou:**

Řešme jednoduchou rovnici, definovanou na oblasti  $x > y^2$ , tj. na oblasti ohraničené parabolou  $x = y^2$  s vrcholem v bodě  $(0, 0)$ , jejíž osu tvoří kladná část osy  $x$ ,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 2, \quad (\text{B.169})$$

s Dirichletovou podmínkou na hranici oblasti,  $u(y^2, y) = 0$ . Předpokládejme řešení ve formě všech členů polynomu 2. stupně s neurčitými koeficienty,

$$u(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2, \quad (\text{B.170})$$

kdy po jeho parciálním derivování ve smyslu rovnice (B.169) snadno zjistíme:  $F = 1 - D$ . Po dosazení okrajové podmínky, tedy z rovnice

$$A + Cy + (B - D + 1)y^2 + Ey^3 + Dy^4 = 0, \quad (\text{B.171})$$

dostáváme nenulové hodnoty koeficientů pouze pro  $B = -1$ ,  $F = 1$ . Hledaná rovnice tedy bude

$$u(x, y) = y^2 - x. \quad (\text{B.172})$$

• **Poissonova rovnice s konstantní pravou stranou na kruhové oblasti, s nehomogenní okrajovou podmínkou:**

Uvnitř kruhové oblasti s poloměrem  $R$  platí následující rovnice,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 4, \quad (\text{B.173})$$

kdy na hranici oblasti platí Dirichletova podmínka  $u(x, y_1) = 1$ , z níž vyplývá  $y_1 = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ . Analogicky k parabolickým rovnicím s nehomogenními okrajovými podmínkami rozdělíme hledanou funkci  $u(x, y)$  na součet dvou funkcí, například  $U(x, y)$  a  $v(x, y)$ , pro které bude platit:

$$u(x, y) = U(x, y) + v(x, y), \quad U_{xx} + U_{yy} = 4, \quad U(x, y_1) = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad v(x, y_1) = 1. \quad (\text{B.174})$$

Obdobně jako v předchozím případě předpokládáme pro každou funkci úplný polynom 2. stupně s neurčitými koeficienty,

$$U(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2, \quad (\text{B.175})$$

$$v(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2, \quad (\text{B.176})$$

což dává  $F = 2 - D$ ,  $f = -d$ . Po dosazení okrajové podmínky můžeme rovnice (B.175) a (B.176) přepsat ve tvaru

$$A + Bx \pm (C + Ex) \sqrt{R^2 - x^2} + 2(D - 1)x^2 + (2 - D)R^2 = 0, \quad (\text{B.177})$$

$$a + bx \pm (c + ex) \sqrt{R^2 - x^2} + 2dx^2 - dR^2 = 1, \quad (\text{B.178})$$

jednotlivé nenulové koeficienty budou:  $A = -R^2$ ,  $D = 1$ ,  $F = 1$ ,  $a = 1$ . Po sečtení rovnic (B.177) a (B.178) dostáváme hledanou výslednou funkci

$$u(x, y) = 1 - R^2 + x^2 + y^2. \quad (\text{B.179})$$

• **Poissonova rovnice s obecnou pravou stranou, Newtonovy okrajové podmínky:**

Řešme obdobným způsobem Poissonovu rovnici ve tvaru

$$u_{xx}(x, y) + 4u_{yy}(x, y) = xy, \quad (\text{B.180})$$

s okrajovými podmínkami  $u(0, y) = y^2$ ,  $u_x(0, y) = 0$ . Abychom po derivování dostali členy potřebného stupně, musíme nyní ovšem předpokládat řešení ve tvaru úplného polynomu 4. stupně s neurčitými koeficienty,

$$u(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Jy^3 + Kx^4 + Lx^3y + Mx^2y^2 + Nxy^3 + Qy^4. \quad (\text{B.181})$$

Příslušné druhé derivace tedy v tomto případě budou

$$u_{xx} = 2D + 6Gx + 2Hy + 12Kx^2 + 6Lxy + 2My^2, \quad (\text{B.182})$$

$$u_{yy} = 2F + 6Ix + 6Jy + 2Mx^2 + 6Nxy + 12Qy^2. \quad (\text{B.183})$$

Pro jednotlivé koeficienty dostáváme

$$D = -4F, G = -\frac{4}{3}I, H = -12J, K = -\frac{2}{3}M, L = \frac{1 - 24N}{6}, M = -24Q. \quad (\text{B.184})$$

Dosazením Dirichletovy okrajové podmínky dostáváme  $A = 0$ ,  $C = 0$ ,  $F = 1$ ,  $J = 0$ ,  $Q = 0$ , z relací (B.184) ihned vyplývá  $D = -4$ ,  $H = 0$ ,  $K = 0$ ,  $M = 0$ . Dosazením Neumannovy okrajové podmínky dostáváme  $B = 0$ ,  $E = 0$ ,  $I = 0$ ,  $N = 0$ , z relací (B.184) následně vyplývá  $G = 0$ ,  $L = 1/6$ . Dosazením nenulových koeficientů do rovnice (B.181) dostáváme hledanou výslednou funkci,

$$u(x, y) = -4x^2 + y^2 + \frac{1}{6}x^3y. \quad (\text{B.185})$$

Podrobně je tato problematika popsána např. v učebnici Franců (2011).

## Příloha C

# Praktické základy numerických výpočtů

Smyslem této kapitoly není podávat systematický popis základních metod numerické matematiky, v tomto směru odkazují zájemce například na skriptum [Humlíček \(2009\)](#) nebo odpovídající učebnice (například [Příkrýl, 1985](#); [Vitásek, 1987](#); [Čermák & Hlavička, 2006](#), atd), ale pouze stručně a názorně ilustrovat některé principy a možné postupy při praktickém numerickém modelování nejčastěji se v praxi vyskytujících (a výše popsaných) analytických okruhů. Vybrané příklady jednoduchého modelování jsou také doprovázeny ukázkami programovacích skriptů pro daný konkrétní problém, případně obrázky a grafy výsledných modelů.

Rozsáhlé využívání numerické matematiky ve většině přírodních a technických disciplín přineslo také tvorbu celé řady hotových knihoven, rozepsaných do hlavních programových jazyků; jejich přehledné úložiště se nachází například na stránkách GAMS (Guide to Available Mathematical Software) <http://gams.nist.gov/>. Některé z nich jsou komerční (a poměrně komplexní), například NAG (Numerical Algorithmus Group) <https://www.nag.com/content/nag-library> nebo IMSL (International Mathematics and Statistics Library) <http://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries>, jiné jsou volně dostupné a bývají zpravidla zaměřené na specifickou oblast, například FFTPACK <http://www.netlib.org/fftpack/> - (rychlá) Fourierova transformace, LAPACK (viz odstavec C.1) - lineární algebra, MINPACK <http://www.netlib.org/minpack/> - nelineární rovnice, atd. Jejich úplná nebo i částečná implementace do vlastních algoritmů může výrazně urychlit a usnadnit jejich tvorbu i kvalitu.

### C.1 Numerické metody lineární algebry

V tomto oddíle nebudeme probírat jednotlivé metody numerických řešení lineární algebry, k základům tohoto tématu existuje rozsáhlá literatura (např. [Humlíček \(2009\)](#)), popisující jak vlastní numerické rovnice tak jejich stabilitu a *podmíněnost* (tj. zejména stanovení přesnosti numerických maticových algoritmů), odhady chyb, atd. V současnosti existuje řada hotových balíčků (procedur), sestávajících z jednotlivých podprogramů (knihoven), určených pro řešení dílčích nebo i kombinovaných algebraických úloh (například řešení soustav lineárních rovnic, řešení tzv. *tridiagonálních* matic (tj. matic s nenulovými prvky pouze na hlavní a obou sousedních diagonálách), hledání determinantů, inverzních matic, vlastních hodnot a vlastních vektorů, atd. Jedním z nejvýkonnějších takových balíčků, který zde podrobněji představíme, je programový balíček LAPACK (Linear Algebra PACKage, [Anderson et al. \(1999\)](#)), který se vyvinul ze starších balíčků EISPACK a LINPACK a je určen pro fortran 77, fortran 90, existují

také C++ verze. Existují rozšířené verze tohoto balíčku nebo další knihovny na něm postavené, se zabudovanými podprogramy pro paralelizaci na výkonných počítačových clusterech (viz odstavec C.5), například ScaLAPACK, MAGMA, MORSE, CHAMELEON, atd.

Programový balíček LAPACK je volně dostupná softwarová knihovna, její instalaci provedeme buď ze softwarového centra používané systémové distribuce, nebo z adresy <http://www.netlib.org/lapack>. Při překladu (kompilaci) používaného programového souboru zadáme odkaz na LAPACK, například: `gfortran název_souboru.f95 -llapack`. Popis jednotlivých podprogramů a jejich využití (např. knihovna DGBSV pro řešení soustav reálných lineárních rovnic o libovolném počtu proměnných nebo DGTSV, vhodná pro řešení tridiagonálních matic, atd.) jsou dostupné v uživatelských příručkách, například v Anderson et al. (1999).

- Ukázka schématu podprogramu DGBSV, určeného pro řešení soustavy lineárních rovnic (příklad):

**N** (vstup, INTEGER) = počet rovnic = řád čtvercové matice A,  $N \geq 0$ .

**KL** (vstup, INTEGER) = počet spodních diagonál matice A,  $KL \geq 0$ .

**KU** (vstup, INTEGER) = počet horních diagonál matice A,  $KU \geq 0$ .

**NRHS** (vstup, INTEGER) = počet sloupců pravé strany (tj. matice B),  $NRHS \geq 0$ .

**AB** (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze (LDAB,N).

Na vstupu: matice A v pásovém uložení, v řádcích od  $KL+1$  do  $2*KL+KU+1$ ; řádky 1 až KL pole nemusí být vypsány. j-tý sloupec pole A je uložen jako j-tý sloupec pole AB následovně:  $AB(KL+KU+1+i-j, j) = A(i,j)$  pro  $\max(1, j-KU) \leq i \leq \min(N, j+KL)$ .

Na výstupu: detaily faktorizace - matice U je uložena jako horní trojúhelníková pásová matice s  $KL+KU$  horními diagonálami v řádcích od 1 do  $KL+KU+1$ , multiplikátory M, použité během faktorizace jsou uchovány v řádcích od  $KL+KU+2$  do  $2*KL+KU+1$  (viz schéma níže).

**LDAB** (vstup, INTEGER) = určující dimenze pole AB.  $LDAB \geq 2*KL+KU+1$ .

**IPIV** (výstup, INTEGER) = pole dimenze (N), indexy pivotů, které definují permutační matici; i-tý řádek matice byl zaměněn za řádek IPIV(i).

**B** (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze (LDB, NRHS), na vstupu je N : NRHS matice pravé strany B. Na výstupu, pokud INFO = 0, je N : NRHS řešení matice X.

**LDB** (vstup, INTEGER) = určující dimenze pole B.  $LDB \geq \max(1, N)$ .

**INFO** (výstup, INTEGER) = 0: úspěšný výstup, < 0: pokud INFO = -i, pak i-tý argument má nepovolenou hodnotu, > 0: pokud INFO = i, U(i,i) je přesně 0. Faktorizace je ukončena, ale faktor U je přesně singulární, řešení nemohlo být vypočteno.

DALŠÍ DETAILS:



Schéma pásového uložení je ilustrováno na následujícím příkladu, kdy  $M = N = 6$ ,  $KL = 2$ ,  $KU = 1$ :

Na vstupu:						Na výstupu:					
*	*	*	+	+	+	*	*	*	u14	u25	u36
*	*	+	+	+	+	*	*	u13	u24	u35	u46
*	a12	a23	a34	a45	a56	*	u12	u23	u34	u45	u56
a11	a22	a33	a44	a55	a66	u11	u22	u33	u44	u55	u66
a21	a32	a43	a54	a65	*	m21	m32	m43	m54	m65	*
a31	a42	a53	a64	*	*	m31	m42	m53	m64	*	*

Prvky pole označené \* nejsou používány ve výpočetním procesu; prvky označené + nemusí být uvedeny na vstupu, ale jsou nutné ve výpočetním procesu pro uložení prvků pole U z důvodu nedostatku místa, vyplývajícího z výměny řádků.

- Ukázka schématu podprogramu DGTSV, určeného pro řešení tridiagonálních matic:

N (vstup, INTEGER) = počet rovnic = řád čtvercové tridiagonální matice A,  $N \geq 0$ .

NRHS (vstup, INTEGER) = počet sloupců pravé strany (tj. matice B),  $NRHS \geq 0$ .

DL (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = na vstupu pole prvků spodní (sub) diagonály matice A, dimenze N-1, na výstupu je toto pole přepsáno N-2 prvky druhé horní diagonály horní trojúhelníkové matice U, dané LU faktorizací.

D (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze N, na vstupu obsahuje diagonální prvky matice A, na výstupu je toto pole přepsáno diagonálními prvky matice U.

DU (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze N-1, na vstupu obsahuje N-1 prvků horní (super) diagonály matice A, na výstupu je toto pole přepsáno N-1 prvky první horní diagonály horní trojúhelníkové matice U.

B (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze (LDB, NRHS), na vstupu je N : NRHS matice pravé strany B. Na výstupu, pokud INFO = 0, je N : NRHS řešení matice X.

LDB (vstup, INTEGER) = určující dimenze pole B.  $LDB \geq \max(1, N)$ .

INFO (výstup, INTEGER) = 0: úspěšný výstup, < 0: pokud INFO = -i, pak i-tý argument má nepovolenou hodnotu, > 0: pokud INFO = i, U(i,i) je přesně 0. Faktorizace je ukončena, ale faktor U je přesně singulární, řešení nemohlo být vypočteno.

Obdobným způsobem jsou sestaveny i ostatní knihovny. Příklady řešení a programových skriptů s odkazem na LAPACK uvádíme v dalších odstavcích C.2.1, C.2.2, C.2.3, C.2.4, C.4.1, C.4.7, atd.

## C.2 Interpolace a regrese

Interpolací rozumíme nahrazení složitější funkční závislosti závislostí jednodušší, tedy aproximace dané funkce jinou vhodnou funkcí. Interpolací rozumíme interpolaci diskrétní funkce, tj. funkce, dané konečným souborem bodů definičního oboru a jim přiřazených funkčních hodnot (reprezentovaných zpravidla tabulkou), pomocí funkce, nabývající v těchto bodech stejných hodnot jako původní zadaná funkce. Nejvhodnějšími interpolačními funkcemi jsou

polynomy, např. tzv. *Lagrangeův* a *Newtonův* interpolační polynom (Humlčec, 2009; Vitásek, 1987) nebo tzv. *splajny*. V následujícím odstavci C.2.1 je stručně ukázán často používaný tzv. *kubický interpolační splajn*.

Regresí (*regresní analýzou*) nazýváme hledání takové funkce (tzv. *regresní funkce*), která nejlépe vystihuje vztah mezi dvěma skupinami proměnných, např. závislost náhodných veličin (naměřených hodnot) na čase, atd. Předem je dáno, která proměnná je nezávislá (vysvětlující nebo také regresor) a která je závislá (vysvětlovaná nebo také odezva). Jednoduchá regrese popisuje závislost odezvy na jednom regresoru, naproti tomu vícenásobná regrese popisuje situaci, kdy odezva závisí na více regresorech. Podle charakteru a průběhu zkoumané závislosti volíme typ *regresního modelu*, například *lineární regresi* (proložení závisle proměnných hodnot přímkou), *regresi polynomem  $n$ -tého stupně*, atd., a také nejvhodnější statistickou metodu, například *metodu nejmenších čtverců* nebo tzv. *robustní regresi*, která eliminuje extrémně vychýlené hodnoty, atd. (viz také pojmy a statistické metody, uvedené v kapitole 12 nebo například na stránkách <http://physics.muni.cz/~mikulas/zvc.html>).

### C.2.1 Kubický interpolační splajn

(z anglického *spline*) je jednou z nejčastěji používaných interpolačních funkcí. Jedná se o tzv. *po částech* (piecewise) interpolační polynom 3. stupně  $s_i$  ve tvaru

$$S(x) = s_1(x) \text{ pro } x_1 \leq x < x_2, s_2(x) \text{ pro } x_2 \leq x < x_3, \dots, s_{n-1}(x) \text{ pro } x_{n-1} \leq x < x_n, \quad (\text{C.1})$$

definovaný jako

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad (\text{C.2})$$

jehož druhé derivace označíme jako  $M_i$ . Je to tedy soustava kubických funkcí, které na sebe v zadaných bodech  $[x_i, y_i]$  navazují jak funkční hodnotou, tak první a druhou derivací. Podle okrajových podmínek rozlišujeme různé typy těchto splajnů, například tzv. *přirozený splajn* je určen okrajovými podmínkami  $M_1 = M_n = 0$ , *parabolický ukončený splajn* je určen okrajovými podmínkami  $M_1 = M_2, M_n = M_{n-1}$  (extrapolace nultého řádu), *kubický ukončený splajn* je určen okrajovými podmínkami  $M_1 = 2M_2 - M_3, M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$  (extrapolace 1. řádu nebo také lineární extrapolace), atd.

Z podmínek spojitosti funkčních hodnot i prvních a druhých derivací v bodech  $x_i$ , vyplývá pro  $i = 0, \dots, n - 1$  následující:

$$s_i(x_i) = y_i, \quad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad (\text{C.3})$$

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) = c_i, \quad s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i) = M_i = 2b_i, \quad (\text{C.4})$$

tyto vnitřní podmínky jsou dále doplněny dvěma uvedenými okrajovými podmínkami, danými typem splajnu. Porovnáním všech uvedených podmínek ve všech uzlových bodech  $[x_i, y_i]$  dostáváme soustavu lineárních rovnic pro neznámé druhé derivace  $M_i$  ve vnitřních uzlových bodech:

$$(x_{i+1} - x_i) M_{i+1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) M_i + (x_i - x_{i-1}) M_{i-1} = 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right). \quad (\text{C.5})$$

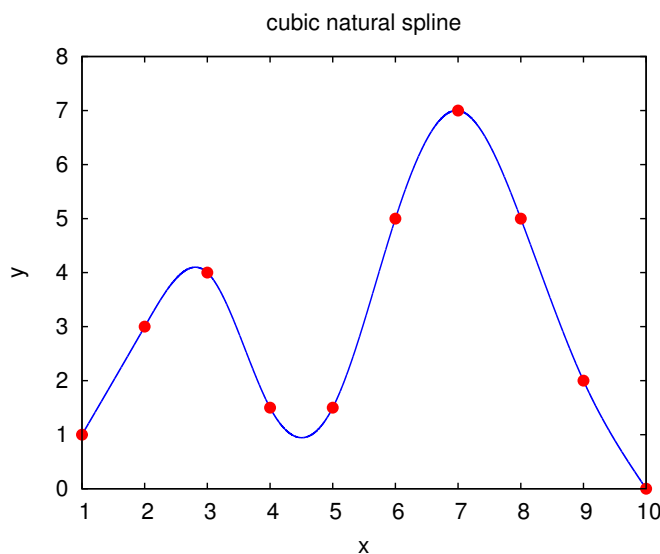
Tuto soustavu rovnic lze zapsat pomocí tzv. *tridiagonální matice* ve tvaru (kde zavedeme  $\Delta x_i =$



```

integer :: INFO, KL, KU, LDAB, LDB, N, RHS !deklarace celočíselných proměnných pro-
                                         !cedury LAPACK - viz sekce C.1.
parameter(KL=np-3, KU=np-3, N=np-2, KUKL=KL+KU+1, LDAB=2*KL+KU+1, &
          LDB=N, RHS=1)                    !zadání fixních hodnot celočíselných para-
                                         !metrů
integer :: IPIV(N)                        !zadání parametru jako pole o N prvcích
double precision, dimension(np) :: x, y !deklarace reálných veličin x, y jako pole
                                         !(vektoru) o np prvcích s tzv. dvojitou
                                         !přesností, umožňující výpočet čísla na 16
                                         !desetinných míst a do mocniny cca 10300
                                         !(v závislosti na parametrech počítače).
double precision, dimension(np) :: M(N,N), AB(LDAB,N), B(LDB,RHS)
                                         !zadání parametrů jako dvojrozměrných
                                         !polí
double precision :: f(np), res(np), a(np), b(np), c(np), d(np)
                                         !jiný způsob deklarace reálných veličin jako
                                         !pole (vektoru) o np prvcích s dvojitou
                                         !přesností.
double precision :: h                    !deklarace reálných skalárních veličin.
parameter (h=1.d0)                        !zadání fixní hodnoty intervalu nezávisle
                                         !proměnné, kterou nelze v programu dále
                                         !měnit!
x=(/(1.d0*i, i=1,np)/)                    !vektor hodnot nezávisle proměnné.
y=(/1.d0, 3.d0, 4.d0, 1.5d0, 1.5d0, 5.d0, 7.d0, 5.d0, 2.d0, 0.d0/)
                                         !y-ové (naměřené) hodnoty, np = počet
                                         !naměřených hodnot
do i=1,N                                  !cyklus výpočtu druhých derivací M, zápis
                                         !tridiagonální matice
  do j=1,N
    if(j.eq.i)then
      M(i,j)=4.d0
    elseif(j.eq.i-1)then
      M(i,j)=1.d0
    elseif(j.eq.i+1)then
      M(i,j)=1.d0
    else
      M(i,j)=0.d0
    endif
  end do
end do
do i=1,N                                  !výpočetní cyklus procedury LAPACK
  do j=1,N
    AB(KUKL+i-j, j)=M(i,j)
  end do
end do
do i=1,N                                  !výpočet pravé strany
  B(i,1)=6.d0/h**2.d0*(y(i)-2.d0*y(i+1)+y(i+2))

```



Obrázek C.1: Graf kubického přirozeného interpolačního splajnu, popsáno v oddíle C.2.1.

**end do**

**!volání podprogramu DGBSV (viz oddíl C.1):**

**call** DGBSV(N,KL,KU,1,AB,LDAB,IPIV,B,N,INFO)

**if**(INFO.ne.0) **write**(\*,\* "INFO=",INFO,"!!!")

a(1)=B(1,1)/6.d0/h

**!výpočet koeficientů a,b,c,d v 1. poli splajnu**

b(1)=0.d0

c(1)=(y(2)-y(1))/h-B(1,1)/6.d0\*h

d(1)=y(1)

**do** i=2,np-2

**!cyklus výpočtu koeficientů a,b,c,d  
!v prostředních polích splajnu**

a(i)=(B(i,1)-B(i-1,1))/6.d0/h

b(i)=B(i-1,1)/2.d0

c(i)=(y(i+1)-y(i))/h-(B(i,1)+2.d0\*B(i-1,1))/6.d0\*h

d(i)=y(i)

**end do**

a(np-1)=-B(N,1)/6.d0/h

**!výpočet koeficientů v posledním poli**

b(np-1)=B(N,1)/2.d0

c(np-1)=(y(np)-y(np-1))/h-2.d0\*B(N,1)/6.d0\*h

d(np-1)=y(np-1)

**do** i=1,np-1

**!zápis koeficientů do souboru fort.1**

**write**(1,\*) a(i), b(i), c(i), d(i)

**end do**

## C.2.2 Lineární regrese metodou nejmenších čtverců

Souborem  $n$  diskrétních hodnot odezvy (vysvětlované proměnné)  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , který je určen výčtem uspořádaných dvojic  $[x_i, y_i]$ , proložíme přímkou (polynom 1. stupně)  $f^1(x) = kx + q$  tak, aby součet  $S$  druhých mocnin tzv. *reziduí*, tj. vzdáleností bodů  $y_i$  od funkčních hodnot  $f(x_i)$  v bodech  $x_i$  byl minimální (2. mocniny se zde používají kvůli nezávislosti na znaménku

odchylky). Dostáváme tedy rovnici

$$S = \sum_i [y_i - f^I(x_i)]^2 = \sum_i [y_i - (kx_i + q)]^2 = \min, \quad (\text{C.10})$$

pro dvě neznámé hodnoty  $k$  a  $q$ . Minimalizaci této funkce provedeme položením  $\partial S/\partial k = 0$  a zároveň  $\partial S/\partial q = 0$ , výsledek můžeme zapsat pomocí maticového formalismu jako

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{pmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

Snadno tak nalezneme výrazy pro oba hledané parametry v závislosti na uspořádané  $n$ -tici  $[x_i, y_i]$  (např. na naměřených hodnotách v závislosti na čase nebo poloze),

$$k = \frac{n \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}, \quad q = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}. \quad (\text{C.12})$$

Metodu navrhl a poprvé použil Karl Friedrich Gauss pro výpočet geodetických chyb.

- **Příklad skriptu pro lineární regresi metodou nejmenších čtverců, program fortran 95:**

```

program linearni_regrese                                !deklarace názvu programu
implicit none
!tabulka hodnot [xi, yi]:
![1,2], [2,1], [3,4], [4,12], [5,7], [6,8], [7,10], [8,14], [9,19], [10,17]
integer :: i, np                                       !deklarace celočíselných proměnných: i =
                                                         !pořadové číslo dvojice proměnných, np =
                                                         !celkový počet diskretních hodnot

parameter (np=10)                                     !zadání fixní hodnoty np

double precision, dimension(np) :: x, y              !deklarace reálných veličin x, y jako pole
                                                         !(vektoru) o np prvcích

double precision :: f(np), res(np)                   !jiný způsob deklarace reálných veličin f, res
                                                         !jako pole (vektoru) o np prvcích

double precision :: k, q, sumres                       !deklarace reálných skalárních veličin

x=(/(1.d0*i, i=1,np)/)                                !vektor hodnot regresoru
y=(/2.d0, 1.d0, 4.d0, 12.d0, 7.d0, 8.d0, 10.d0, 14.d0, 19.d0, 17.d0/)
                                                         !vektor hodnot odezvy

```

### 1. možnost - přímé použití vzorce (C.12):

!hledané koeficienty lineární funkce:

```

k=(np*SUM(x*y)-SUM(x)*SUM(y))/(np*SUM(x**2.d0)-(SUM(x))**2.d0)
q=(SUM(x**2.d0)*SUM(y)-SUM(x)*SUM(x*y))/(np*SUM(x**2.d0)-(SUM(x))**2.d0)

```

## 2. možnost - použití soustavy rovnic (C.11) a procedury LAPACK - viz sekce C.1:

!v záhlaví programu je nutné navíc deklarovat tyto proměnné:

**integer** :: j, INFO, KL, KU, LDAB, LDB, N, RHS

parameter(KL=1,KU=1,N=2,KUKL=KL+KU+1,LDAB=2\*KL+KU+1,LDB=N,RHS=1)

**integer** :: IPIV(N)

**double precision** :: M(N,N),AB(LDAB,N),B(LDB,RHS)

**double precision** :: max

M(1,1)=SUM(x\*\*2.d0) !matice levé strany, M(N,N)

M(1,2)=SUM(x)

M(2,1)=SUM(x)

M(2,2)=np

**do** i=1,N !výpočetní cyklus procedury LAPACK

**do** j=1,N

    AB(KUKL+i-j, j)=M(i, j)

**end do**

**end do**

B(1,1)=SUM(x\*y) !výpočet pravé strany procedurou LAPACK

B(2,1)=SUM(y)

!volání podprogramu DGBSV:

**call** DGBSV(N,KL,KU,1,AB,LDAB,IPIV,B,N,INFO)

**if**(INFO.ne.0) **write**(\*,\* "INFO=",INFO, "!!!")

k=B(1,1)

q=B(2,1)

!společné pokračování:

**write**(1,\*) k, q

**write**(1,\*)

!tisk vypočítaných hodnot do souboru „fort.1“

!oddělovací řádek

**do** i=1,np

  f(i)=k\*x(i)+q

  res(i)=(f(i)-y(i))\*\*2.d0

  sumres=SUM(res)

!výpočetní cyklus

!výpočet hodnot lineární funkce

!výpočet reziduí

!výpočet sumy reziduí

**end do**

**do** i=1,np

**write**(1,\*) x(i), y(i), f(i), res(i)

**end do**

!zápis cyklu do souboru

**write**(1,\*)

**write**(1,\*) sumres

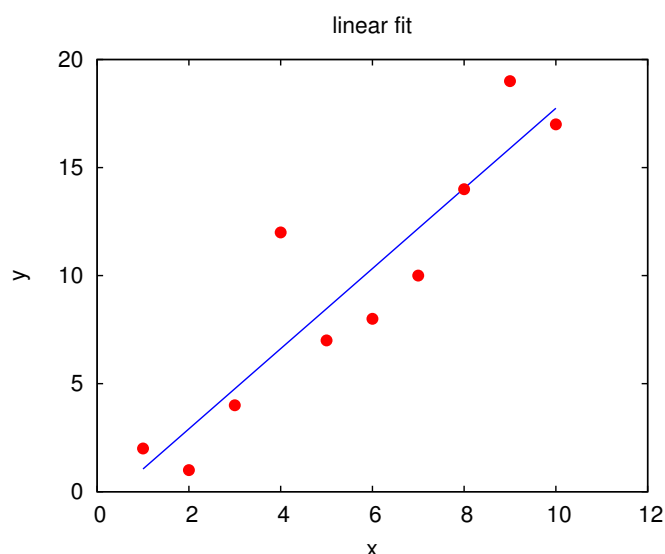
!zápis sumy reziduí do souboru

**end program** linearni\_regrese

!ukončení programu

### C.2.3 Polynomiální regrese metodou nejmenších čtverců

Postup uvedený v předchozím odstavci C.2.2 lze zobecnit pro polynom libovolného ( $m$ -tého) stupně, kdy analogii rovnice (C.10) můžeme přepsat do tvaru (horní indexy zde vždy znamenají



Obrázek C.2: Vykreslení příkladu lineární regrese, tj. proložení uvedených 10 bodů přímkou s parametry vypočítanými metodou nejmenších čtverců.

mocniny)

$$S = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=0}^m p_j x_i^j \right)^2 = \min, \quad (\text{C.13})$$

kde koeficienty  $p_j$  jsou koeficienty  $j$ -tého stupně polynomu, u lineární regrese tak platí  $p_0 = q$ ,  $p_1 = k$  (viz rovnice (C.11)). Zároveň je jasné, že počet rovnic  $N$  v proceduře LAPACK odpovídá  $m + 1$ . Minimum rovnice (C.13) nalezneme, položíme-li  $\partial S / \partial p_j = 0$ , získáme tak soustavu  $m + 1 = N$  lineárních rovnic, které můžeme vyjádřit pomocí maticového zápisu ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_i^{2m} & \cdots & \sum_i x_i^{m+1} & \sum_i x_i^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_i x_i^{m+1} & \cdots & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i^m & \cdots & \sum_i x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m \\ \vdots \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^m y_i \\ \vdots \\ \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{pmatrix}. \quad (\text{C.14})$$

Výpočetní cyklus procedury LAPACK (viz programový skript v kapitole C.2.2) můžeme takto zobecnit do následující podoby (fortran 95):

```

do i=1,N-1                                !matice levé strany, M(N,N)
  do j=1,N
    M(i,j)=SUM(x**(2*N-i-j))
  end do
end do
i=N
do j=1,N-1
  M(N,j)=SUM(x**(N-j))
end do
M(N,N)=np

```



```

do i=1,N                                !výpočetní cyklus procedury LAPACK
  do j=1,N
    AB(KUKL+i-j, j)=M(i, j)
  end do
end do

do i=1,N                                !výpočet pravé strany procedurou LAPACK
  B(i,1)=SUM(x**(N-i)*y)
end do

```

V ostatních bodech zůstává programová procedura popsaná v odstavci C.2.2 prakticky nezměněna.

### C.2.4 Robustní regrese

V případě, že chceme eliminovat vliv velmi vychýlených („ustřelených“) hodnot, zvolíme tzv. *váženou* nebo také *robustní* regresi. Robustních regresních modelů existuje celá řada (viz například Huber & Ronchetti (2009)), za všechny zde uvedeme jednoduchou tzv. *Tukeyho metodu M-odhadu* (Tukey's bisquare method), založenou na vážení reziduí pomocí dvojí druhé mocniny. Nejprve spočítáme nevážená rezidua  $\text{res}_i = y_i - f(x_i)$  (stejně jako např. v odstavcích C.2.2, C.2.3), potom použijeme následující váhovou funkci:

$$w_i(\text{res}_i) = \left[ 1 - \left( \frac{\text{res}_i}{6 \text{ med}} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{C.15})$$

kde med je medián absolutní odchylky reziduí, kterou můžeme zvolit jako samotné reziduum, nebo odchylku každého rezidua od jejich vlastního mediánu. Váha  $w_i = 0$ , pokud absolutní hodnota rezidua  $|\text{res}_i| > 6 \text{ med}$ . Extrémně odchýlené hodnoty jsou takto zcela vyřazeny, méně vychýlené hodnoty jsou ponechány, avšak se sníženou váhou.

Naprogramování tohoto robustního (váženého) regresního modelu je snadné, do pravé strany rovnice (C.14) vložíme vypočítané váhy:

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_i^{2m} & \cdots & \sum_i x_i^{m+1} & \sum_i x_i^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_i x_i^{m+1} & \cdots & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i^m & \cdots & \sum_i x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m \\ \vdots \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^m w_i y_i \\ \vdots \\ \sum_i x_i w_i y_i \\ \sum_i w_i y_i \end{pmatrix}. \quad (\text{C.16})$$

Pro výpočet mediánu existují v každém programovacím jazyce hotové moduly, jako příklad lze použít následující podprogram, výsledek je zahrnut do rovnice (C.15) (fortran 95):

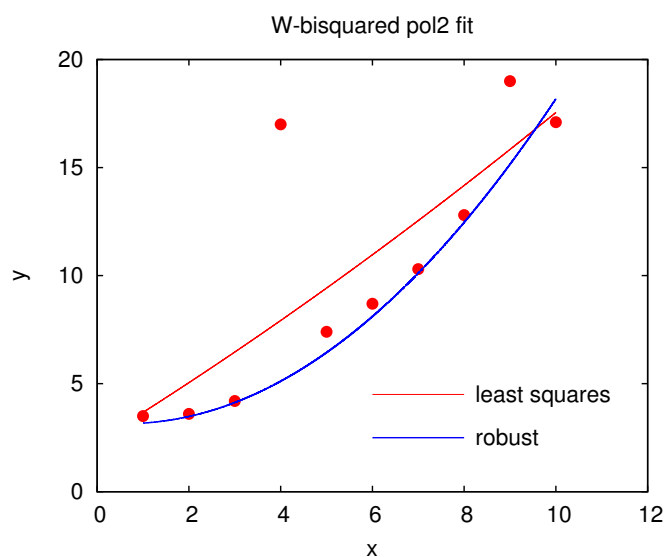
```

subroutine median(i, j, k, np, res, med)
implicit none

integer :: i, j, k, np
double precision :: res(np)
double precision, intent(out) :: med
double precision :: temp

!Seřazení čísel ve vzestupném pořadí
do j=1,np-1

```



Obrázek C.3: Porovnání kvadratické regrese, tj. proložení polynomem 2. stupně s parametry vypočítanými metodou nejmenších čtverců podle odstavce C.2.3 (červená čára) a robustní Tukeyho metodou podle odstavce C.2.4 (modrá čára). Soubor 10 bodů o souřadnicích [1;3,5], [2;3,6], [3;4,2], [4;17], [5;7,4], [6;8,7], [7;10,3], [8;12,8], [9;19], [10;17,1] obsahuje silně odchylené hodnoty (hrubé chyby), na které robustní křivka reaguje slabě nebo vůbec.

```

do k=j+1,np
  if(res(j)>res(k))then
    temp=res(k)
    res(k)=res(j)
    res(j)=temp
  endif
end do
end do

!Výpočet mediánu v případě sudého nebo lichého počtu čísel:
if(mod(np,2)==0)then
  med=(res(np/2)+res(np/2+1))/2.d0
else
  med=res(np/2+1)
endif

end subroutine median
!Následuje výpočet vah: w(y(i))=(1.d0-(y(i)/6.d0*med)**2.d0)**2.d0, atd.

```

## C.3 Numerické metody výpočtů funkcí jedné proměnné

### C.3.1 Hledání kořene funkce jedné proměnné - Newtonova metoda

Kořeny obecně nelineární funkce (rovnice)  $f(x) = 0$  často nelze vyjádřit formou explicitního analytického vzorce. k nalezení řešení takové rovnice musíme potom použít některou z numerických (iteračních) metod, kdy pomocí určitého počtu počátečních aproximací hledaného kořene  $x_0$  generujeme posloupnost  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , která ke kořenu  $x_0$  konverguje. V některých

případech je třeba zadat interval  $a, b$ , který podle předběžného předpokladu obsahuje hledaný kořen, čím lépe se k němu na počátku přiblížíme, tím rychleji daná metoda konverguje. V následujících příkladech předpokládáme reálnou spojitou funkci  $f(x)$  s odpovídajícím počtem spojitých derivací na vymezeném intervalu, s hledaným kořenem  $f(x_0) = 0$ .

Počáteční odhad intervalu (intervalů) kde se kořen (kořeny) mohou nalézat provedeme například grafickou metodou: pomocí vhodného výpočetního programu nebo vypisováním funkčních hodnot do tabulky vykreslíme funkci  $f(x)$  a vyhledáme její přibližné průsečíky s osou  $x$ . Například u funkce, dané předpisem

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad (\text{C.17})$$

snadno zjistíme že existuje jeden reálný kořen, který musí s určitostí ležet uvnitř intervalu  $x_0 \in (2, 3)$ .

Existuje celá řada možných numerických postupů (například metoda sečen, atd.), asi nejznámější je tzv. *Newtonova metoda* neboli metoda tečen. Vyjdeme z počáteční aproximace  $x_0$  a postupně počítáme  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Známe-li určitou aproximaci  $x_k$  a chceme určit lepší aproximaci  $x_{k+1}$ , proložíme bodem  $[x_k, f(x_k)]$  tečnu ke křivce  $y = f(x)$ , průsečík této tečny s osou  $x$  považujeme potom za hodnotu  $x_{k+1}$ . Dostáváme tak rovnici popsané tečny ve tvaru

$$f'(x_k) = \{3x_k^2 - 6x_k + 2\} = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}, \quad (\text{C.18})$$

z níž odvodíme vztah pro výpočet každého následujícího kroku (iterace),

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (\text{C.19})$$

Ukončení výpočtu s tím, že hodnota poslední iterace  $x_{k+1}$  je prohlášena za hledaný kořen  $x_0$  s požadovanou přesností, nastane (podle velikosti malého čísla  $\epsilon$  které stanovuje požadovanou přesnost) například v těchto případech:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon \quad \text{nebo} \quad |f(x_{k+1})| \leq \epsilon. \quad (\text{C.20})$$

- **Příklad možného způsobu naprogramování rovnice (C.17) - program fortran 95:**

```

program newton                                !deklarace názvu programu
implicit none

integer :: i                                  !deklarace celočíselných proměnných v záhlaví programu: i = pořadové číslo prostorového kroku

double precision :: x, dx, f, df             !deklarace reálných veličin, kde výrazy x =  $x_k$ , dx !=  $x_k - x_{k+1}$ , f =  $f(x_k)$ , df =  $f'(x_k)$ , s dvojitou přesností

x=3.d0                                          !odhad vstupní hodnoty  $x_k$ 
do                                            !výpočetní cyklus
  i = i+1
  f = x**3 - 3.d0*x**2 + 2.d0*x - 3.d0 !vlastní rovnice (C.17)
  df = 3.d0*x**2 - 6.d0*x + 2.d0 !derivace funkce (C.17)
  dx = f/df                                     !rovnice (C.19)
  x = x-dx                                       !nová hodnota  $x_k$ 
if (dabs(dx).lt.1.d-12) exit                !stop kritérium:  $|x_k - x_{k+1}| < 10^{-12}$ 

```

```

end do
write (100,*) x           !zápis kořene funkce f do souboru fort.100
stop                     !zastavení celého procesu
end program newton       !konec programu

```

- Tabulka výsledků programu výpočtu kořene funkce  $f(x_k)$  pro jednotlivé iterace  $k$ :

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$x_k - x_{k+1}$
0	3.0000000000000000	3.0000000000000000	0.27272727272727271
1	2.7272727272727275	0.42599549211119836	5.3581553581554045E-002
2	2.6736911736911733	1.4723079585858834E-002	1.9886039436713345E-003
3	2.6717025697475019	1.9848200396133109E-005	2.6880854327577796E-006
4	2.6716998816620690	3.6242120415863610E-011	4.9083680000275664E-012
5	2.6716998816571604	1.7763568394002505E-015	2.4057679206275180E-016

### C.3.2 Numerické derivování

Nejjednodušší numerická aproximace 1. derivace má podobu tzv. *dopředné difference*,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (\text{C.21})$$

kde  $h = \Delta x > 0$ , s chybou aproximace  $\delta f'(x)$  vyjádřenou pomocí Taylorova rozvoje  $x$ , tj.  $\delta f'(x) = -(h/2)f''(\xi)$ , kde  $\xi \in (x, x+h)$ . Podobně jednoduchá je i tzv. *zpětná difference*,

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad (\text{C.22})$$

s chybou stejného řádu. Aproximací s vyšší přesností je tzv. *centrální difference*,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad (\text{C.23})$$

s chybou aproximace  $\delta f'(x) = -(h^2/6)f'''(\xi)$ , kde  $\xi \in (x-h, x+h)$ , zabírající ovšem dva prostorové kroky (buňky) výpočetní sítě. Analogickým způsobem můžeme odvodit i 2. derivaci ve tvaru

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad (\text{C.24})$$

s chybou aproximace  $\delta f''(x) = -(h^2/12)f^{(4)}(\xi)$ , kde  $\xi \in (x-h, x+h)$ .

Existují i přesnější a propracovanější diferenční schémata (viz například [van Leer, 1977](#), [1982](#); [Vitásek, 1987](#); [LeVeque, 2002](#)), například jednostranná aproximace 1. derivace, která je 2. řádu přesnosti,

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}, \quad (\text{C.25})$$

s chybou aproximace  $\delta f'(x) = (h^2/3)f'''(\xi)$ , kde  $\xi \in (x, x+2h)$ , nebo aproximace 1. derivace, která je 4. řádu přesnosti, ve tvaru

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}, \quad (\text{C.26})$$

tedy s chybou, která je řádu  $h^4$ , atd. Jejich nevýhodou ovšem je, že zabírají několik prostorových intervalů (buněk) výpočetní sítě a také při složitých a objemných výpočtech díky nim mohou narůstat nároky na dobu výpočtu. Je proto vždy nutné zvážit výpočetní schéma, adekvátní dané úloze a její požadované přesnosti, odpovídající ale reálným možnostem používaného výpočetního zařízení.

### C.3.3 Numerické integrování

je vždy založené na nahrazení složitě ohraničeného geometrického útvaru (plochy pod křivkou dané funkce v případě jedné proměnné) jednodušším útvarem, nebo součtem takových útvarů. Používá se také název *numerická kvadratura*, ve smyslu konstrukce plošných (tedy dvou- rozměrných, kvadraturních) útvarů. Ukážeme zde příklady pouze nejběžnějších (většinou ovšem zcela dostačujících) způsobů numerické integrace funkce jedné proměnné pomocí tzv. *Newton-Cotesových* vzorců, existuje samozřejmě celá řada jiných metod numerické integrace, například *Gaussovy kvadraturní vzorce*, *Rombergova kvadratura*, atd. Nebudeme zde uvádět ani přesnosti a způsob stanovení chyb, atd., vše je standardně dostupné v literatuře.

#### • Newton-Cotesovy (kvadraturní) vzorce

*Obdélníková metoda:* Tato metoda se formálně nepočítá mezi tzv. *Newton-Cotesovy* vzorce, představuje sice nejjednodušší ale zároveň nejméně přesnou numerickou integrační metodu, kdy se určitý integrál dané funkce (tj. velikost plochy pod křivkou grafu funkčních hodnot funkce  $f(x)$  v rámci intervalu  $\langle a, b \rangle$ ) aproximuje obdélníkem. Tuto aproximaci můžeme zpřesnit, rozdělíme-li například interval  $\langle a, b \rangle$  na zvolený počet  $n$  dílčích stejných intervalů, vypočítáme obdélníkovou aproximaci pro každý interval zvlášť a výsledky sečteme, tedy

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \quad (\text{C.27})$$

*Lichoběžníková metoda:* představuje přesnější numerickou integrační metodu, kdy se určitý integrál dané funkce aproximuje lichoběžníky (body funkce se spojí úsečkami). Rozdělíme-li interval  $\langle a, b \rangle$  na zvolený počet  $n$  dílčích stejných intervalů, vypočítáme lichoběžníkovou aproximaci opět pro každý interval zvlášť a výsledky sečteme, tedy

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) + f(x_k)], \quad (\text{C.28})$$

kde  $x_k = a + k(b-a)/n$ .

*Simpsonovo pravidlo:* založené na kvadratické (parabolické) interpolaci dílčích intervalů integrované funkce. V případě integrace polynomů dává tato metoda velmi přesné výsledky. Složená aproximace Simpsonovým pravidlem, kdy interval  $\langle a, b \rangle$  je rozdělen na sudý počet  $n$  dílčích intervalů, má tvar (kdy  $x_k = a + k(b-a)/n$ )

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} \sum_{k=1}^{n/2} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]. \quad (\text{C.29})$$

*Simpsonovo 3/8 pravidlo* (nebo také druhé Simpsonovo pravidlo): založené na kubické interpolaci dílčích intervalů integrované funkce. Složená aproximace Simpsonovým 3/8 pravidlem, kdy interval  $\langle a, b \rangle$  je rozdělen na  $n$  dílčích intervalů, kde  $n$  je dělitelné třemi, má tvar (kdy opět  $x_k = a + k(b - a)/n$ )

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3(b-a)}{8n} \sum_{k=1}^{n/3} [f(x_{3k-3}) + 3f(x_{3k-2}) + 3f(x_{3k-1}) + f(x_{3k})]. \quad (\text{C.30})$$

Obdobným způsobem lze sestavit Newton-Cotesovy formule libovolně vyšších řádů, vyšší řády než 4 (*Booleovo pravidlo*) se nicméně používají málo, jejich nevýhodou je velmi rychle (až exponenciálně) narůstající chyba integrace.

### C.3.4 Jednoduché numerické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Existuje opět celá řada způsobů numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic, například řešení rovnic *Eulerovou metodou* nebo tzv. *Runge-Kuttovou metodou* (metodami), atd., viz například (Humlčěk, 2009). Ukážeme zde pouze často používanou jednoduchou tzv. *metodu střelby* a také příklad řešení obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu pomocí tridiagonální matice (viz odstavec C.2.1):

#### • Metoda střelby

je jednoduchá metoda, založená na „vystřelení“ dané funkce v závislosti na okrajových podmínkách z pevného bodu daným směrem. Hledáme potom takové koeficienty funkce, které zajistí „dopadnutí“ funkce do požadovaného bodu. Metodu si ukážeme na příkladu řešení tzv. *Lane-Emdenovy* rovnice, což je obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu, obvykle zapsaná v implicitním tvaru

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^n = 0 \quad \text{a tedy} \quad y'' + \frac{2}{x} y' + y^n = 0, \quad (\text{C.31})$$

kde  $x$  je nezávisle proměnná,  $y$  je závisle proměnná a  $n$  je konstanta. Tato rovnice je řešitelná analyticky pouze pro  $n = 0, 1, 5$ , pro všechna ostatní  $n$  musí být řešena numericky. Pro  $n = 0$  získáme řešení přímou integrací se zahrnutím uvedených okrajových podmínek, pro  $n = 1$  řešíme sférickou Besselovu diferenciální rovnici (viz rovnice (B.117)), Pro  $n = 5$  dostáváme řešení prostřednictvím tzv. Emdenovy transformace, kde  $y = Ar^\omega s$ , kde  $r, s$  jsou nové proměnné a  $\omega = 2/(n - 1)$ .

Budeme počítat rovnici (C.31) pro  $n = 1,5$  a s Newtonovými okrajovými podmínkami  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ . Algoritmus je tedy „vystřelen“ z bodu  $[0,1]$  vodorovně, nová hodnota  $y$  je v každém prostorovém kroku vypočítána jako  $y = y + (\Delta y/\Delta x)\Delta x$ . Druhá derivace  $y''$  je rozepsána jako  $(y')'$ , tedy  $(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$  a každá nová hodnota  $y''$  je v každém prostorovém kroku počítána jako  $(\Delta y/\Delta x)/\Delta x = (\Delta y/\Delta x)/\Delta x - [(2/x)(\Delta y/\Delta x) + y^n]$ , což můžeme po vynásobení celé rovnice  $\Delta x$  přepsat jako  $(\Delta y/\Delta x) = (\Delta y/\Delta x) - [(2/x)(\Delta y/\Delta x) + y^n]\Delta x$ . Numerický algoritmus rovnice (C.31) lze tedy zapsat například takto (fortran 95):

- **program** Emden !deklarace názvu programu
- implicit none**
- double precision** :: x, y, dydx, n, dx !deklarace reálných veličin x, y, dydx, n, dx
- !s dvojitou přesností, kde dydx = y' = Δy/Δx
- !a dx = Δx



```

parameter(ni=99,N=ni,LDB=N,NRHS=1)  !hodnoty celočíselných proměnných
double precision :: x(ni), y(ni), h(ni), p(ni), q(ni), r(ni), f(ni), B(LDB,NRHS),
DL(N-1), DU(N-1), D(N)
!deklarace reálných proměnných jako pole
!s dvojitou přesností

double precision, parameter :: x0=0.d0, xn=1.d0, y0=0.d0, yn=1.d0
!deklarace reálných konstant s dvojitou
!přesností

do i=1,N
x(i)=x0+(xn-x0)*i/dfloat(ni+1)
!výpočetní cyklus prostorového kroku
!příkaz dfloat mění celočíselnou proměnnou
!na reálnou
end do

do i=1,N
h(i)=x(i)-x(i-1)
p(i)=1.d0
q(i)=3.d0
r(i)=2.d0
f(i)=(20.d0*x(i)+29.d0)*dexp(3.d0*x(i))
!hlavní výpočetní cyklus
!konstantní krok h je zde zapsán obecně
!konstantní koeficienty jsou zapsány obecně

if(i.eq.1) then
B(i,1)=h(i)**2.d0*f(i)-(p(i)-q(i)*h(i)/2.d0)*y0
!spodní okrajová podmínka
elseif((i.gt.1).and.(i.lt.N)) then
B(i,1)=h(i)**2.d0*f(i)
!hlavní pole
else
B(i,1)=h(i)**2.d0*f(i)-(p(i)+q(i)*h(i)/2.d0)*yn
!horní okrajová podmínka
endif
end do

do i=1,N-1
DL(i)=p(i)-q(i)*h(i)/2.d0
!zadání spodní diagonály
end do

do i=1,N
D(i)=r(i)*h(i)**2.d0-2.d0*p(i)
!zadání hlavní diagonály
end do

do i=2,N
DU(i)=p(i)+q(i)*h(i)/2.d0
!zadání horní diagonály
end do

!volání podprogramu DGTSV balíčku LAPACK (viz oddíl C.1):
call DGTSV(N, NRHS, DL, D, DU, B, LDB, INFO)
if(INFO.ne.0) write(*,*) "INFO=",INFO,"!!!"

write(1,*) x0, y0
do i=1,N
y(i)=B(i,1)
write(1,*) x(i), y(i)
!zápis do souboru fort.1
end do
write(1,*) xn, yn

end program tridiag

```



## C.4 Numerické metody výpočtů funkcí více proměnných - řešení parciálních diferenciálních rovnic

### C.4.1 Hledání kořenů soustavy funkcí více proměnných Newtonova-Raphsonova metoda

Newtonova (Newtonova-Raphsonova) metoda představuje velmi účinný nástroj také pro řešení obecné soustavy (nelineárních) rovnic. Soustavu  $P$ , obsahující  $n$  rovnic můžeme obecně zapsat jako

$$P_i(\vec{x}) = 0, \quad (\text{C.34})$$

kde  $i = 1, \dots, n$  a kde  $\vec{x}$  je vektor proměnných  $x_j$ . Pomocí Taylorova rozvoje rovnice (C.34) do prvního řádu dostáváme obecný výraz pro  $k$ -tou iteraci ( $k$ -tý iterativní krok) řešení systému rovnic  $P_i$ , který můžeme zapsat kompaktní formou

$$J^k \Delta \vec{x}^k = -\vec{P}^{k-1}(\vec{x}^{k-1}), \quad (\text{C.35})$$

kde vektor  $\Delta \vec{x}$  představuje korekci řešení pro každou proměnnou  $x_j$  vzhledem k předchozímu iterativnímu kroku. Explicitní zápis vektoru  $\Delta \vec{x}^k$  bude mít tvar

$$\Delta \vec{x}^k = (x_1^k - x_1^{k-1}, \dots, x_n^k - x_n^{k-1})^T. \quad (\text{C.36})$$

Výraz  $\vec{P}^k$  v rovnici (C.35) představuje vektor  $k$ -té iterace všech systémových rovnic  $P_i^k$ , zatímco výraz  $J^k$  značí odpovídající Jacobiho matici, jejíž každý prvek  $J_{ij}^k$  můžeme snadno analyticky vyjádřit ze systému rovnic  $P_i^k$ , položíme-li

$$J_{ij}^k = \frac{\partial P_i^k}{\partial x_j^k}. \quad (\text{C.37})$$

Řešíme-li například (jako jednoduchý modelový příklad) soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^4 + 6y^2 - 12z &= 16, \\ 5x^3 - 3y + z^2 &= 9, \\ x^3 + 7y^2 - z &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

můžeme explicitní podobu rovnice (C.35) zapsat jako

$$\begin{pmatrix} 4x_0^3 & 12y_0 & -12 \\ 15x_0^2 & -3 & 2z_0 \\ 3x_0^2 & 14y_0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_0^4 + 6y_0^2 - 12z_0 - 16 \\ 5x_0^3 - 3y_0 + z_0^2 - 9 \\ x_0^3 + 7y_0^2 - z_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.39})$$

kteřou dále řešíme iterativně například pomocí balíčku LAPACK (viz odstavec C.1) jako soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$  a  $\Delta z = z - z_0$ , z nichž potom v každém kroku získáme nové hodnoty  $x$ ,  $y$  a  $z$  jako  $x = \Delta x + x_0$ ,  $y = \Delta y + y_0$ ,  $z = \Delta z + z_0$ .

- **Příklad možného způsobu naprogramování soustavy rovnic (C.38) - program fortran 95:**

**program** eqsystem  
**implicit none**

**!deklarace názvu programu**

!deklarace celočíselných proměnných v záhlaví programu, viz odstavec C.1:

```
integer :: i,j,K,INFO,KL,KU,LDAB,LDB,N,NRHS
parameter(N=3,KL=2,KU=2,K=KU+KL+1,LDAB=2*KL+KU+1,LDB=N,NRHS=1)
integer :: IPIV(N)
```

!deklarace reálných veličin s dvojitou přesností:

```
double precision :: AB(LDAB,N),B(LDB,NRHS),DER(N,N),C(N),x0,y0,z0
```

!přesměrování konečného zápisu výsledku do souboru "solve.dat":

```
open(10,file="solve.dat",status="unknown")
```

```
x0=-4.0d0           !odhad vstupní hodnoty xk
y0=-3.0d0           !odhad vstupní hodnoty yk
z0=14.0d0          !odhad vstupní hodnoty zk
do                  !výpočetní cyklus
```

!matice derivací levých stran:

```
DER(1,1)=4.d0*x0**3.d0
DER(1,2)=12.d0*y0
DER(1,3)=-12.d0
DER(2,1)=15.d0*x0**2.d0
DER(2,2)=-3.0
DER(2,3)=2.d0*z0
DER(3,1)=3.d0*x0**2.d0
DER(3,2)=14.d0*y0
DER(3,3)=-1.d0
```

!transformovaná pásová matice AB podle schematu LAPACK, viz odstavec C.1:

```
do j=1,N
  do i=max(1,j-KU),min(N,j+KL)
    AB(K+i-j,j)=DER(i,j)
  end do
end do
```

!matice pravých stran:

```
B(1,1)=- (x0**4.d0+6.d0*y0**2.d0-12.d0*z0-16.d0)
B(2,1)=- (5.d0*x0**3.d0-3.d0*y0+z0**2.d0-9.d0)
B(3,1)=- (x0**3.d0+7.d0*y0**2.d0-z0)
```

!vlastní výpočet pomocí podprogramu DGBSV, viz odstavec C.1.:

```
call DGBSV(N,KL,KU,1,AB,LDAB,IPIV,B,N,INFO)
if (INFO.ne.0) write(*,*) "INFO=",INFO,"!!!"
C=(/(dabs(B(i,1)),i=1,N)/)
```

```
if (maxval(C).lt.1.d-15) exit !stop kritérium: max|Δx, Δy, Δz| < 10-15
```

```
x0=B(1,1)+x0
y0=B(2,1)+y0
z0=B(3,1)+z0
```

!zápis výsledných hodnot  $x, y, z, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  z jednotlivých iterací do souboru:

```
write(10,*)x0,y0,z0,(B(i,1),i=1,N)
```

**end do**

**stop** !zastavení celého procesu  
**end program** eqsystem !konec programu

- Tabulka vypočtených hodnot  $x_k, y_k, z_k, \Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$  ze všech provedených iterací :

$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$
1	-3.5568659855769229	-2.8660523504273505	14.644631410256411
2	-3.4484177335542667	-2.8088357894123277	14.321062859837509
3	-3.4422190042021756	-2.8052747443938260	14.300861993036721
4	-3.4421993029036972	-2.8052630869488695	14.300795971729505
5	-3.4421993027044500	-2.8052630868291244	14.300795971052235
6	-3.4421993027044500	-2.8052630868291244	14.300795971052233

$k$	$\Delta x_k$	$\Delta y_k$	$\Delta z_k$
1	0.44313401442307693	0.13394764957264957	0.64463141025641035
2	0.10844825202265625	5.7216561015022732E-002	-0.32356855041890148
3	6.1987293520911584E-003	3.5610450185016187E-003	-2.0200866800787826E-002
4	1.9701298478486783E-005	1.1657444956463351E-005	-6.6021307216049201E-005
5	1.9924720437988766E-010	1.1974503494876664E-010	-6.7726957780015056E-010
6	6.2835370146182566E-017	1.8208999862070576E-016	-1.3650720993330078E-015

Počáteční odhad (pokud neznáme, jako v případě standardních fyzikálních dějů, nějaké „předem očekávané“ hodnoty) může být poměrně obtížný - na našem příkladě můžete vyzkoušet, že pokud zvolíme např. všechny počáteční hodnoty rovny 1, výpočet zkonverguje rovněž, ovšem bude zapotřebí 24 325 iterací (namísto 6 iterací pro uvedené blízké celočíselné počáteční odhady).

#### C.4.2 Principy konečných diferencí

Jednoduchý příklad - jednorozměrná rovnice se dvěma proměnnými:  $t$ -čas,  $x$ -délka - Burgersova (transportní) parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + u \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.40})$$

kde  $u$  je konstanta (rychlost). Numerický tvar funkce  $f(t, x)$  je reprezentován na jednorozměrné síti, tvořené  $M$  prostorovými body,

$$x_0, x_1, \dots, x_M \quad (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_M). \quad (\text{C.41})$$

Výpočet proběhne opakovaně během  $N$  časových kroků,

$$t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t, \dots, t_N = t_0 + N\Delta t. \quad (\text{C.42})$$

Numerické řešení veličiny  $f(t, x)$  v obecném  $j$ -tém prostorovém a  $n$ -tém časovém ( $x = x_j, t = t_n$ ) kroku označíme  $f_j^n$ . Taylorův rozvoj funkce  $f(t, x)$  má tvar

$$f(x + h, t) = f(x, t) + h \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^3) + \dots \quad (\text{C.43})$$

$$f(x - h, t) = f(x, t) - h \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \mathcal{O}(h^3) + \dots, \quad (\text{C.44})$$

kde  $h = \Delta x$  je přírůstek prostorové proměnné  $x$  (viz rovnice (1.1)) a symbol  $\mathcal{O}$  značí zanedbatelný, dále nezapočítávaný příspěvek členů vyšších řádů. V numerické matematice jsou derivace nahrazeny tzv. *diferencemi* (viz odstavec C.3.2):

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \approx \frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h} = \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x}, \quad \text{apod.} \quad (\text{C.45})$$

Typy diferencí pro aproximace derivací 1. řádu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_j^n &\approx (f_{j+1}^n - f_j^n) / \Delta x && \text{dopředné diference,} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_j^n &\approx (f_j^n - f_{j-1}^n) / \Delta x && \text{zpětné diference,} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_j^n &\approx (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) / (2\Delta x) && \text{centrální diference.} \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Příklad numerického diferenčního schématu pro aproximace derivací 2. řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_j^n \approx (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) / (\Delta x)^2. \quad (\text{C.47})$$

Numerické diferenční schéma uvedené transportní (advekční) rovnice (C.40) má tvar

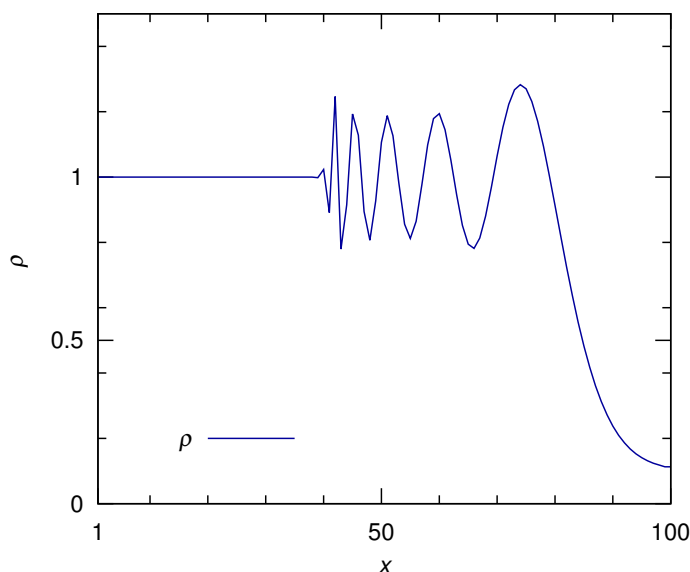
$$\frac{(f_j^{n+1} - f_j^n)}{\Delta t} = -u \frac{(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)}{2\Delta x}, \quad (\text{C.48})$$

kde časový krok je počítán jako dopředná diference a prostorový krok je počítán jako centrální diference. Po jednoduché úpravě dostáváme diferenční rovnici (C.48) v programovatelném tvaru:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n). \quad (\text{C.49})$$

- Příklad možného způsobu naprogramování rovnice (C.49) - program fortran 95:

<b>program</b> explicit	!deklarace názvu programu
<b>implicit none</b>	
<b>integer</b> :: j, n, t	!deklarace celočíselných proměnných v záhlaví programu: j = pořadové číslo prostorového kroku, n = pořadové číslo časového kroku
<b>integer</b> :: nj, nn	!deklarace celočíselných proměnných v záhlaví programu: nj = celkový počet prostorových kroků j, nn = celkový počet časových kroků n
parameter (nj=100, nn=200)	!zadání číselných hodnot pro nj, nn
<b>double precision</b> :: x(nj), f(nj), u(nj)	!deklarace reálných veličin x, f a u jako pole (vektoru) o nj prvcích s dvojitou přesností
<b>double precision</b> :: dt	!deklarace reálné veličiny dt (časového kroku)
parameter (dt = 1.d0, u = 1.2d0)	!deklarace pevně zadaných hodnot konstantních reálných veličin



Obrázek C.4: Graf (časový snímek) postupné hustotní vlny, popsané Burgersovou rovnicí (C.40), modelované metodou explicitního Eulerova schématu na principu konečných diferencí (rovnice (C.49), viz také programový skript, uvedený v tomto odstavci). V grafu je zřetelná nestabilní vlnová porucha, jejíž oblast i amplituda neustále narůstá (viz sekce C.4.3).

```

do j=1,nj                                !cyklus počáteční podmínky (počáteční funkce)
  x(j) = dfloat(j)                        !příkaz dfloat mění celočíselnou proměnnou na
                                          !reálnou

  if (j.le.nj/2) then                     !tzv. logická podmínka (kde .le. znamená ≤)
    f(j) = 1.d0
  else
    f(j) = 0.1d0                          !zadaná počáteční funkce: pro x ≤ 0.5nj → f = 1.0,
                                          !pro x > 0.5nj → f = 0.1

  endif
end do                                     !konec cyklu

t=0.d0                                    !změna typu proměnné t na real s dvojitou přesností
do                                         !vnější (časový) cyklus
  t = t+dt
  do j=2,nj-1                             !vnitřní (prostorový) cyklus
    f(j) = f(j)-u(j)*dt*(f(j+1)-f(j-1))/(x(j+1)-x(j-1))    !vlastní rovnice (C.49)
  end do
  f(1) = f(1)                             !vnitřní tzv. pevná okrajová podmínka
  f(nj) = f(nj-1)                         !vnější tzv. volná okrajová podmínka
  do j=1,nj
    write (100,*) x(j), f(j)              !cyklus zápisu do souboru s názvem fort.100
                                          !zápis spočítaných hodnot
  end do
  write (100,*)
  write (100,*)
                                          !dvouřádková mezera, nutná pro animaci časových
                                          !cyklů

  if (t.gt.200.d0) exit                   !vystoupení z časového cyklu, pokud t > 200
end do

```

<b>end do</b>	!ukončení časového cyklu
<b>stop</b>	!zastavení celého procesu při $t > 200$
<b>end program</b> explicit	!konec programu

Toto tzv. explicitní Eulerovo numerické schéma je sice jednoduché, přehledné a názorné, je ale *vždy* numericky nestabilní (viz obrázek C.4 a odstavec C.4.3):

### C.4.3 von Neumannova analýza stability

Jednoduchá analytická metoda, založená na předpokladu periodické numerické poruchy, tedy na *Fourierovské dekompozici* (rozkladu) numerické chyby. Metoda byla publikována v roce 1947 matematiky Johnem Crankem a Phyllis Nicolsonovou, za spoluautorství významného matematika, fyzika a průkopníka digitálních počítačů Johna von Neumanna.

Předpokládejme obecné poruchy stability (periodické perturbace, vibrace) vlnového charakteru ve tvaru

$$\xi^n e^{ikj\Delta x}, \quad (\text{C.50})$$

kde  $\xi(k)$  je amplituda vlny,  $k$  je vlnové číslo libovolné hodnoty. Pokud  $|\xi| > 1$ , pro  $n \rightarrow \infty$  bude

$$|\xi|^n \rightarrow \infty, \quad (\text{C.51})$$

porucha se neustále zvětšuje, numerické schéma je nestabilní. Pokud

$$|\xi| < 1, \quad (\text{C.52})$$

numerické schéma je stabilní. Po dosazení poruchové vlnové funkce do explicitního řešení (C.49) dostáváme

$$(\xi^{n+1} - \xi^n) e^{ikj\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{2\Delta x} \xi^n [e^{ik(j+1)\Delta x} - e^{ik(j-1)\Delta x}] \quad (\text{C.53})$$

a po vydělení celé rovnice (C.53) výrazem  $\xi^n e^{ikj\Delta x}$  dostáváme

$$\xi = 1 - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = 1 - i \frac{u\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x). \quad (\text{C.54})$$

Protože  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , bude druhá mocnina rovnice (C.54) rovna výrazu

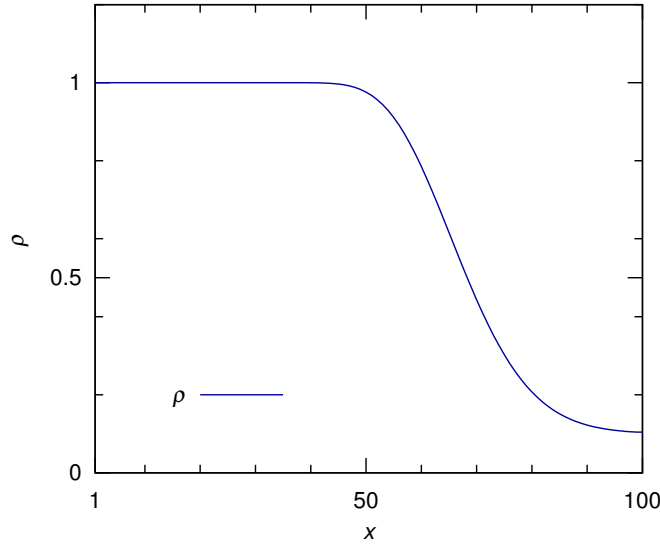
$$|\xi|^2 = 1 + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x), \quad (\text{C.55})$$

kde pravá strana zjevně bude téměř vždy větší než 1 (výjimečně se bude rovnat 1). Je tedy zřejmé, že v případě explicitního numerického schématu musí vždy platit, že  $|\xi| \geq 1$ , toto schéma je tedy vždy nestabilní.

### C.4.4 Laxova metoda

Numerická varianta explicitního schématu, které podstatně stabilizuje, je pojmenovaná podle matematika Petera Davida Laxe. Základem je jednoduchá změna ve struktuře časového členu. Člen  $f_j^n$  v explicitním řešení je zde nahrazen aritmetickým průměrem sousedních hodnot,

$$f_j^{n+1} = \frac{1}{2} (f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n), \quad (\text{C.56})$$



Obrázek C.5: Časový snímek postupné hustotní vlny, popsané Burgersovou rovnicí (C.40), modelované Laxovou metodou (rovnice (C.56)). Křivka hustoty je na rozdíl od explicitního schématu stabilní, je zde však příliš velká tzv. *numerická difúzivita*, projevující se značným rozmytím (rozostřením) původní vlny ostře schodovitého tvaru (srovnej s grafem C.9 v odstavci C.4.8), způsobená přidáním výrazu, odpovídajícímu druhé derivaci advekčního členu, tj. kdy výraz  $(f_{j+1} + f_{j-1})/2$  v rovnici (C.56) můžeme chápat jako  $f_j + (f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})/2$ .

von Neumannova analýza stability v tomto případě dává

$$\xi = \cos(k\Delta x) - i \frac{u\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x), \quad \text{a tedy} \quad |\xi|^2 = \cos^2(k\Delta x) + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x). \quad (\text{C.57})$$

Schéma je zjevně stabilní, pokud pro tzv. *Courant-Friedrichs-Lewyho* číslo  $u\Delta t/\Delta x$  (zkráceně Courantovo číslo, cfl) platí

$$\frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \text{Courantův teorém stability.} \quad (\text{C.58})$$

Stejná rovnice (C.40), modelovaná Laxovou metodou (C.56) je zobrazena v grafu C.5.

#### C.4.5 Metoda zpětného kroku (Upwind method)

Metoda zpětného kroku používá v prostorovém (advekčním) členu zpětnou diferenci,

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} (f_j^n - f_{j-1}^n), \quad (\text{C.59})$$

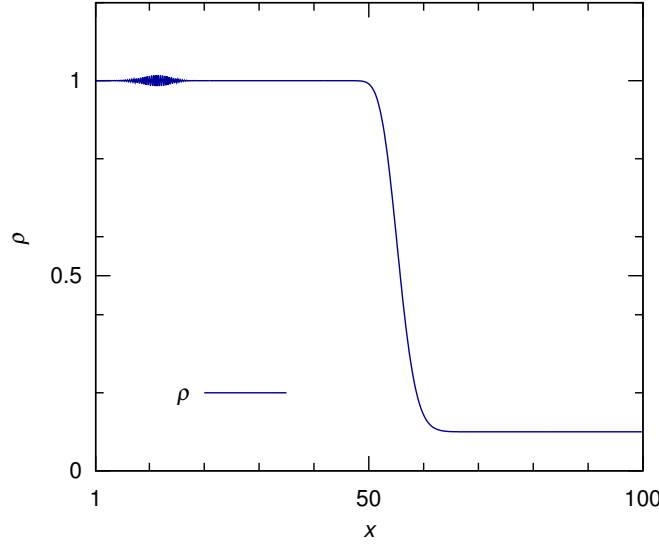
von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl =  $\alpha$ ):

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - \alpha + \alpha \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x), \quad \text{a tedy,} \\ |\xi|^2 &= [1 - \alpha + \alpha \cos(k\Delta x)]^2 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x). \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Z požadavku  $|\xi|^2 < 1$  vyplývá nerovnost

$$2\alpha(1 - \alpha)[1 - \cos(k\Delta x)] > 0. \quad (\text{C.61})$$

Protože pokud  $\alpha > 0$  potom  $\cos(k\Delta x) < 1$ , schéma bude stabilní, pokud obdobně jako v odstavci C.4.4 Courantovo číslo  $\alpha < 1$ .



Obrázek C.6: Časový snímek postupné hustotní vlny (C.40), modelované metodou implicitního schématu (rovnice (C.65)). Křivka hustoty je stabilní a na rozdíl od Laxova schématu není zdaleka tak rozšířená. Amplituda postupného klubka vlnové poruchy v levé části grafu se v čase snižuje, jeho rozsah se nemění.

#### C.4.6 Laxova-Wendroffova metoda

Dvoukroková metoda, pojmenovaná podle již zmíněného Petera Laxe (viz odstavec (C.4.4)) a dalšího matematika Burta Wendroffa, kombinuje výhody Laxova a explicitního schématu následujícím způsobem:

1. krok (Laxův) a 2. krok (explicitní):

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2} \frac{u\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n), \quad f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \left( f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{C.62})$$

von Neumannova analýza stability v tomto případě dává ( $\text{cfl} = \alpha$ ):

$$\xi = 1 - 2\alpha \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \left[ \alpha \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) + i \cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \right], \quad \text{a tedy,} \quad (\text{C.63})$$

$$|\xi|^2 = 1 - 4\alpha^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \left[ 1 - \alpha^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \right]. \quad (\text{C.64})$$

Z požadavku  $|\xi|^2 < 1$  opět vyplývá podmínka stability  $\alpha < 1$ .

#### C.4.7 Implicitní schéma

Princip tzv. implicitního schématu je založen na tom, že hodnoty veličiny  $f$  v prostorovém (advektivním) členu na pravé straně rovnice (C.49) jsou zadány v čase  $t^{n+1}$ , tedy de facto v budoucnu, tj. po provedení aktuálního výpočtu,

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1}). \quad (\text{C.65})$$

von Neumannova analýza stability v tomto případě dává ( $\text{cfl} = \alpha$ ):

$$\xi = \frac{1}{1 + i\alpha \sin(k\Delta x)} = \frac{1 - i\alpha \sin(k\Delta x)}{1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)}, \quad \text{a tedy} \quad |\xi|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)}. \quad (\text{C.66})$$



Z rovnice (C.66) je tedy zcela zřejmé, že implicitní schéma musí splňovat podmínku stability  $|\xi| \leq 1$ , je tedy *vždy* numericky stabilní. Nevýhodou je komplikovanost výpočtu  $f_j^{n+1}$  v každém časovém kroku, kdy tuto předem neznámou hodnotu počítáme pomocí tzv. *tridiagonální* matice (viz odstavce C.1, C.2.1.)

$$\frac{\alpha}{2} f_{j-1}^{n+1} - f_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2} f_{j+1}^{n+1} = -f_j^n \quad (\text{C.67})$$

některou z metod nebo knihoven numerické lineární algebry (viz odstavec C.1). Stejná rovnice (C.40), modelovaná implicitní metodou (C.65)-(C.67) je zobrazena v grafu C.6.

#### C.4.8 Příklad pokročilejšího numerického schématu

- V současnosti existuje celá řada modernějších, přesnějších a stabilnějších numerických metod (viz např. [Thompson, 2006](#)):
- Použití tzv. *oddělených sítí* (staggered mesh), umožňující oddělení toků různých veličin (flux splitting), například vektorových a skalárních polí, atd.
- Postupné přidávání jednotlivých členů pravých stran fyzikálních rovnic, reprezentujících různá silová pole (operator splitting):

$$\begin{aligned} (f^1 - f^0)/\Delta t &= L_1(f^0) \\ (f^2 - f^1)/\Delta t &= L_2(f^1) \\ &\vdots \\ (f^m - f^{m-1})/\Delta t &= L_m(f^{m-1}), \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

kde  $L_j$  představuje jednotlivé aproximace členů pravé strany rovnice pomocí principu konečných diferencí,  $m$  je celkový počet členů na pravé straně rovnice a horní indexy udávají pořadové číslo dílčího časového kroku.

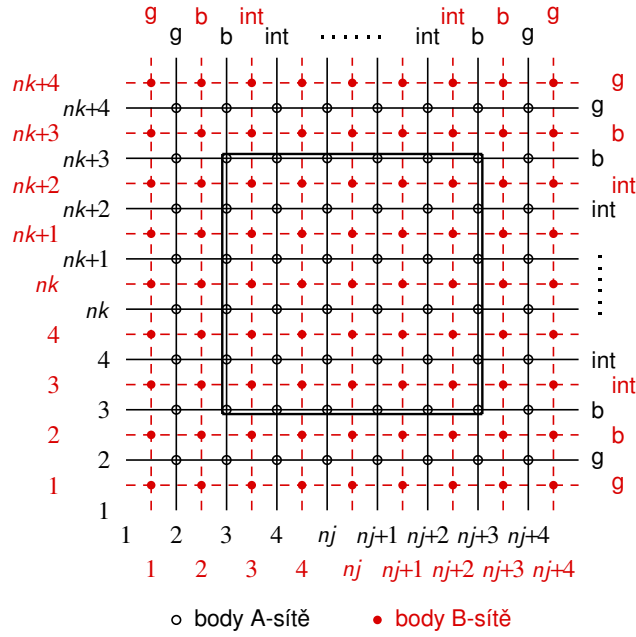
- Princip *oddělených sítí* (staggered mesh): na A-síti „sedí“ vektorové veličiny, na B-síti „sedí“ skalární veličiny (viz obrázek (C.7)).
- Příklad dvoukrokové metody (tj. kdy výpočet následujícího časového kroku je rozdělen na dva mezikroky: explicitně vypočítaný tzv. *prediktorový* krok, následovaný implicitním tzv. *korektorovým* krokem) pro výpočet transportní rovnice (C.40) skalární veličiny  $f$ :

$$\Delta_-^A = \frac{f_j^B - f_{j-1}^B}{x_j^B - x_{j-1}^B}, \quad \Delta_+^A = \frac{f_{j+1}^B - f_j^B}{x_{j+1}^B - x_j^B}, \quad (\text{C.69})$$

kde  $\Delta_-$ ,  $\Delta_+$  jsou symboly pro zpětnou a dopřednou diferenci. Pro výpočet prediktorového kroku použijeme například tzv. *van Leerovu* derivaci ([van Leer, 1982](#)), definovanou jako:

$$d_{vL}^B = \begin{cases} \langle \Delta_- \Delta_+ \rangle = \frac{2\Delta_- \Delta_+}{\Delta_- + \Delta_+}, & \text{if } \Delta_- \Delta_+ > 0 \\ 0, & \text{if } \Delta_- \Delta_+ < 0. \end{cases} \quad (\text{C.70})$$

van Leerova derivace je tedy nenulová, pokud je funkce  $f$  monotónní a je nulová v těch polích prostorové sítě, kde funkce  $f$  prochází extrém. Důležitou vlastností van Leerovy derivace je, že zachovává monotónnost derivací a zabraňuje vzniku lokálních extrémů:



Obrázek C.7: Schéma uspořádání tzv. *oddělených* sítí (staggered mesh). A-sít, určená pro počítání vektorů, je zobrazena černě, B-sít, určená pro počítání skalárních veličin, je zobrazena červeně. Dvojitou čarou je ohraničena vnitřní výpočetní doména ('int'), symbolem 'b' je označena zóna pro počítání okrajových podmínek, symbolem 'g' je označena tzv. *ghost zone*, což je další přidaná zóna pro okrajové podmínky, nutná pro počítání diferenciálních rovnic 2. řádu nebo v případě symetrických podmínek, například vůči ose sítě (periodické okrajové podmínky), středu sítě, atd. Přesné uspořádání zón pro okrajové podmínky se může v detailech lišit právě podle typu okrajových podmínek (pevné, reflexní, periodické, atd.).

z rovnice (C.70) vyplývá, že pokud  $\Delta_- \approx \Delta_+ \approx \Delta$ , potom  $\langle \Delta_- \Delta_+ \rangle \approx \Delta$  a pokud  $\Delta_- \ll \Delta_+$  nebo  $\Delta_- \gg \Delta_+$ , potom  $\langle \Delta_- \Delta_+ \rangle \approx \min(\Delta_-, \Delta_+)$ . To zaručuje, že hodnoty derivované funkce  $f$  na hranicích výpočetní buňky lokálně „nepřestřelí“ střední hodnoty funkce  $f$  v sousedních buňkách (viz obrázek C.8).

- Výsledkem prediktorového kroku bude veličina  $I$  (nazveme ji například *interpolant*), která je během prediktorového kroku advektována na rozhraní druhé sítě, tj. z původní B-sítě na A-sít a naopak. Prediktorový krok bude mít v tomto případě tvar

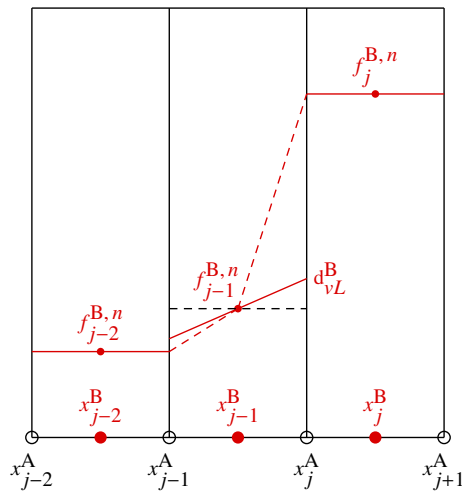
$$I_j^{A, n+a} = f_{j-1}^{B, n} + d_{vL}^B \left( x_j^A - x_{j-1}^B - \frac{u_j^{A, n+a} \Delta t}{2} \right), \quad (C.71)$$

kde  $u$  je advekční rychlost (srovnej rovnici (C.49)) a horní index  $n + a$  označuje dílčí posun v rámci časového kroku  $n$ .

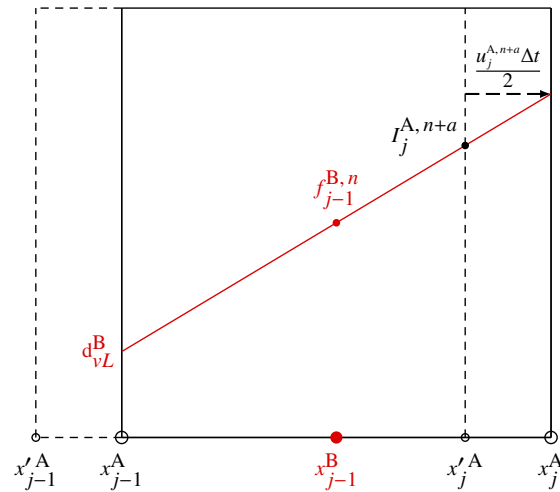
- Následující korektorový krok bude dán rovnicí ve tvaru

$$f_j^{B, n+1} = f_j^{B, n} - \frac{\Delta t}{x_{j+1}^A - x_j^A} \left( I_{j+1}^{A, n+a} u_{j+1}^{A, n+a} - I_j^{A, n+a} u_j^{A, n+a} \right). \quad (C.72)$$

Po provedení korektorového kroku se tedy skalární veličina  $f$  opět vrací na B-sít, tj. uprostřed mezi polohy  $A(j+1)$ ,  $A(j)$ . Rovnice (C.72) je zároveň numerickou formou jednorozměrné divergence. Obdobné schéma ve dvoj a trojrozměrné verzi se nazývá *metoda*



Obrázek C.8a



Obrázek C.8b

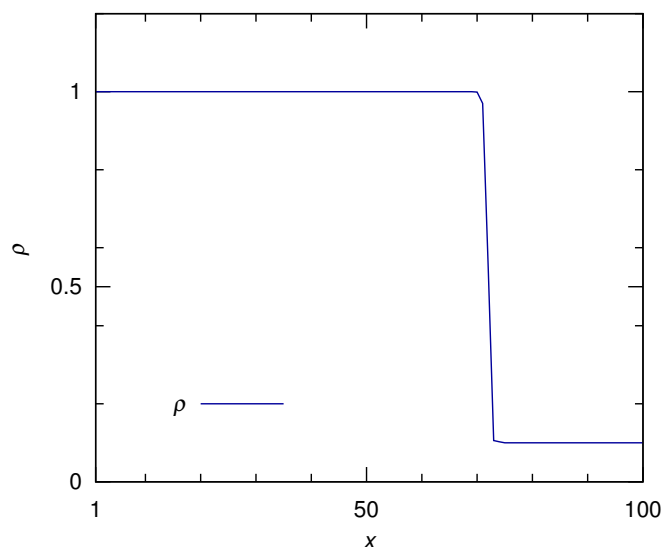
Obrázek C.8: Schématické vyobrazení podmínky monotónnosti van Leerovy derivace (rovnice (C.70)) je na obrázku C.8a: sklon lineární distribuce veličiny  $f$  v prostřední výpočetní buňce (čárkovaná čára) je díky van Leerově derivaci (plná čára označená jako  $d_{vL}^B$ ) redukován, takže hodnoty lineárně interpolované, advektované skalární veličiny  $f$  na rozhraní buňky musí po celé šířce této buňky „padnout“ mezi hodnoty této veličiny, *zprůměrované* přes objemy sousedních výpočetních buněk. Obrázek C.8b znázorňuje prediktorový krok advekce skalární veličiny  $f$  (rovnice (C.71)). Veličina je lineárně interpolována (plná červená čára, označená  $d_{vL}^B$ , znázorňuje sklon van Leerovy derivace) a advektována na rozhraní buňky v polovičním časovém kroku  $t + \Delta t/2$ . Hranice buňky, vyznačené plnou čarou, symbolizují objem látky, advektovaný v čase, zatímco „čárkovaná“ buňka je pevně fixována v prostoru. Poloha lineárního interpolantu  $I$  je označena  $I_j^{A,n+a}$ . Následující korektorový krok (rovnice (C.72)) advektuje veličinu na střed B-sítě v čase  $t + \Delta t$ .

*konečných objemů* (finite volume method - viz např. LeVeque (2002)). Vícerozměrná podoba rovnice (C.72) (počítaná v souřadnicovém směru  $j$ , index  $k$  zde symbolizuje všechny ostatní souřadnicové směry, v závislosti na dimenzi výpočetní sítě) by tedy vypadala:

$$f_{j,k}^{B,n+1} = f_{j,k}^{B,n} - \frac{\Delta t}{V_{j,k}^B} \left( I_{j+1,k}^{A,n+a} u_{j+1,k}^{A,n+a} S_{j+1,k}^A - I_{j,k}^{A,n+a} u_{j,k}^{A,n+a} S_{j,k}^A \right), \quad (\text{C.73})$$

kde veličina  $V_{j,k}^B$  znamená objem jedné tzv. buňky výpočetní sítě (grid cell), středovaný na síti B, veličina  $S_{j,k}^A$  znamená potom plochu této buňky (nacházející se na síti A), přes níž prochází tok veličiny  $f$  ve směru  $j$  (viz odstavce A.1.2, A.2.2, A.3.2, A.7.2, popisující vztahy mezi těmito veličinami v různých souřadnicových soustavách - viz také obrázek C.8). Pokud bychom modelovali transportní rovnici (C.40) pro vektorovou veličinu, bude postup zcela obdobný, pouze namísto ze sítě B budeme vycházet ze sítě A, prediktorový krok transportuje tuto veličinu na síť B a následný korektorový krok opět na síť A.

- Stejná rovnice (C.49), modelovaná uvedenou metodou prediktor-korektor je uvedena na obrázku C.9. Courantovo číslo  $cfl = 0.5$ .
- Numerické schéma, uvedené v tomto odstavci, není zdaleka jediné možné, představuje pouze ukázkou tzv. *po částech lineární* metody (Piecewise Linear Method), kdy numerické diference jsou prokládány úsečkami. Je možné použít i přesnější tzv. *po částech*



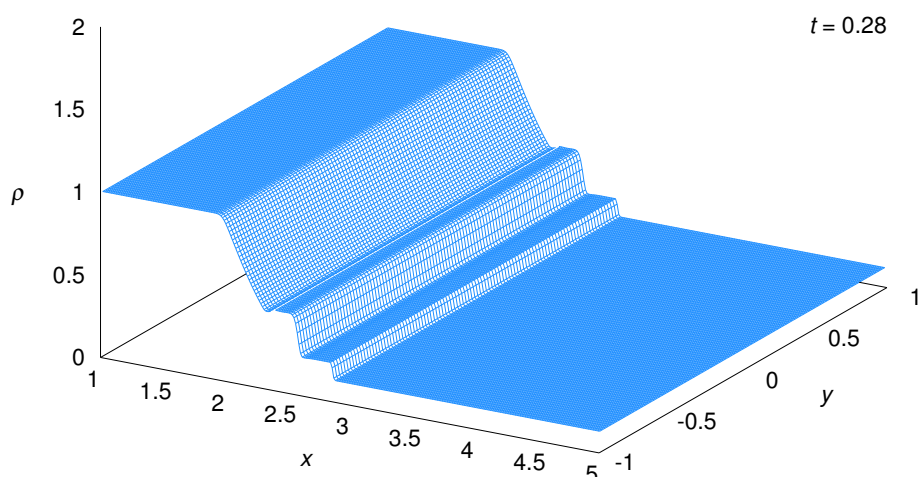
Obrázek C.9: Časový snímek postupné hustotní vlny, popsané Burgersovou rovnicí (C.40), modelované metodou prediktor-korektor (pomocí rovnic (C.71) a (C.72)). Křivka hustoty je na rozdíl od předchozích schématů stabilní a ostrá, malý sklon čela vlny je dán hustotou výpočetní sítě (vzdáleností sousedních prostorových bodů). Tvar vlny lze korigovat přidáním stříhové tzv. *Navier-Stokesovy viskozity* nebo objemové, tj. v praktických výpočtech používané tzv. *numerické viskozity* (viz například, LeVeque, 2002, a další).

*parabolickou* metodu (Piecewise Parabolic Method - PPM, viz např. Colella & Woodward (1984)), nevýhodou je ovšem zcela zákonitě vyšší výpočetní náročnost, tj. nároky na výkon počítačů, atd. Kromě toho existuje celá řada jiných metod, založená na jiných principech numerického derivování, jiných typech prostorových sítí (například tzv. *adaptivní sítě*, které se v průběhu času samy mění), nebo k výpočtům vůbec prostorové sítě nevyužívají - např. tzv. *SPH metoda* (Smooth Particle Hydrodynamics), atd.

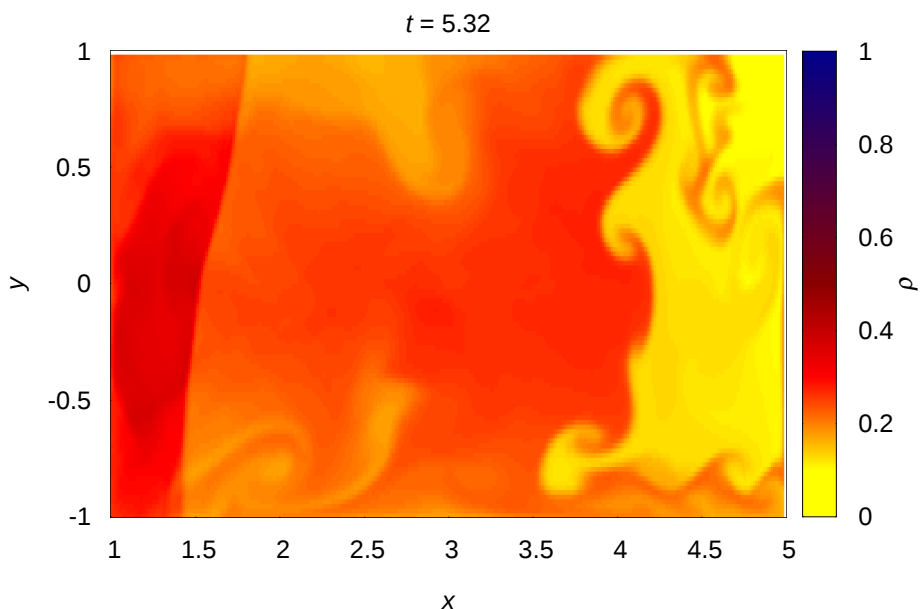
#### C.4.9 Příklady modelování reálných fyzikálních procesů

##### Riemannova-Sodova rázová trubice:

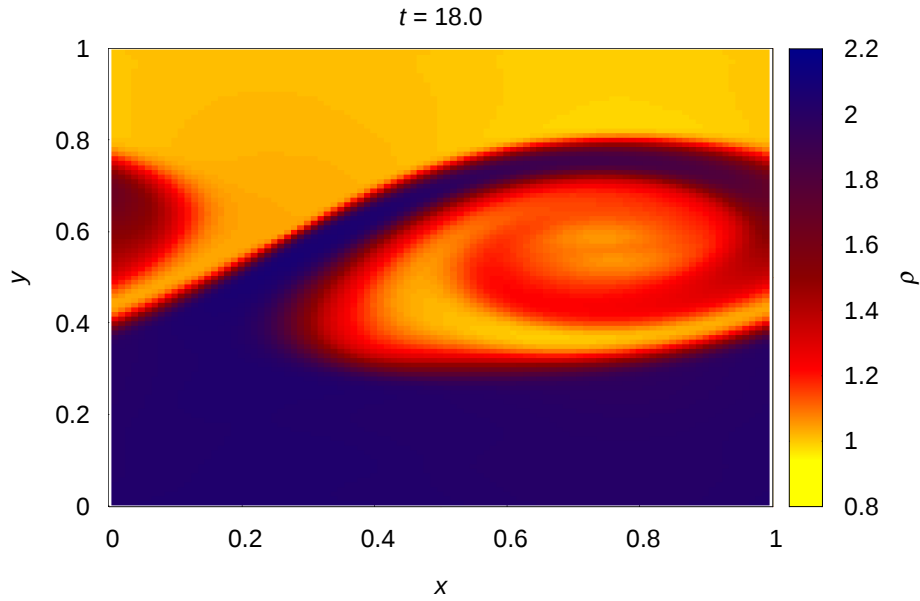
Základní testovací úloha pro většinu numerických kódů se snadno ověřitelnými výsledky. Jedná se o uzavřenou trubici, respektive box, rozdělený na dvě části pevnou přepážkou, nazývanou též *diafragma* (latinský název pro bránicí), kde obě oddělení jsou naplněné plynem s rozdílnými hustotami a tlaky. Náhle přepážka zmizí což vyvolá pohyb plynu předcházený rázovou vlnou šířící se kolmo k rovině původní přepážky ve směru řidšího plynu. Obrázek (C.10) ukazuje snímek průběhu hustoty, kdy počáteční stav plynu (kde index  $L$  označuje levou stranu trubice s vyšší počáteční hustotou a tlakem, index  $R$  označuje pravou stranu trubice s nižší počáteční hustotou a tlakem) je zvolen následovně:  $\rho_L = 1.0$ ,  $\rho_R = 0.125$ ,  $P_L = 1.0$ ,  $P_R = 0.1$ ,  $\gamma = 5/3$  kde  $\rho$  je hustota,  $P$  je tlak a  $\gamma$  je adiabatická konstanta. Obrázek C.11 ukazuje obdobnou testovací úlohu s počátečními průběhy veličin proměnnými v obou směrech  $x$ ,  $y$ , s následujícími parametry:  $\rho_L = e^{-y^2}$ ,  $\rho_R = 0.125 e^{-y^2}$ ,  $P_L = e^{-y^2}$ ,  $P_R = 0.1 e^{-y^2}$ ,  $\gamma = 5/3$ . Profily hustoty a tlaku v příčném směru  $y$  jsou tedy „Gaussovské“. V tomto modelu je ještě přidána „porucha“, způsobená malou počáteční složkou rychlosti  $V_y = 0.05$ .



Obrázek C.10: Výsledek simulace hustoty  $\rho$  v Riemannově-Sodově rázové trubici v případě neviskózního toku v čase  $t = 0.28$  (v jednotkách odpovídajících popisu v odstavci C.4.9). Počáteční stav plynu je statický a je fixován pevnou přepážkou (nazývanou také *diaphragma*), situovanou v  $1/3$  délky trubice. Hodnoty hustoty  $\rho$  a tlaku  $P$  na levé straně přepážky jsou  $\rho_L = 1.0$ ,  $P_L = 1.0$ , hodnoty na pravé straně přepážky jsou  $\rho_R = 0.125$ ,  $P_R = 0.1$ . Celková délka  $\times$  šířka trubice (boxu) je  $4.0 \times 2.0$  v libovolných jednotkách a je zde použita výpočetní síť s počtem  $300 \times 100$  zón, okrajové podmínky jsou „pevné stěny“. Tři charakteristické „schody“ v hustotě jsou (zprava doleva) vlastní rázová vlna (jejíž rychlost šíření může až čtyřikrát převyšovat skutečnou rychlost pohybujícího se plynu), dále tzv. kontaktní nespojitost, což je místo původní přepážky, šířící se vlastní rychlostí pohybujícího se plynu a konečně tzv. zřed'ující vlna, šířící se opačným směrem (viz grafy stejné testovací úlohy například v Stone & Norman, 1992).



Obrázek C.11: Barevný graf průběhu hustoty ve stejné Riemannově-Sodově rázové trubici v čase  $t = 5.32$ , s přidáním malou počáteční  $y$ -ovou složkou rychlosti,  $V_y = 0.05$ . Tato „porucha“ způsobí určitou příčnou deformaci toku kde jsou rovněž viditelné Kelvinovy-Helmholtzovy a Rayleigh-Taylorovy nestability.



Obrázek C.12: Barevný graf průběhu hustoty v Kelvinově-Helmholtzové nestabilitě (viz odstavec C.4.9). Snímek ukazuje tok v pokročilém čase, kdy je nestabilita již zcela nelineární, tj. s plně rozvinutými turbulencemi.

### Kelvinova-Helmholtzova nestabilita

Dalším oblíbeným testovacím problémem je modelování Kelvinovy-Helmholtzovy nestability (viz např. Chandrasekhar, 1961, viz také obrázek C.12). Pravoúhlá oblast (box) je naplněná plynem se dvěma opačně směřujícími toky, oddělenými lineární pomyslnou diskontinuitou. Okrajové podmínky jsou periodické na čelních okrajích toků, tj. v obrázku C.12 na stranách se souřadnicemi  $x = 0$  a  $x = 1$ , zatímco na zbývajících dvou stranách jsou zvoleny opět jako „pevné stěny“. Počáteční podmínky k úloze jsou převzaty z parametrů, uvedených v instrukcích ke kódu ATHENA (Stone et al., 2008; Springel, 2013): pro  $y > 0.5$  je podélná rychlost toku  $V_{x,1} = 0.3$  a hustota plynu  $\rho_1 = 1$ , pro  $y \leq 0.5$  je podélná rychlost toku  $V_{x,2} = -0.3$  a hustota plynu  $\rho_2 = 2$ . Počáteční tlak  $P = 1.0$  v celé výpočetní oblasti a adiabatický exponent  $\gamma = 5/3$ . Abychom se vyhnuli naprosto ostrému rozhraní mezi oběma toky, definujeme přechodovou oblast která propojí oba toky, popsanou rovnicemi (Springel, 2013):

$$\rho(x, y) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \left(1 + e^{\frac{y-0.5}{\sigma}}\right)^{-1}, \quad (\text{C.74})$$

která charakterizuje počáteční poruchu hustoty ve směru  $y$ , podobně

$$V_x(x, y) = V_{x,1} + (V_{x,2} - V_{x,1}) \left(1 + e^{\frac{y-0.5}{\sigma}}\right)^{-1}, \quad (\text{C.75})$$

která charakterizuje počáteční poruchu  $x$ -ové složky rychlostního pole ve směru  $y$ , kde střední kvadratická odchylka rychlosti  $\sigma = 0.01$ . Do těchto počátečních podmínek vložíme periodickou poruchu  $y$ -ové složky rychlosti ve tvaru

$$V_y(x, y) = A \cos(kx) e^{-k|y-0.5|}, \quad (\text{C.76})$$

s vlnovým číslem  $k = 2 \times (2\pi/L)$  a amplitudou poruchy  $A = 0.05$ . Význam tohoto testu spočívá také ve snadném ověření linearitu nárůstu poruchy v rané fázi průběhu úlohy, zatímco

později je průběh vývoje poruchy zjevně nelineární, což vylučuje provedení analytických kvantitativních výpočtů. Navíc, „ostrost“ rozhraní mezi oběma protisměrnými toky může sloužit jako indikátor tzv. *numerické difúzivity* (tj. stabilizace algoritmu advekčního schématu pomocí druhých derivací toku) výpočetního schématu (Stone et al., 2008).

## C.5 Paralelizace výpočetních algoritmů

Pro urychlení a často dokonce i pro samotné umožnění výpočtu velmi rozsáhlých (jedno-rozměrných nebo vícerozměrných) algoritmů (kódů) je nezbytné tyto algoritmy paralelizovat, tj. rozdělit je na více oddílů (procesů) souběžně (paralelně) počítatelných na odpovídajícím počtu strojových procesorů. Principem paralelizace je tedy rozdělit celkovou prostorovou výpočetní oblast (viz například obrázek C.7) na množství separátních výpočetních oblastí, *ranků* (ranks). Tyto ranky lze, v závislosti na povaze problému, počítat buď zcela samostatně, nebo, pokud je nutná vzájemná „komunikace“ na styku těchto ranků (například při hydrodynamických výpočtech, kde je nutná návaznost na okrajové podmínky na hranicích celé výpočetní oblasti, jsou na hranicích ranků předávány informace o hodnotách výpočtů v sousedním ranku). Tato „meziranková komunikace“ přitom nepůsobí žádné zásadní zpomalení výpočtu.

Existuje řada specializovaných knihoven pro tvorbu paralelních algoritmů, asi nejrozšířenější z nich je knihovna MPI (Message-Passing Interface), včetně několika podtypů, vytvořená skupinou výzkumných a vývojových pracovníků z akademické a průmyslové sféry pro široké využití na paralelně řazených počítačích. Oficiální zdroj knihovny včetně programovacích manuálů je na webové stránce <http://www.mpi-forum.org/>, pro úvodní seznámení se s knihovnou i s technikami paralelního programování doporučuji skripta Lísal (2007), pro podrobnější studium manuál Pacheco (1998). Knihovna je naprogramována pro přesun dat z jednoho procesu do jiného procesu pomocí kooperativních operací v každém procesu (tzv. *point-to-point* komunikace mezi dvěma procesy). Hlavním smyslem používání metod paralelního programování je významné urychlení výpočtů jak v případě zcela samostatně pracujících ranků, tak v případech, kdy je nutná vzájemná hraniční „send and receive“ komunikace. Často je výpočet na jednom procesoru dokonce neproveditelný, v případě, že binární soubor indikuje neúměrně rozsáhlý výpočetní proces, nelze zdrojový soubor vůbec zkompileovat. Knihovna MPI je vyvinutá pro různé programovací jazyky, jako jsou Fortran, C, C++, Python a Java, mohou zde být ovšem velké dílčí rozdíly v organizaci výpočtu (například rozdílné pořadí zahrnování prostorových buněk při dvourozměrném paralelním výpočtu v případě jazyka Fortran, kdy výpočet „běží“ v rámci každého ranku nejprve ve „vertikálním“ směru, zatímco v případě jazyka C výpočet „běží“ vždy nejprve „horizontálně“). Protože se v současnosti jedná již o velmi rozsáhlou a specializovanou disciplínu, nebudeme zde detailněji popisovat techniky paralelního programování.

V rámci počítačových volně vázaných seskupení (počítačových clusterů), pracujících v České republice, lze standardně docílit současné zapojení až několik stovek procesů. Dostupnými a výkonnými počítačovými clustery například jsou:

- METACENTRUM, což je virtuální organizace, která řídí a distribuuje výpočetní infrastrukturu spolupracujících akademických a univerzitních center. Výpočetní a paměťová zařízení jsou spravována v rámci projektu „Czech National Grid Infrastructure“, který je součástí projektu „Projects of Large Infrastructure for Research, Development, and Innovations“ (LM2010005). Součástí počítačového clusteru METACENTRUM jsou: výpočetní centrum Masarykovy univerzity v Brně (centrum CERIT-SC, Loschmidt Laboratories - pracoviště Ústavu experimentální biologie PřF MU a NCBR - Národní centrum pro výzkum biomolekul, PřF MU), výpočetní centrum Západočeské univerzity v Plzni (KIV



- Katedra informatiky a výpočetní techniky FAV ZČU, KMA a KKY - Katedra matematiky a Katedra kybernetiky FAV ZČU), výpočetní centrum Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích (Přírodovědecká fakulta JU), výpočetní centrum Akademie věd ČR, výpočetní centrum Katedry telekomunikační techniky FEL ČVUT v Praze, atd., zastřešující organizací je e-infrastruktura pro vědu, výzkum a vzdělávání CESNET z.s.p.o. Celkové parametry a výkon clusteru převyšují 10 000 CPU počítačových jader (desítky TB operační paměti RAM) a s paměťovou kapacitou cca 1 PB (1 063 TB) pro operační data a cca 19 PB (19 000 TB) prostoru pro ukládání dat. Oficiální webovou stránkou je <http://metavo.metacentrum.cz/>.
- Počítačový cluster ANSELM (národní superpočítačové centrum, VŠB - Technická univerzita Ostrava), který sestává z celkem 3 344 počítačových jader CPU (15 TB operační paměti RAM). Oficiální webovou stránkou je <http://www.it4i.cz/>
  - V současnosti je již k dispozici uživatelům nový počítačový cluster SALOMON (národní superpočítačové centrum, VŠB - Technická univerzita Ostrava), který je dle žebříčku TOP 500 oficiálně 40. nejvýkonnějším superpočítačem na světě! Současné parametry: 24 192 jader CPU Intel Xeon (Haswell-EP), 129 TB operační paměti RAM, 52 704 jader akceleračních koprocesorů Intel Xeon Phi s 13,8 TB RAM, 2 PFLOP/s maximální výpočetní výkon, 2 PB diskové kapacity a 3 PB zálohovací páskové kapacity. Oficiální webovou stránkou je <http://www.it4i.cz/>.



# Reference

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. 1972, Handbook of Mathematical Functions
- Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., et al. 1999, LAPACK Users' Guide, 3rd edn. (Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics)
- Arfken, G. B., & Weber, H. J. 2005, Mathematical methods for physicists 6th ed.
- Arsenin, V. J. 1977, Matematická fyzika, <https://vufind.lib.cas.cz/Record/000065882>
- Bartsch, H.-J. 2008, Matematické vzorce, <http://www.academia.cz/matematicke-vzorce.html>
- Čermák, L., & Hlavička, R. 2006, Numerické metody
- Chandrasekhar, S. 1961, Hydrodynamic and hydromagnetic stability
- Colella, P., & Woodward, P. R. 1984, Journal of Computational Physics, 54, 174
- Franců, J. 2011, Parciální diferenciální rovnice, skriptum, FSI VUT Brno
- Huber, P. J., & Ronchetti, E. M. 2009, Robust Statistics, 2nd ed., <http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0470129905.html>
- Humlíček, J. 2009, Základní metody numerické matematiky, skriptum, MU Brno
- Kvasnica, J. 2004, Matematický aparát fyziky, Academia, AV ČR, Praha, 2nd edn.
- Lísal, M. 2007, Paralelní programování s aplikacemi, skriptum, UJEP Ústí nad Labem, [http://physics.ujep.cz/~mlisal/par\\_progrm/pprg\\_esf-web.pdf](http://physics.ujep.cz/~mlisal/par_progrm/pprg_esf-web.pdf)
- Lenc, M. 2001, Poznámky k přednášce Elektrodynamika a teorie relativity, skriptum MU Brno
- LeVeque, R. J. 2002, Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, 1st edn.
- Musilová, J., & Musilová, P. 2006, MATEMATIKA I pro porozumění i praxi
- Pánek, P. 2001, Úvod do fyzikálních měření, skriptum, MU Brno
- Pacheco, P. S. 1998, A User's Guide to MPI, <http://www.sdsc.edu/~allans/cs260/docs/MPIusersguide.pdf>
- Plch, R. 2002, Příklady z matematické analýzy, diferenciální rovnice, skriptum, MU Brno
- Pospíšil, Z. 2006, Rovnice matematické fyziky, skriptum, MU Brno
- Přikryl, P. 1985, Numerické metody matematické analýzy

- Rektorys, K. a. k. 2009, Přehled užití matematiky I.,II., <http://knihy.abz.cz/prodej/prehled-uzite-matematiky-i>
- Springel, V. 2013, Lectures on high-performance computing and numerical modeling, <http://obswww.unige.ch/lastro/conferences/sf2013/hands-on-2.pdf>
- Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., & Simon, J. B. 2008, ApJS, 178, 137
- Stone, J. M., & Norman, M. L. 1992, ApJS, 80, 753
- Thompson, M. J. 2006, An introduction to astrophysical fluid dynamics
- van Leer, B. 1977, Journal of Computational Physics, 23, 276
- van Leer, B. 1982, in Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, Vol. 170, Numerical Methods in Fluid Dynamics, ed. E. Krause, 507–512
- Vitásek, E. 1987, Numerické metody
- Young, E. C. 1993, Vector and tensor analysis, 2nd ed., <http://searchworks.stanford.edu/view/2470130>
- <http://physics.muni.cz/~czudkova/PRIKLADYZ.pdf>
- <http://physics.muni.cz/~chm/priklady.pdf>
- <http://physics.muni.cz/~mikulas/zvc.html>
- <http://www.sagemath.org/>
- <http://www.salford.ac.uk/>
- <http://www.wolframalpha.com/>

