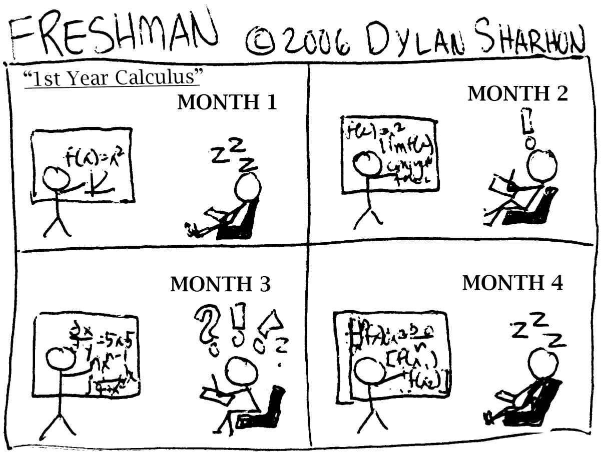
Petr Zemánek
Ústav matematiky a statistiky,
Přírodovědecká fakulta,
Masarykova univerzita, Brno

Petr Hasil
Ústav matematiky,
Lesnická a dřevařská fakulta,
Mendelova univerzita v Brně

Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I

(3. vydání)



zemanek@math.muni.cz
hasil@mendelu.cz

http://www.math.muni.cz/~xzemane2
http://user.mendelu.cz/hasil

$$
\begin{aligned}
a &= b \quad / \cdot a \\
a^2 &= ab \quad / + a^2 - 2ab \\
2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\
2(a^2 - ab) &= a^2 - ab \quad / : (a^2 - ab) \\
&\underline{\underline{2 \overset{?}{=} 1}}
\end{aligned}
$$

Úvod

Milá čtenářko, milý čtenáři,
cílem této sbírky je nabídnout podrobný návod k řešení příkladů, které jsou standardní součástí cvičení k úvodnímu kurzu matematické analýzy a vhodně tak doplnit základní texty k tomuto kurzu, viz [2,3]. Základy této sbírky tvoří zápisky ze cvičení k předmětům MB101, MB102, M1100, M1101 a demonstrativních cvičení k MB101 a MB102 vedených autory v letech 2006–2009 na Fakultě informatiky a Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Většina zadání uvedených příkladů je buď převzata z publikací [1,2,4–11] (mnohdy z příkladů uvedených k samostatnému řešení) nebo z různých zdrojů, které se autorům dostaly v průběhu let do rukou, případně na monitor. Protože uvést zde kompletní seznam všech použitých zdrojů by bylo bohužel nemožné, prohlašujeme, že drtivá většina zadání příkladů je převzata od jiných autorů. Ovšem všechna řešení jsou původní a byla vypracována autory této publikace.

Brno, jaro 2012 Petr Zemánek a Petr Hasil

Obsah

I. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

I. 1. Opakování a úvod do matematické analýzy

Základní vzorce

Poznámka 1. Nejde o úplný přehled. Je uvedeno pouze znění základních vzorců bez ohledu na to, kde (ne)jsou definovány. Některé vzorce lze snadno odvodit z ostatních zde uvedených.

- *Mnohočleny*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i.$$

- *Mocninná funkce*

$$a^0 = 1,$$
$$a^{-r} = \frac{1}{a^r},$$
$$a^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a},$$
$$a^r a^s = a^{r+s},$$
$$(a^r)^s = a^{rs}.$$

- *Logaritmus a exponenciála*

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y,$$
$$\log 1 = 0,$$
$$\log_a a = 1,$$
$$\log a^b = b \log a,$$
$$\log(ab) = \log a + \log b,$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b,$$
$$\log_a a^x = x = a^{\log_a x},$$
$$\ln x = \lg x = \log_e x, \ \ e = 2,71828\dots,$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

- *Goniometrické funkce*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2},$$
$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}.$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- *Zlomky*

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$,
$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$,
$(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$,

$(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$,
$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b}$,
$\frac{c}{cb} = \frac{1}{b}$,
$\frac{a}{a} = 1$.

- *Ostatní*
  - *Komplexní čísla* ($\mathbb{C}$)
    $i^2 = -1$,
    $\overline{a + ib} = a - ib$,
    $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$.
  - *Kvadratický polynom* $P(x) = ax^2 + bx + c$
    $D = b^2 - 4ac$,
    $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
    $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  - *Doplnění na čtverec*
    $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$,
    $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q$.

Reálná čísla

Definice 2. Buď $A \neq \emptyset$ uspořádaná množina, $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, libovolná. Řekneme, že prvek $a \in A$ je *supremum množiny* B (píšeme $\sup B = a$), jestliže

1) $x \leq a$ pro každé $x \in B$;
2) je-li $y \in A$ takové, že $x \leq y$ pro každé $x \in B$, pak je $a \leq y$.

Analogicky se definuje *infimum množiny* B ($\inf B$).

Je-li $a = \max A$, pak je a největším prvkem množiny A, tj. pro každý prvek $x \in A$ platí $x \leq a$. Analogické tvrzení platí pro $\min A$.

Kvadratické rovnice

Rovnice tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $x \in \mathbb{R}$, nebo $x \in \mathbb{C}$. Řešíme pomocí vzorců

$$D = b^2 - 4ac, \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- $D > 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2 různé reálné kořeny,
- $D = 0 \quad \Rightarrow \quad$ 1 dvojnásobný reálný kořen,
- $D < 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2 komplexně sdružené komplexní kořeny.

Posouvání grafu

Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a nenulová reálná čísla a, b.

(i) Uvažujme funkci $\tilde{y} = f(x + a)$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď doleva (je-li $a > 0$) nebo doprava (je-li $a < 0$), a to o velikost čísla a.
(ii) Uvažujme funkci $\hat{y} = f(x) + b$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď nahoru (je-li $b > 0$) nebo dolů (je-li $b < 0$), a to o velikost čísla b.

(1) Určete (jestliže existují) $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ a $\min M$, kde

i)
$$M = \{0, -1, 2, 5, 6, 8\};$$

ii)
$$M = \left\{\frac{1}{n} : \; n \in \mathbb{N}\right\};$$

iii)
$$M = \left\{n^2 - 2n + 1 : \; n \in \mathbb{Z}\right\};$$

iv)
$$M = [0, 1).$$

Řešení:

i) $\max M = \sup M = 8$ a $\min M = \inf M = -1$;

ii) $\max M = \sup M = 1$, $\inf M = 0$ a $\min M$ neexistuje;

iii) $\max M$ a $\sup M$ neexistuje, $\min M = \inf M = 0$;

iv) $\max M$ neexistuje, $\sup M = 1$ a $\min M = \inf M = 0$.

(2) Dokažte následující tvrzení: "Buď $M \neq \emptyset$, $M \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak

$$a = \sup M \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1)\ x \leq a\ \forall x \in M, \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 \in M:\ x_1 > a - \varepsilon." \end{array}$$

Řešení:

„$\Rightarrow$“ Buď $a = \sup M$, pak z definice $x \leq a$ pro $\forall x \in M$, tj. platí 1). Předpokládejme, že 2) neplatí. Pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že $\forall x \in M$ je $x \leq a - \varepsilon_0$. Tedy $a - \varepsilon_0$ je horní závora množiny M a zároveň $a = \sup M \Rightarrow a \leq a - \varepsilon_0$, což je spor. Tedy 2) platí.

„$\Leftarrow$“ Nechť platí 1) i 2). Podle definice určitě platí $\sup M \leq a$. Předpokládejme, že

$$\sup M < a.$$

Potom položme $\varepsilon = a - \sup M > 0$. Z 2) plyne, že

$$\exists x_1 \in M:\ x_1 > a - \varepsilon = \sup M,$$

což je spor. Proto nutně $\sup M = a$.

(3) Za předpokladu existence daných výrazů dokažte:

i)
$$\sup_{x\in A}[-f(x)] = -\inf_{x\in A}[f(x)];$$

ii)
$$\inf_{x\in A}[-f(x)] = -\sup_{x\in A}[f(x)];$$

iii)
$$\sup_{x\in A}[f(x)+g(x)] \leq \sup_{x\in A}[f(x)] + \sup_{x\in A}[g(x)];$$

iv)
$$\inf_{x\in A}[f(x)+g(x)] \geq \inf_{x\in A}[f(x)] + \inf_{x\in A}[g(x)];$$

v) v částech iii) a iv) nelze nerovnosti nahradit rovnostmi.

Řešení:

i)

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in A}[-f(x)] = c \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow [-f(x) \leq c\ \forall x \in A] \ \wedge\ [(b \in \mathbb{R},\ -f(x) \leq b\ \forall x \in A) \Rightarrow c \leq b] \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow [f(x) \geq -c\ \forall x \in A] \ \wedge\ [(b \in \mathbb{R},\ f(x) \geq -b\ \forall x \in A) \Rightarrow -c \geq -b] \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow \inf_{x\in A}[f(x)] = -c \Rightarrow \sup_{x\in A}[-f(x)] = c = -\inf[f(x)]\,.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
&\inf_{x\in A}[-f(x)] = c \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow [-f(x) \geq c\ \forall x \in A] \ \wedge\ [(b \in \mathbb{R},\ -f(x) \geq b\ \forall x \in A) \Rightarrow c \geq b] \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow [f(x) \leq -c\ \forall x \in A] \ \wedge\ [(b \in \mathbb{R},\ f(x) \leq -b\ \forall x \in A) \Rightarrow -c \leq -b] \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow \sup_{x\in A}[f(x)] = -c \Rightarrow \inf_{x\in A}[-f(x)] = c = -\sup[f(x)]\,.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
&f(x) \leq \sup_{x\in A} f(x),\ \ g(x) \leq \sup_{x\in A} g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow f(x)+g(x) \leq \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow \sup_{x\in A}[f(x)+g(x)] \leq \sup_{x\in A}\left[\sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)\right]\\
&\quad\Rightarrow \sup_{x\in A}[f(x)+g(x)] \leq \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x).
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
&f(x) \geq \inf_{x\in A} f(x),\ \ g(x) \geq \inf_{x\in A} g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow f(x)+g(x) \geq \inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow\\
&\quad\Rightarrow \inf_{x\in A}[f(x)+g(x)] \geq \inf_{x\in A}\left[\inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x)\right]\\
&\quad\Rightarrow \inf_{x\in A}[f(x)+g(x)] \geq \inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x).
\end{aligned}$$

v) Tvrzení dokážeme nalezením vhodného protipříkladu. Uvažujme např. funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \cos x$ na množině $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pak v iii) obdržíme
$$\sup_{x\in A}\,[\sin x + \cos x] = \sqrt{2},$$
přičemž $\sup_{x\in A} \sin x = 1$ a $\sup_{x\in A} \cos x = 1$. V části iv) dostaneme
$$\inf_{x\in A}\,[\sin x + \cos x] = 1,$$
přičemž $\inf_{x\in A} \sin x = 0$ a $\inf_{x\in A} \cos x = 0$.

(4) Dokažte pro libovolné podmnožiny A a B množiny $\mathbb{R}$ a libovolná reálná čísla a, b, c:

i)
$$a = \max M \Rightarrow a = \sup M;$$

ii)
$$A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B;$$

iii)
$$A \subseteq B \Rightarrow \inf A \geq \inf B;$$

iv)
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\};$$

v)
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\};$$

vi)
$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\};$$

vii)
$$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\};$$

viii)
$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|);$$

ix)
$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|);$$

x)
$$|a| = \max\{a, -a\} = -\min\{a, -a\};$$

xi)
$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\};$$

xii)
$$\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}.$$

Řešení:

i)
$$\begin{aligned} a = \max M &\Rightarrow [x \leq a \ \forall x \in M] \ \wedge \ a \in M \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x \leq a \ \forall x \in M] \ \wedge \ [(b \in \mathbb{R}, \ x \leq b \ \forall x \in M) \Rightarrow a \leq b] \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = \sup M. \end{aligned}$$

ii) Označme $a = \sup A$ a $b = \sup B$. Pak platí
$$b = \sup B \Rightarrow x \leq b \ \forall x \in B \Rightarrow x \leq b \ \forall x \in A \Rightarrow a \leq b,$$
neboť $a = \sup A$.

iii) Označme $a = \inf A$ a $b = \inf B$. Pak platí
$$b = \inf B \Rightarrow x \geq b \ \forall x \in B \Rightarrow x \geq b \ \forall x \in A \Rightarrow a \geq b,$$
neboť $a = \inf A$.

iv) Označme $a = \sup A$, $b = \sup B$, $c = \sup(A \cup B)$ a $d = \max\{\sup A, \sup B\}$. Pak platí

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in A] \ \vee \ [x \le b \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x \le a \le d \ \forall x \in A] \ \vee \ [x \le b \le d \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \le d \ \forall x \in A \cup B \Rightarrow c \le d. \end{aligned}$$

Také platí

$$d = \max\{a, b\} \Rightarrow (d = a) \ \vee \ (d = b) \overset{\text{podle ii)}}{\Rightarrow} d \le c \ \vee \ d \le c \Rightarrow d \le c.$$

To znamená, že

$$c = d.$$

v) Označme $a = \inf A$, $b = \inf B$, $c = \inf(A \cup B)$ a $d = \min\{\inf A, \inf B\}$. Pak platí

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Rightarrow [x \ge a \ \forall x \in A] \ \vee \ [x \ge b \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x \ge a \ge d \ \forall x \in A] \ \vee \ [x \ge b \ge d \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \ge d \ \forall x \in A \cup B \Rightarrow c \ge d. \end{aligned}$$

Také platí

$$d = \min\{a, b\} \Rightarrow (d = a) \ \vee \ (d = b) \overset{\text{podle iii)}}{\Rightarrow} d \ge c \ \vee \ d \ge c \Rightarrow d \le c.$$

To znamená, že

$$c = d.$$

vi) Označme $a = \sup A$, $b = \sup B$, $c = \sup(A \cap B)$ a $d = \min\{\sup A, \sup B\}$. Pak platí

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in A] \ \wedge \ [x \le b \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x \le a \ \forall x \in (A \cap B)] \ \vee \ [x \le b \ \forall x \in (A \cap B)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \le d \ \forall x \in (A \cap B) \Rightarrow c \le d. \end{aligned}$$

vii) Označme $a = \inf A$, $b = \inf B$, $c = \inf(A \cap B)$ a $d = \max\{\inf A, \inf B\}$. Pak platí

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Rightarrow [x \ge a \ \forall x \in A] \ \wedge \ [x \ge b \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x \ge a \ \forall x \in (A \cap B)] \ \vee \ [x \ge b \ \forall x \in (A \cap B)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \ge d \ \forall x \in (A \cap B) \Rightarrow c \ge d. \end{aligned}$$

viii) Pro $a \ge b$ platí

$$\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - a + b) = b = \min\{a, b\}.$$

Pro $a < b$ platí

$$\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a = \min\{a, b\}.$$

ix) Pro $a \ge b$ platí

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a = \max\{a, b\}.$$

Pro $a < b$ platí

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - a + b) = b = \max\{a, b\}.$$

x) Z části viii) a ix) plyne

$$\max\{a,-a\} = \frac{1}{2}\left(a-a+|a-(-a)|\right) = \frac{1}{2}|2a| = |a|,$$
$$-\min\{a,-a\} = -\frac{1}{2}\left(a-a-|a-(-a)|\right) = \frac{1}{2}|2a| = |a|.$$

xi) Zvážíme všechny možné varianty. Pro $a \geq b$ a $a \geq c$ platí

$$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\} = \max\{b,c\} = \min\{a,\max\{b,c\}\}.$$

Pro $a < b$ a $a < c$ platí

$$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\} = \max\{a,a\} = a = \min\{a,\max\{b,c\}\}.$$

Pro $a \geq b$ a $a < c$ platí

$$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\} = \max\{b,a\} = a = \min\{a,\max\{b,c\}\}.$$

Pro $a < b$ a $a \geq c$ platí

$$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\} = \max\{a,c\} = a = \min\{a,\max\{b,c\}\}.$$

xii) Zvážíme všechny možné varianty. Pro $a \geq b$ a $a \geq c$ platí

$$\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\} = \min\{a,a\} = a = \max\{a,\min\{b,c\}\}.$$

Pro $a < b$ a $a < c$ platí

$$\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\} = \min\{b,c\} = \max\{a,\min\{b,c\}\}.$$

Pro $a \geq b$ a $a < c$ platí

$$\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\} = \min\{a,c\} = a = \max\{a,\min\{b,c\}\}.$$

Pro $a < b$ a $a \geq c$ platí

$$\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\} = \min\{b,a\} = a = \max\{a,\min\{b,c\}\}.$$

(5) Dokažte:

i)
$$\max\left\{x : x = \frac{n}{n+1},\ n \neq -1,\ n \in \mathbb{Z}\right\} = 2;$$

ii)
$$\sup\left\{x : x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} = 1;$$

iii)
$$\inf\left\{x : x = \frac{1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{Z}\right\} = 0;$$

iv)
$$\max\left\{x : x = \frac{1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{Z}\right\} = 1;$$

v)
$$\sup\left(A \cup B \cup C\right) = 1, \text{ kde}$$
$$A = \left\{x : x = \frac{n^2}{n^2+1},\ n \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$B = \left\{x : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$C = \left\{x : x = \frac{n-3}{2n+1},\ n \geq 0\right\}.$$

Řešení:

i) Pro $n = -2$ je $x = \frac{-2}{-1} = 2$. Dále platí $\left|\frac{n}{n+1}\right| = \left|1 - \frac{1}{n+1}\right| \leq 1 + \left|\frac{1}{n+1}\right| \leq 2$ pro všechna $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

ii) Platí $\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} \leq 1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Buď nyní $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$, pak
$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon.$$

iii) Platí $\frac{1}{n^2+1} \geq 0$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Buď dále $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, pak
$$\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}+1} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon.$$

iv) Platí $\frac{1}{n^2+1} \leq 1$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Pro $n = 0$ platí $x = \frac{1}{0+1} = 1$.

v) Platí $\sup A = 1$, $\sup B = 1$ a $\sup C = \frac{1}{2}$. Z Příkladu 4 části iv) plyne
$$\begin{aligned}\sup\left(A \cup B \cup C\right) &= \sup\left[\left(A \cup B\right) \cup C\right] = \\ &= \max\left\{\sup\left(A \cup B\right), \sup C\right\} = \\ &= \max\left\{\max\left\{\sup A, \sup B\right\}, \sup C\right\} = \\ &= \max\left\{\sup A, \sup B, \sup C\right\} = 1.\end{aligned}$$

(6) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a C platí tzv. *distributivní zákony*

i)
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

ii)
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Řešení:

i)
$$\begin{aligned}
\subseteq:\quad x \in (A \cup B) \cap C &\Rightarrow x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C), \\
\supseteq:\quad x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) &\Rightarrow x \in (A \cap C) \ \vee \ x \in (B \cap C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C.
\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}
\subseteq:\quad x \in (A \cap B) \cup C &\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C), \\
\supseteq:\quad x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) &\Rightarrow (x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C.
\end{aligned}$$

(7) Určete množiny dané těmito výrazy:

i)
$$(1,\infty)\cap(-1,2];$$
ii)
$$(0,\infty)\setminus(-1,2);$$
iii)
$$((-\infty,-2)\cup[-2,0))\cup[0,\infty);$$
iv)
$$[-1,5]\cap[5,100];$$
v)
$$[-1,10]\cap[15,20];$$
vi)
$$[-1,4)'=\overline{[-1,4)}=[-1,4)^C;$$
vii)
$$[1,5)\setminus(0,5].$$

Řešení:

i)
$$(1,\infty)\cap(-1,2]=(1,2]\,;$$
ii)
$$(0,\infty)\setminus(-1,2)=[2,\infty)\,;$$
iii)
$$((-\infty,-2)\cup[-2,0))\cup[0,\infty)=(-\infty,\infty)\,;$$
iv)
$$[-1,5]\cap[5,100]=\{5\}\,;$$
v)
$$[-1,10]\cap[15,20]=\{\emptyset\}\,;$$
vi)
$$[-1,4)'=(-\infty,-1)\cup[4,\infty)\,;$$
vii)
$$[1,5)\setminus(0,5]=\{\emptyset\}\,.$$

(8) Vyřešte kvadratickou rovnici $2x^2 - x - 3 = 0$ a) v $\mathbb{R}$, b) v $\mathbb{C}$.

Řešení:

Nejprve spočteme diskriminant dané rovnice

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25.$$

Protože $D > 0$, rovnice má dva reálné kořeny. Ty snadno dopočítáme.

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2}, \\ -1. \end{cases}$$

Rovnice má tedy v $\mathbb{R}$ dva kořeny a to $\frac{3}{2}$ a -1, stejně jako v $\mathbb{C}$, neboť komplexní čísla jsou nadmnožinou čísel reálných.

(9) Vyřešte kvadratickou rovnici $x^2 + 4x + 4 = 0$ a) v $\mathbb{R}$, b) v $\mathbb{C}$.

Řešení:

Nejprve spočteme diskriminant dané rovnice

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0.$$

Protože $D = 0$, rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen. Ten snadno dopočítáme.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = -2.$$

Rovnice má tedy v $\mathbb{R}$ jeden dvojnásobný kořen a to -2, stejně jako v $\mathbb{C}$, neboť komplexní čísla jsou nadmnožinou čísel reálných.

(10) Vyřešte kvadratickou rovnici $x^2 - 4x + 29 = 0$ a) v $\mathbb{R}$, b) v $\mathbb{C}$.

Řešení:

Nejprve spočteme diskriminant dané rovnice

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = -100.$$

Protože $D < 0$, rovnice nemá žádný reálný kořen – má dvojici komplexních kořenů. Ty dopočítáme.

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{100i^2}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = \begin{cases} 2 + 5i, \\ 2 - 5i. \end{cases}$$

Rovnice tedy v $\mathbb{R}$ nemá žádný kořen. V $\mathbb{C}$ jsou jejími kořeny komplexně sdružená čísla $2 + 5i$ a $2 - 5i$.

(11) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je výraz $-2x^2 + x + 3$ a) nezáporný, b) kladný.

Řešení:

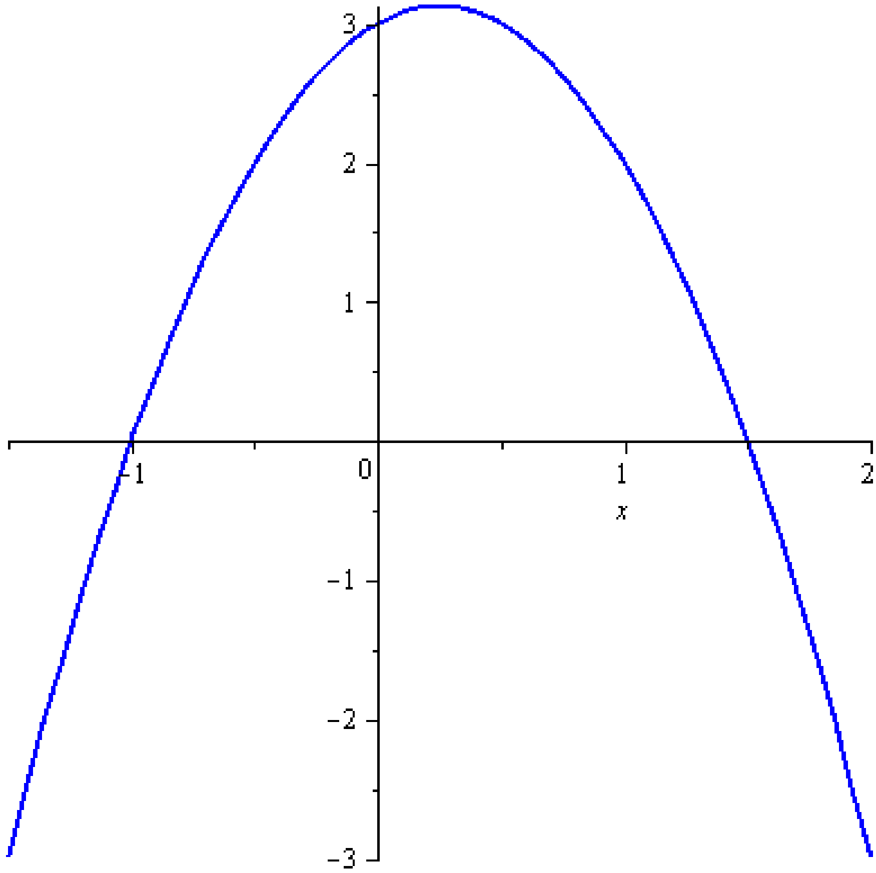
Protože jde o kvadratický polynom, je nejjednodušším způsobem načrtnout si jeho graf – parabolu. Jediné informace, které přitom musí být přesné, jsou průsečíky s osou x (kořeny polynomu) a samozřejmě zda je parabola otevřena nahoru, nebo dolů.

Druhou informaci získáme okamžitě ze zadaného výrazu. Protože je vedoucí koeficient (-2) záporný, je parabola otevřena dolů.

Kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu jako by šlo o kvadratickou rovnici:

$$D = 25 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \begin{cases} \frac{3}{2}, \\ -1. \end{cases}$$

Graf tedy vypadá takto:



Daný výraz je tedy nezáporný pro $x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$ a kladný pro $x \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

(12) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je výraz $x^2 + 4x + 4$ a) kladný, b) nezáporný.

Řešení:

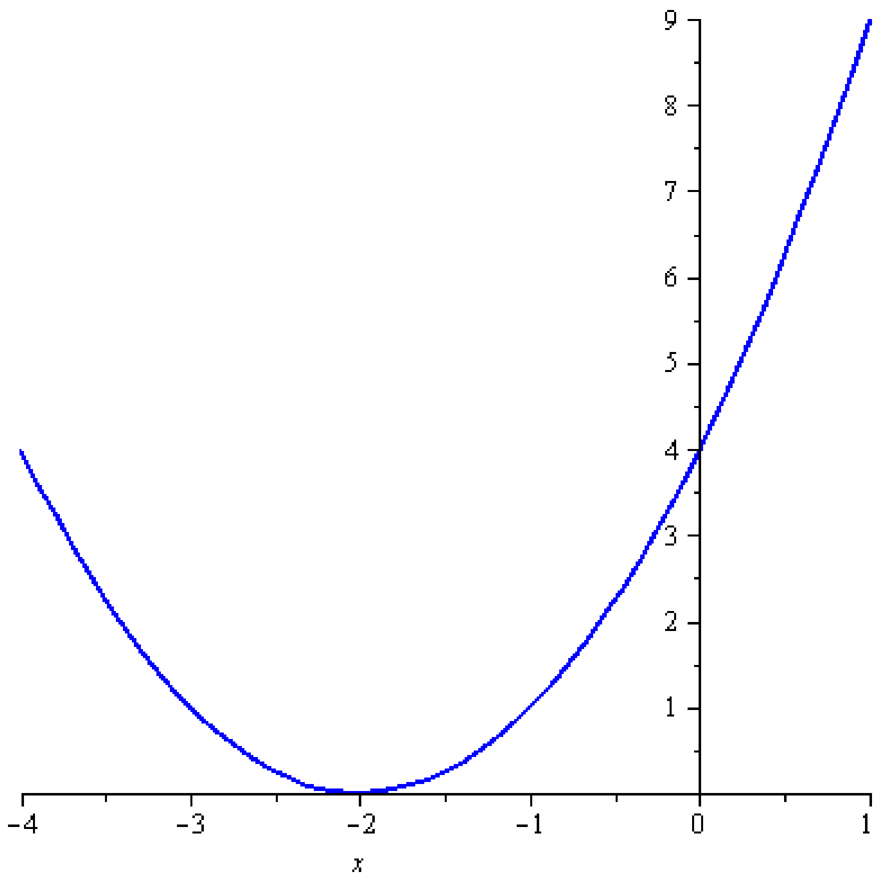
Protože jde o kvadratický polynom, je nejjednodušším způsobem načrtnout si jeho graf – parabolu. Jediné informace, které přitom musí být přesné, jsou průsečíky s osou x (kořeny polynomu) a samozřejmě zda je parabola otevřena nahoru, nebo dolů.

Druhou informaci získáme okamžitě ze zadaného výrazu. Protože je vedoucí koeficient (1) kladný, je parabola otevřena nahoru.

Kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu jako by šlo o kvadratickou rovnici:

$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -2.$$

Graf tedy vypadá takto:



Daný výraz je tedy kladný pro $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ a nezáporný pro $x \in \mathbb{R}$.

(13) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je výraz $x^2 - 4x + 29$ a) kladný, b) záporný.

Řešení:

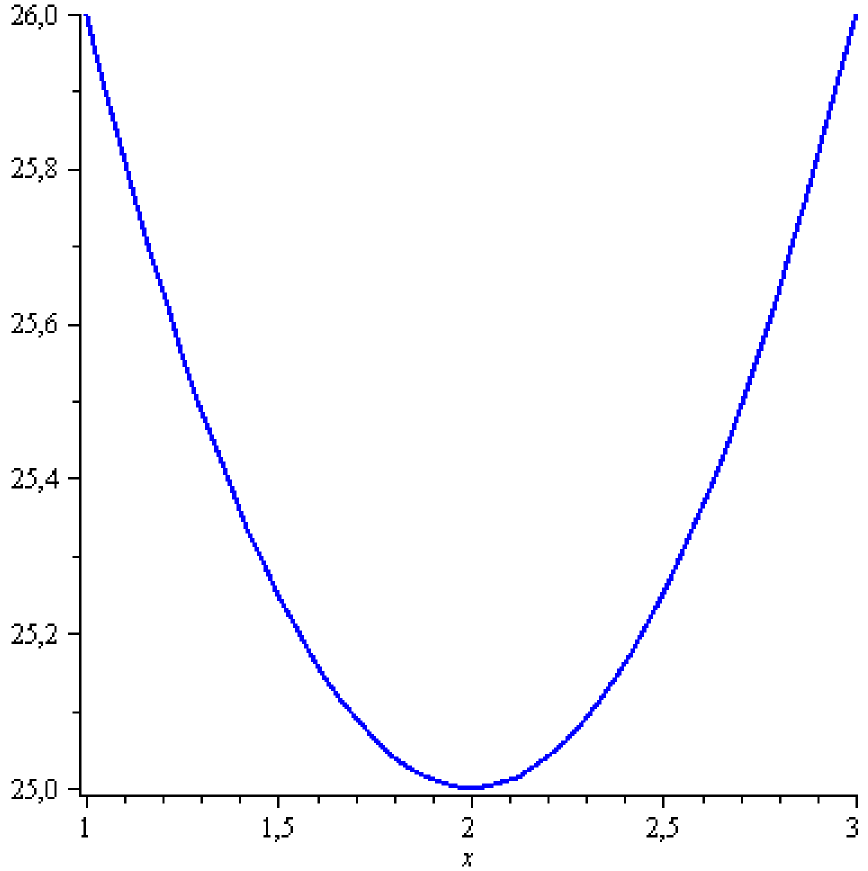
Protože jde o kvadratický polynom, je nejjednodušším způsobem načrtnout si jeho graf – parabolu. Jediné informace, které přitom musí být přesné, jsou průsečíky s osou x (kořeny polynomu) a samozřejmě zda je parabola otevřena nahoru, nebo dolů.

Druhou informaci získáme okamžitě ze zadaného výrazu. Protože je vedoucí koeficient (1) kladný, je parabola otevřena nahoru.

Kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu jako by šlo o kvadratickou rovnici:

$$D = -100.$$

Protože je diskriminant záporný, rovnice nemá žádný reálný kořen a parabola osu x nikde neprotíná. Graf tedy vypadá takto:



Daný výraz je tedy kladný pro $x \in \mathbb{R}$ a nikdy není záporný, tj. můžeme říct, že je záporný pro $x \in \emptyset$.

(14) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

Řešení:

Musí platit

$$x^3 - x^2 + x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\left(x^2+1\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1.$$

Proto

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

(15) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{2x^2}{x + |x|}.$$

Řešení:

Musí platit

$$x + |x| \neq 0.$$

Nejdříve uvažme $x \geq 0$, potom

$$x + x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Pro $x < 0$ dostaneme

$$x - x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \neq 0,$$

proto definiční obor je

$$D(f) = (0, \infty).$$

(16) Určete definiční obor funkce

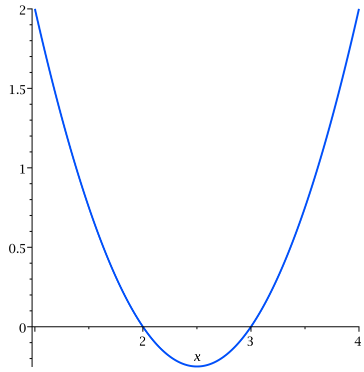
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

Řešení:

Musí platit

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

Kořeny tohoto kvadratického polynomu jsou $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$. Poněvadž koeficient u druhé mocniny je kladný, má graf této kvadratické funkce podobu



Proto definiční obor funkce je

$$D(f) = (-\infty, 2] \cup [3, \infty).$$

(17) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \tfrac{\ln x}{2x^2+3x-2}.$$

Řešení:

Z logaritmu dostáváme, že $x > 0$. Dále ve jmenovateli nesmí být nula, tedy v definičním oboru dané funkce nejsou kořeny polynomu $2x^2 + 3x - 2$. Snadno určíme, že kořeny jsou $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$. Tedy

$$D(f) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

(18) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{3x}{2x-8} + \sqrt{10-x} - \ln(x+2).$$

Řešení:

Zde určíme nejprve definiční obor každé části dané funkce a poté uděláme jejich průnik. V první části, lomeném výrazu, nesmí být ve jmenovateli nula. Tedy nutně $x \neq 4$. V druhé části musí být pod odmocninou nezáporné číslo, odtud $x \leq 10$. A konečně, z logaritmu dostáváme, že $x > -2$. Celkem

$$D(f) = (-2, 4) \cup (4, 10].$$

(19) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5) + \frac{2x^2}{\sqrt{2x+6}}.$$

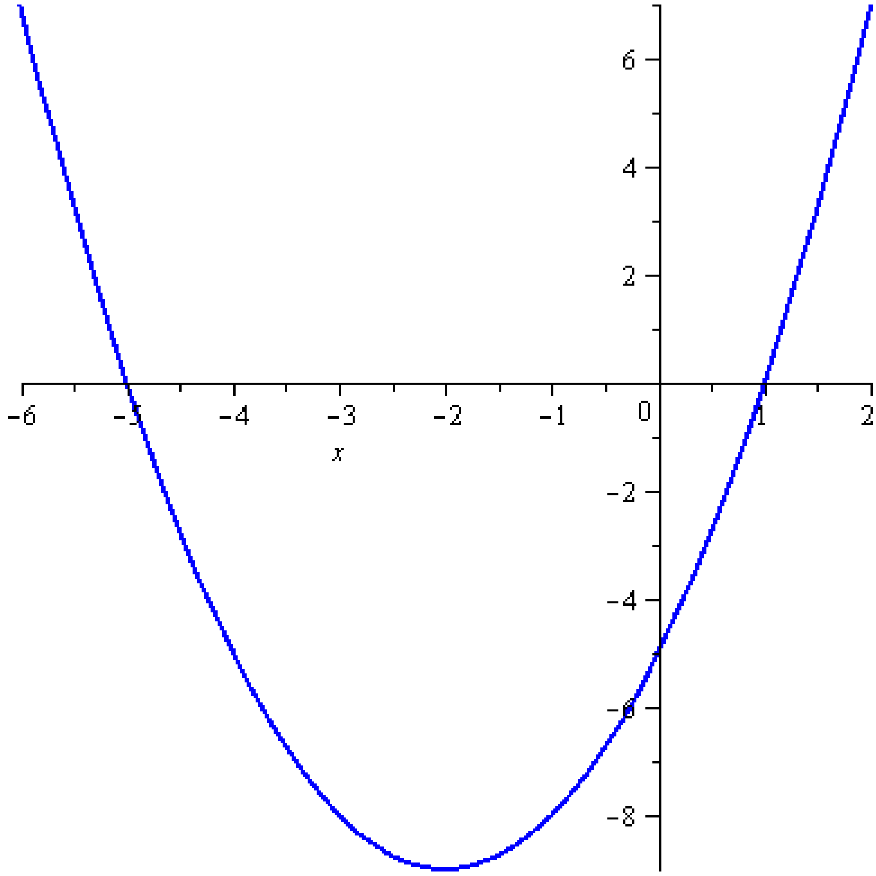
Řešení:

Určíme nejprve definiční obor každé části dané funkce a poté uděláme jejich průnik.

V první části musí platit

$$x^2 + 4x - 5 > 0.$$

Jde o kvadratický polynom jehož grafem je parabola otevřená nahoru (vedoucí koeficient je kladný) a snadno dopočítáme, že jeho kořeny jsou -5 a 1. Graf tedy vypadá takto:



Tedy $x \in (-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

V druhé části nesmí být po odmocninou záporné číslo a zároveň ve jmenovateli není přípustná nula, tj.

$$2x + 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -3.$$

Celkem

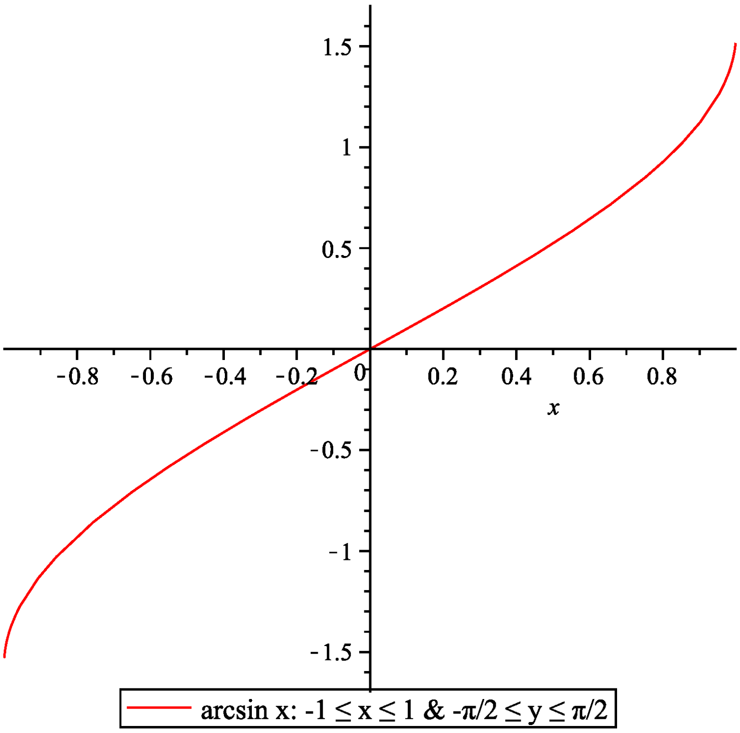
$$D(f) = (1, \infty).$$

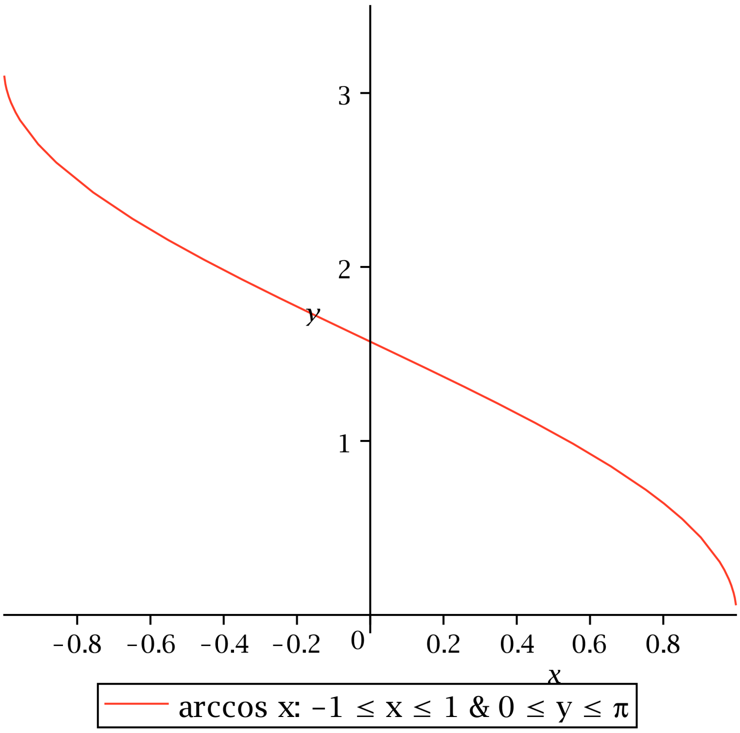
(20) Určete definiční obor funkce

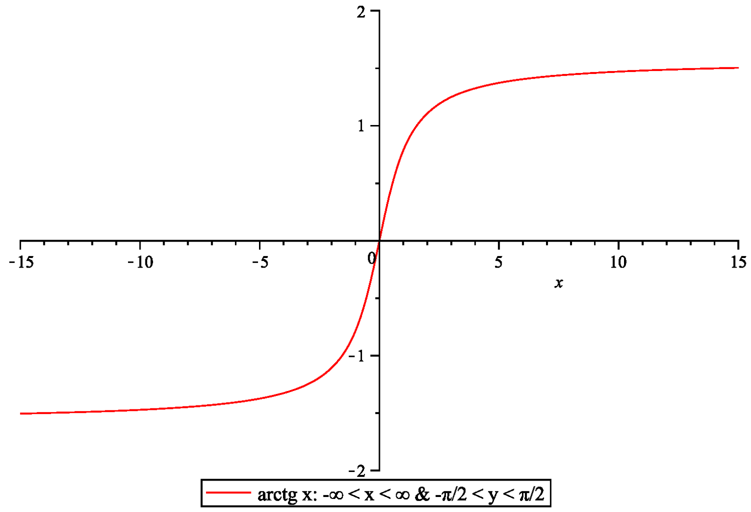
$$f(x) = \arccos \frac{1-2x}{4}.$$

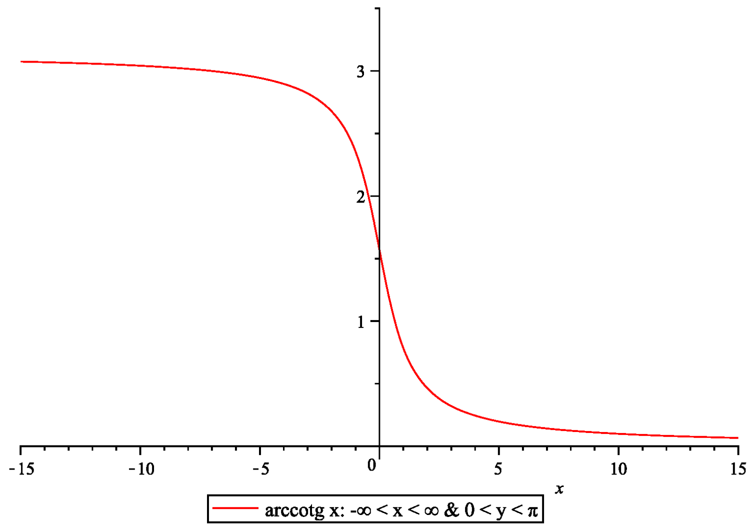
Řešení:

Nejdříve připomeňme grafy a základní vlastnosti cyklometrických funkcí









Proto musí platit

$$-1 \leq \frac{1-2x}{4} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq 1-2x \quad \wedge \quad 1-2x \leq 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -5 \leq -2x \quad \wedge \quad -2x \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{5}{2} \quad \wedge \quad x \geq -\frac{3}{2}.$$

Proto máme definiční obor

$$D(f) = \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

(21) Určete definiční obor funkce

$$g(x) = \arcsin \frac{x+3}{2} + \sqrt{\frac{x+4}{x-2}}.$$

Řešení:

Určíme nejprve definiční obor každé části dané funkce a poté uděláme jejich průnik.

V první části musí platit

$$\begin{aligned} -1 \geq \frac{x+3}{2} \geq 1, \\ -2 \geq x+3 \geq 2, \\ -5 \geq x \geq -1, \end{aligned}$$

tedy $x \in [-5, -1]$.

V druhé části nesmí být po odmocninou záporné číslo a zároveň ve jmenovateli není přípustná nula. Nulové body jsou přitom -4 a 2. Ty rozdělují reálnou osu na tři intervali, na nichž výraz pod odmocninou nabývá vždy stejného znaménka. Dosazením zjistíme jaká (přitom číslo 2 vůbec neuvažujeme, aby ve jmenovateli nebyla nula):

	$(-\infty, -4]$	$[-4, 2)$	$(2, \infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+4}{x-2}$	$+$	$-$	$+$

Odtud dostáváme, že $x \in (-\infty, -4] \cup (2, \infty)$.

Celkem

$$D(g) = [-5, -4].$$

(22) Určete definiční obor funkce

$$f:\ y=\operatorname{arccotg}\frac{x-1}{\sqrt{1-x}}+\log_{\frac{1}{3}}^{-2}(2x+21).$$

Řešení:

Určíme nejprve definiční obor každé části dané funkce a poté uděláme jejich průnik.

V první části jsou jediná omezení odmocnina a zlomek, tedy $x<1$.

V druhé části musíme vzít v úvahu jak logaritmus, tak i fakt, že je tento výraz umocněn na záporný exponent, je tedy ve jmenovateli, a proto musí být různý od nuly. Logaritmus je roven nule v jedničce, tj.

$$2x+21\neq 1 \quad\Rightarrow\quad x\neq -10.$$

Jako poslední zbývá vyřešit už zmíněný logaritmus, do nějž lze dosazovat pouze kladná čísla, tedy

$$2x+21\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq -\frac{21}{2}.$$

Celkem

$$D(f)=\left[-\frac{21}{2},-10\right)\cup(-10,1)\,.$$

(23) Určete definiční obor funkce

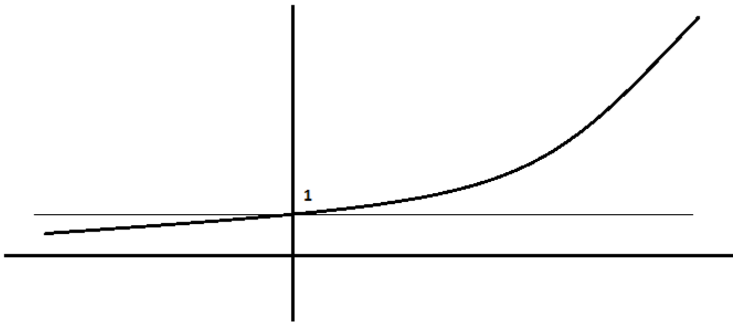
$$f(x) = \ln(1 - e^x).$$

Řešení:

Musí platit

$$1 - e^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > e^x.$$

Graf funkce e^x má podobu



proto je definiční obor

$$D(f) = (-\infty, 0).$$

(24) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\cos x}{5^{x+1} - 3 \cdot 5^x - 50}.$$

Řešení:

Musí platit

$$5^{x+1} - 3 \cdot 5^x - 50 \neq 0.$$

Položme $y = 5^x$, potom

$$\begin{aligned} 5^{x+1} - 3 \cdot 5^x - 50 \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 5y - 3y - 50 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y \neq 50 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad y \neq 25 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x \neq 25 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 5^x \neq 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2. \end{aligned}$$

Proto máme definiční obor

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

(25) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{3^{x+1}}{\sin x + \cos x}.$$

Řešení:

Musí platit

$$\begin{aligned}
\sin x + \cos x \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{x + x + \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos\frac{x - x - \frac{\pi}{2}}{2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Proto máme definiční obor

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi\right\}.$$

(26) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{x - \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos x}.$$

Řešení:

Musí platit

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x + 3\cos x \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\left(1 - \cos^2 x\right) + 3\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad -2\cos^2 x + 3\cos x + 2 \neq 0 \quad \overset{\cos x = y}{\Leftrightarrow} \\
&\overset{\cos x = y}{\Leftrightarrow} \quad -2y^2 + 3y + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad y_1 \neq 2,\ y_2 \neq -\frac{1}{2} \ \wedge \ \cos x = y \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x \neq 2 \text{ (vždy)}\,,\ \cos x \neq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Proto máme definiční obor

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\}.$$

(27) Dokažte, že pro $x > 0$ platí
$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}.$$

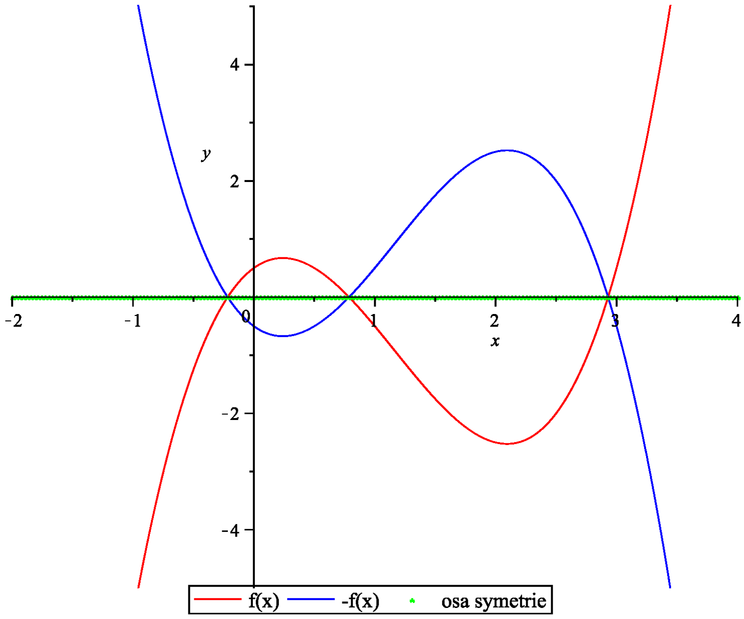
Řešení:

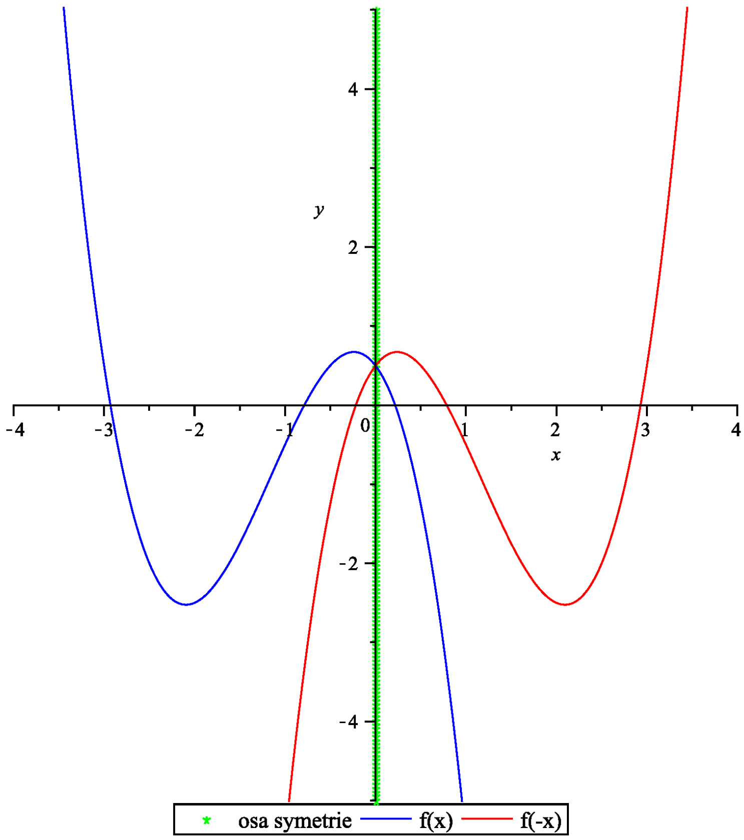
Položme $u = \operatorname{arctg} x$ a $v = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$. Potom platí $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Musíme ukázat, že $u = v$. Proto
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u = x \ \wedge \ \operatorname{cotg} v = \frac{1}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} u = x \ \wedge \ \frac{1}{\operatorname{tg} v} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} u = x \ \wedge \ \operatorname{tg} v = x \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} u = x = \operatorname{tg} v \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad u = v. \end{aligned}$$

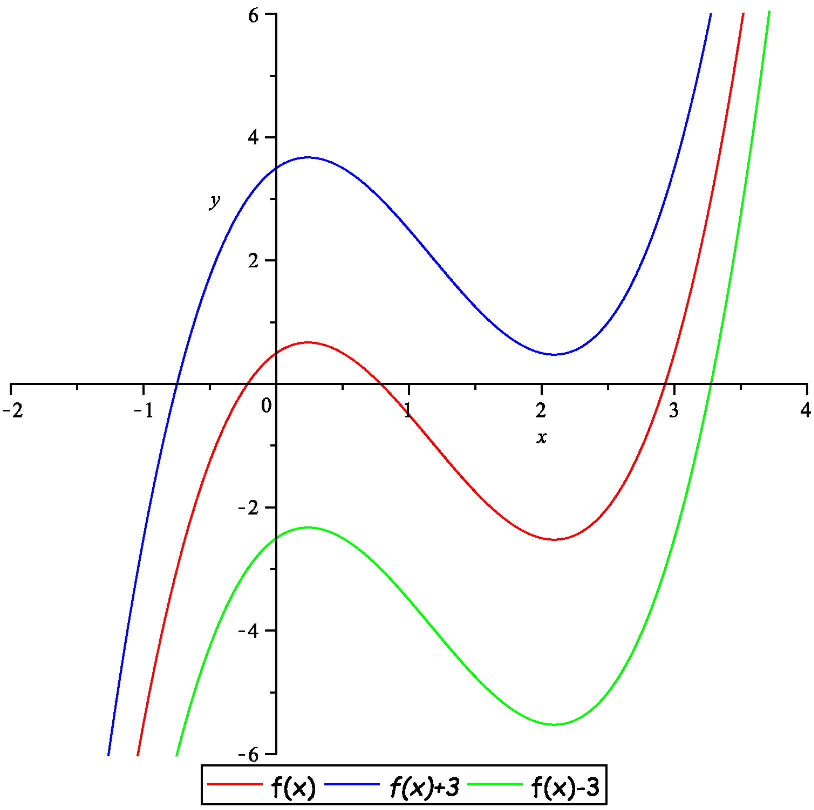
(28) Načrtněte graf libovolné nekonstantní funkce f a k němu grafy funkcí

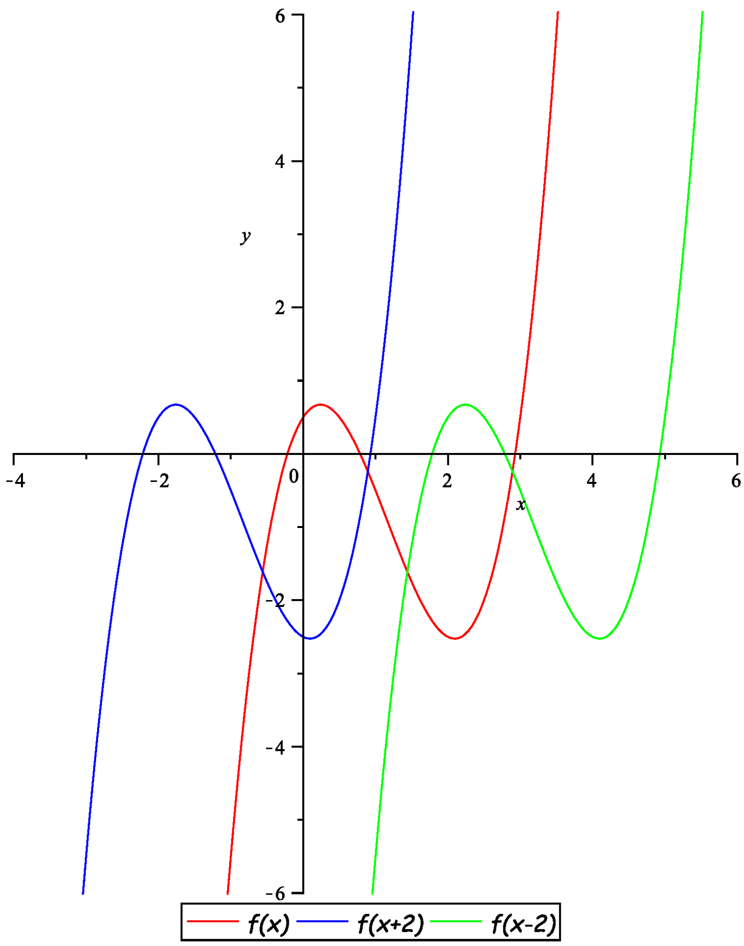
$$-f(x), \quad f(-x), \quad f(x)+b, \quad f(x-a), \quad k \cdot f(x), \quad f(m \cdot x).$$

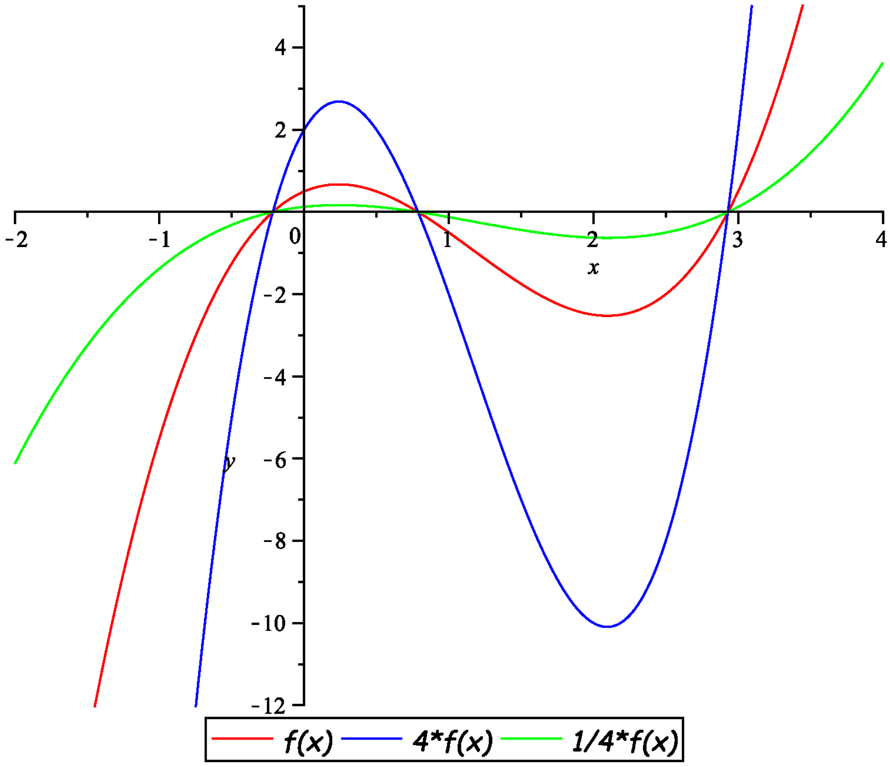
Řešení:



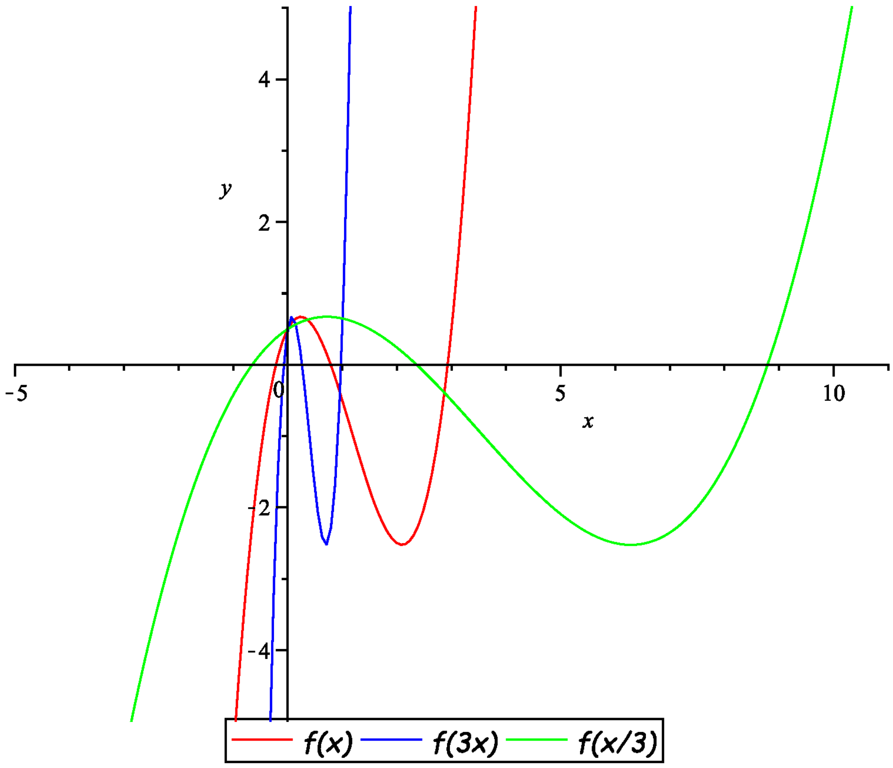



6
4
y
2
-2
-1
0
1
2
3
4
x
-2
-4
-6
f(x)
f(x)+3
f(x)-3


6
4
y
2
-4
-2
0
2
4
6
x
-2
-4
-6
f(x)
f(x+2)
f(x-2)



4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-2
-1
0
1
2
3
4
x
y
f(x)
4*f(x)
1/4*f(x)

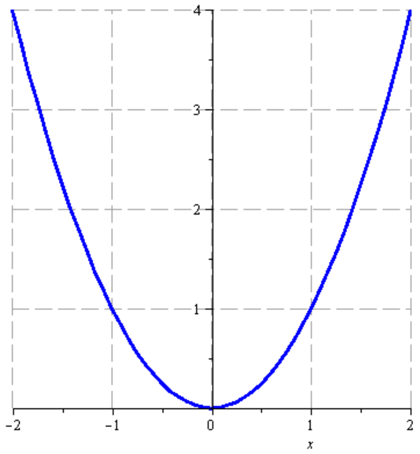


4
2
-2
-4
-5
0
5
10
x
y
f(x)
f(3x)
f(x/3)

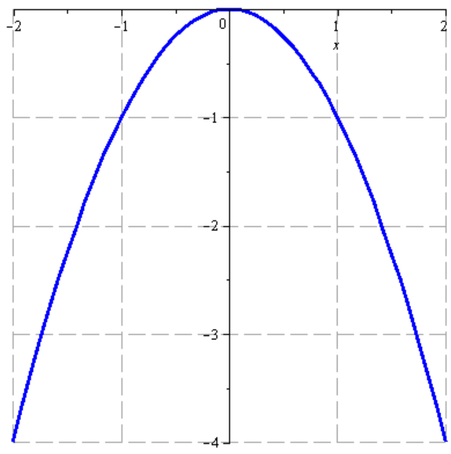
(29) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = x^2, \quad (ii) y = -x^2, \quad (iii) y = (-x)^2.$$

Řešení:



Obrázek 1. Řešení (i) a (iii).

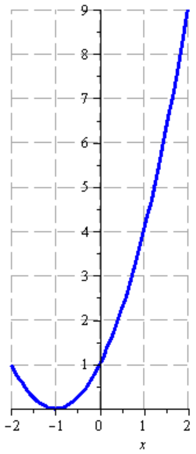


Obrázek 2. Řešení (ii).

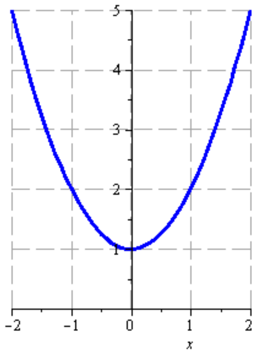
(30) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = (x+1)^2, \quad (ii) y = x^2 + 1, \quad (iii) y = (1-x)^3.$$

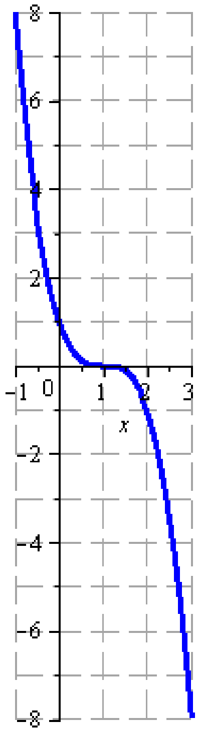
Řešení:



OBRÁZEK 3. Řešení (i).



OBRÁZEK 4. Řešení (ii).

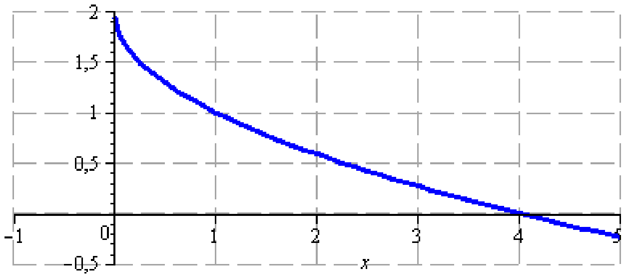


OBRÁZEK 5. Řešení (iii).

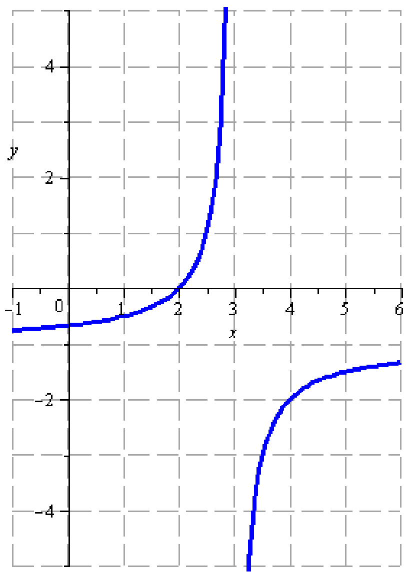
(31) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = 2 - \sqrt{x}, \quad (ii) y = \frac{1}{3-x} - 1.$$

Řešení:



Obrázek 6. Řešení (i).

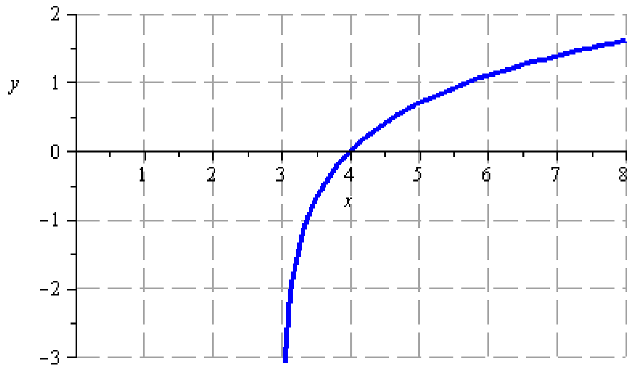


Obrázek 7. Řešení (ii).

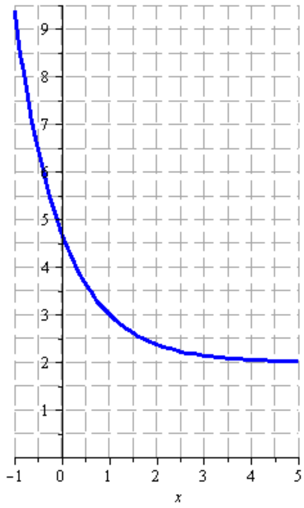
(32) Načrtněte graf funkce

$$(\mathrm{i})\, y = \ln(x-3), \quad (\mathrm{ii})\, y = 2 + e^{1-x}.$$

Řešení:



Obrázek 8. Řešení (i).

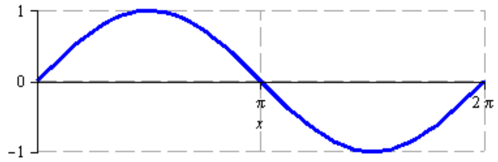


Obrázek 9. Řešení (ii).

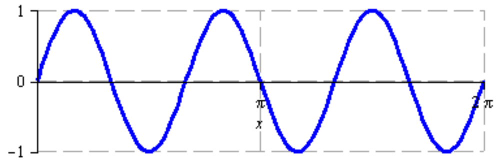
(33) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = \sin x, \quad (ii) y = \sin(3x), \quad (iii) y = \sin\tfrac{x}{5}, \quad (iv) y = 2\sin x.$$

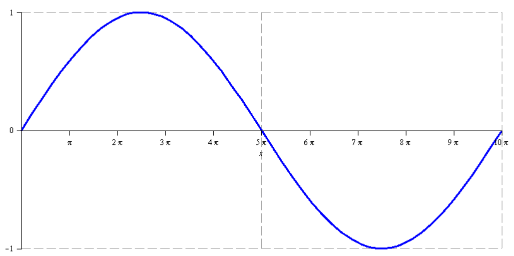
Řešení:



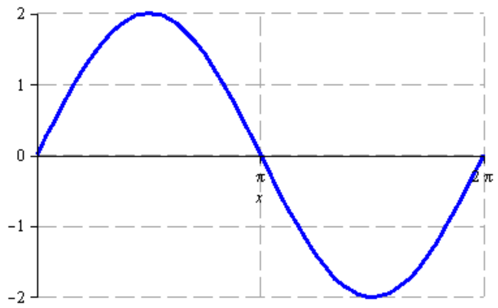
OBRÁZEK 10. Řešení (i).



OBRÁZEK 11. Řešení (ii).



OBRÁZEK 12. Řešení (iii).

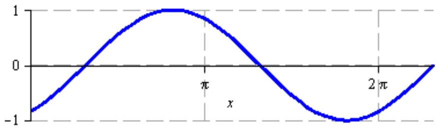


OBRÁZEK 13. Řešení (iv).

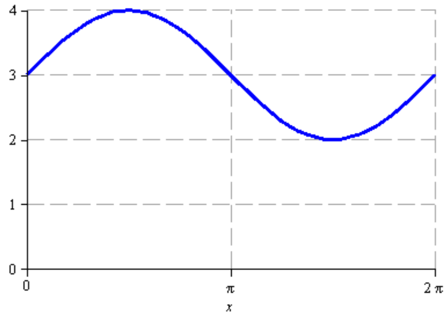
(34) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = \sin(x-1), \quad (ii) y = 3 + \sin x, \quad (iii) y = \operatorname{tg}(3x).$$

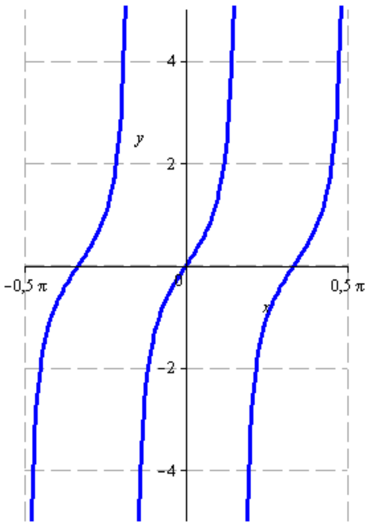
Řešení:



Obrázek 14. Řešení (i).



Obrázek 15. Řešení (ii).



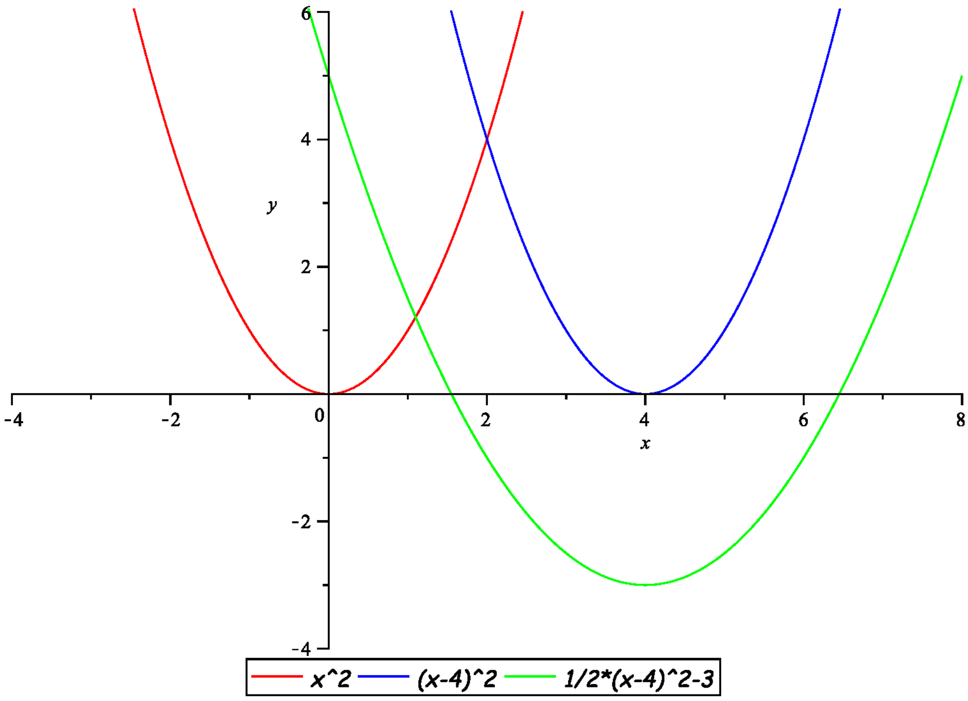
Obrázek 16. Řešení (iii).

(35) Načrtněte graf funkce
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5.$$

Řešení:

Nejdříve upravíme zadání do tvaru
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 8x + 10\right) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-4)^2 - 6\right] \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3. \end{aligned}$$

Nyní můžeme využít Příklad 28 a graf funkce $f(x)$ načrtnout díky znalosti grafu funkce x^2, proto

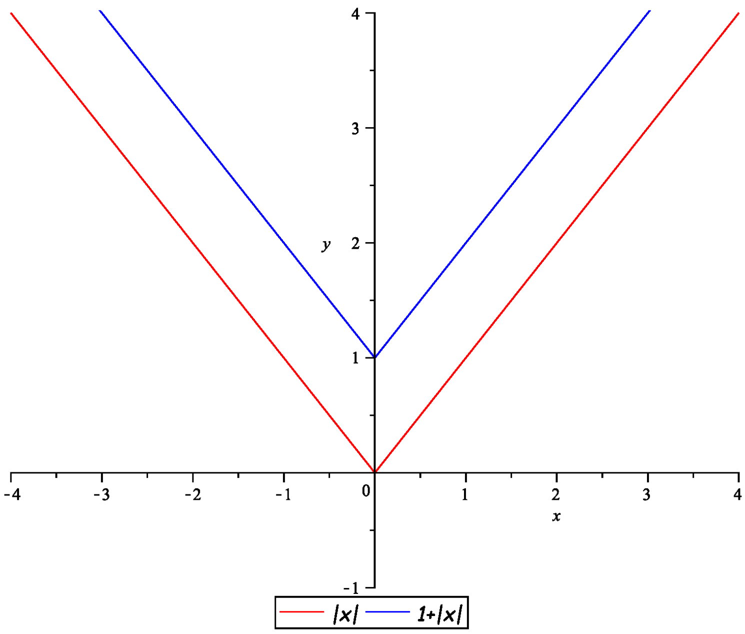


(36) Načrtněte grafy funkcí

$$f_1(x) = |x| + 1 \quad \text{a} \quad f_2(x) = 2\,|x-1| + |x| + 2.$$

Řešení:

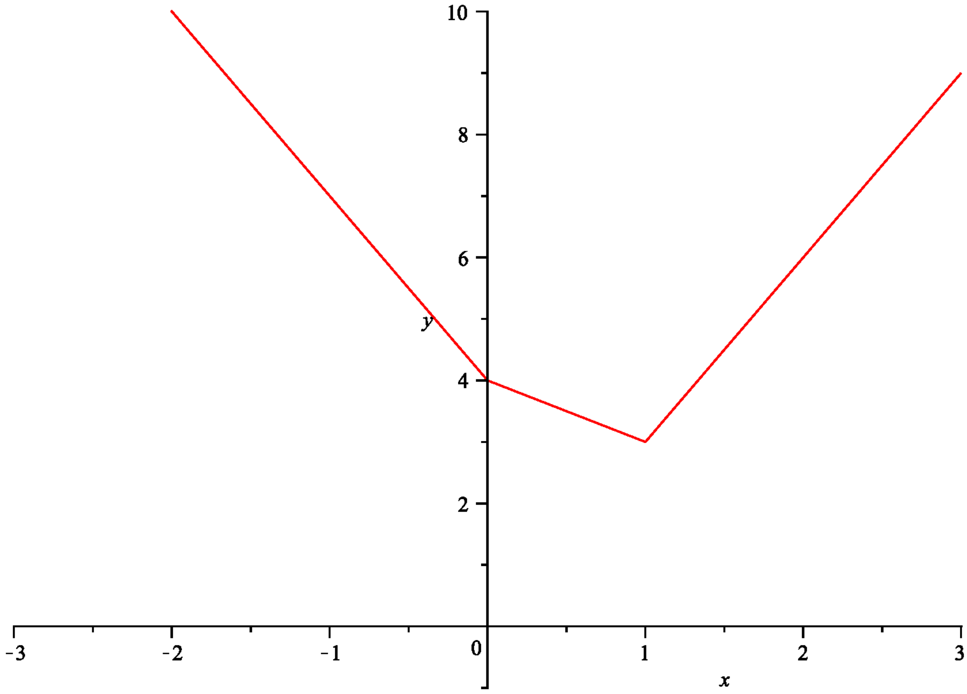
Pomocí řešení Příkladu 28 můžeme ze znalosti grafu funkce $|x|$ načrtnout graf funkce $f_1(x)$, tj.



Nyní načrtneme graf funkce $f_2(x)$. Nejdříve určíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot, tj. $x_1 = -1$ a $x_2 = 0$. Tyto body nám rozdělí reálnou osu na tři subintervaly. Proto

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, 0] \quad &\Rightarrow \quad f_2(x) = -2(x-1) - x + 2 = -3x + 4,\\ x \in (0, 1] \quad &\Rightarrow \quad f_2(x) = -2(x-1) + x + 2 = -x + 4,\\ x \in (1, \infty) \quad &\Rightarrow \quad f_2(x) = 2(x-1) + x + 2 = 3x. \end{aligned}$$

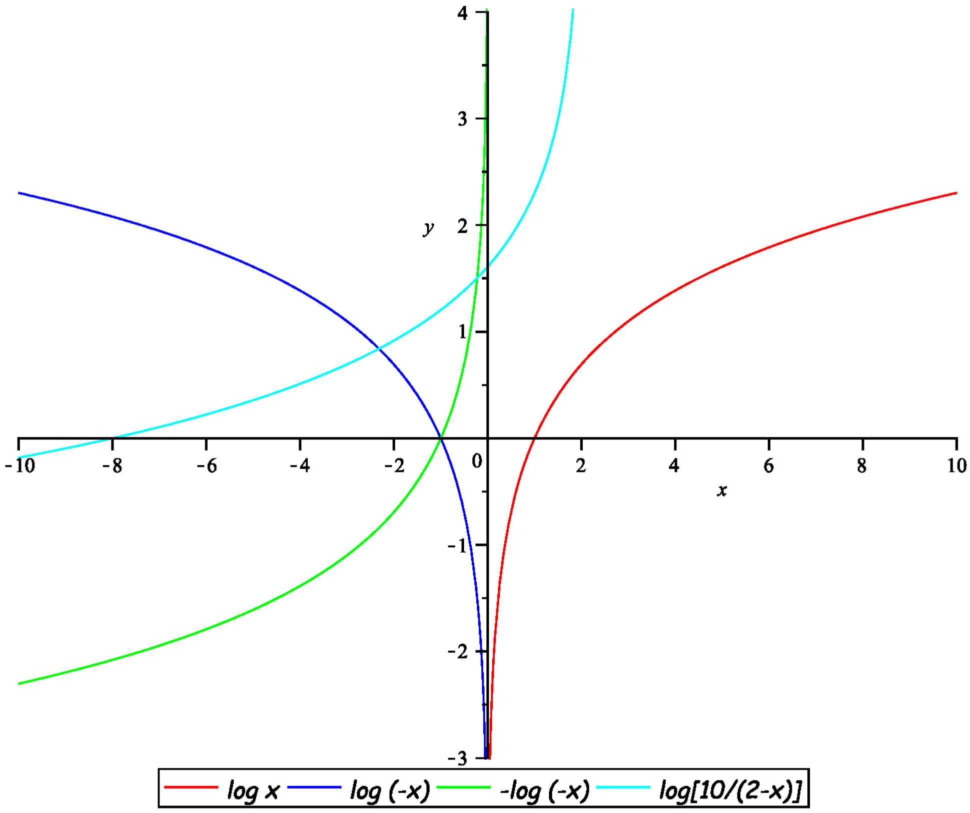
Na jednotlivých subintervalech je graf funkce tvořen přímkami, které prochází postupně body $[-1, 7]$, $[0, 4]$, $[1, 3]$ a $[2, 6]$, tj.


10
8
6
y
4
2
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

(37) Načrtněte graf funkce
$$f(x) = \log \frac{10}{2-x}.$$

Řešení:

Je zřejmé, že definiční obor funkce je $D(f) = (-\infty, 2)$. Upravíme zadání funkce, tj.
$$f(x) = \log \frac{10}{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \log 10 - \log(2-x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x) = 1 - \log\left[-(x-2)\right] \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x) = -\log\left[-(x-2)\right] + 1.$$
Ještě určíme průsečík s osou x, tj.
$$0 = -\log\left[-(x-2)\right] + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \log(2-x) \quad \Leftrightarrow \quad 10 = 2 - x \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -8.$$
Proto s pomocí Příkladu 28 můžeme načrtnou graf funkce $f(x)$, tj.



(38) Načrtněte graf funkce

$$f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1.$$

Řešení:

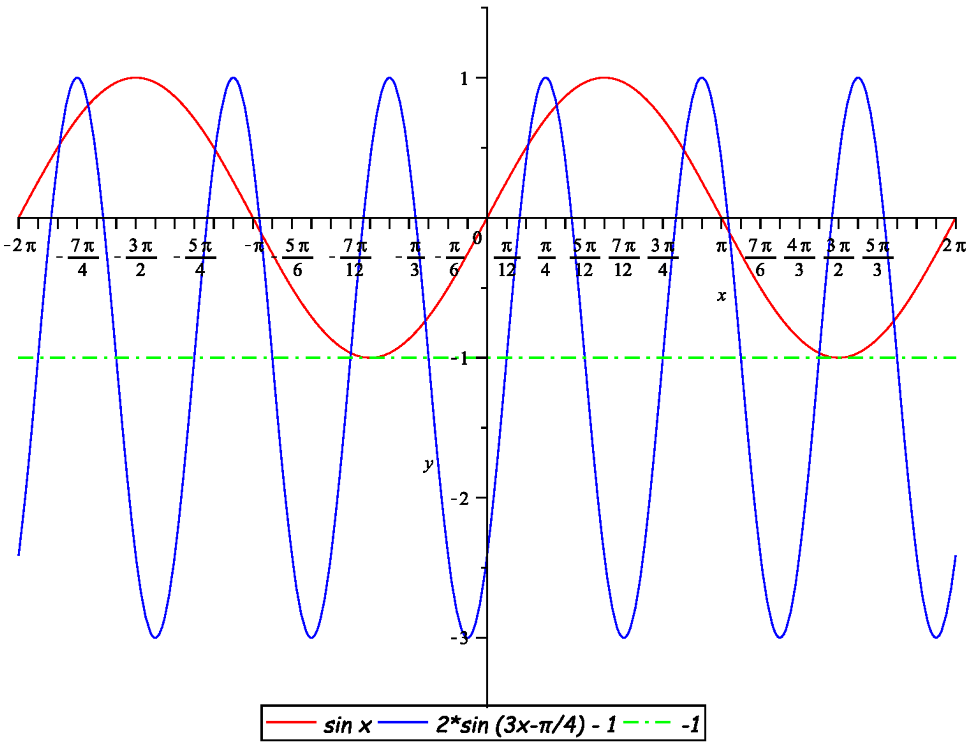
Pro snažší náčrt nejdříve určíme průsečík s osou x, tj.

$$\begin{aligned}
2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ nebo} \\
&\qquad\qquad 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \ \text{ nebo } \ x = \frac{17\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Osa grafu funkce se posune do $y = -1$, proto určíme i průsečíky s touto osou, tj.

$$\begin{aligned}
2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{4} = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Tedy hledaný graf funkce $f(x)$ má podobu

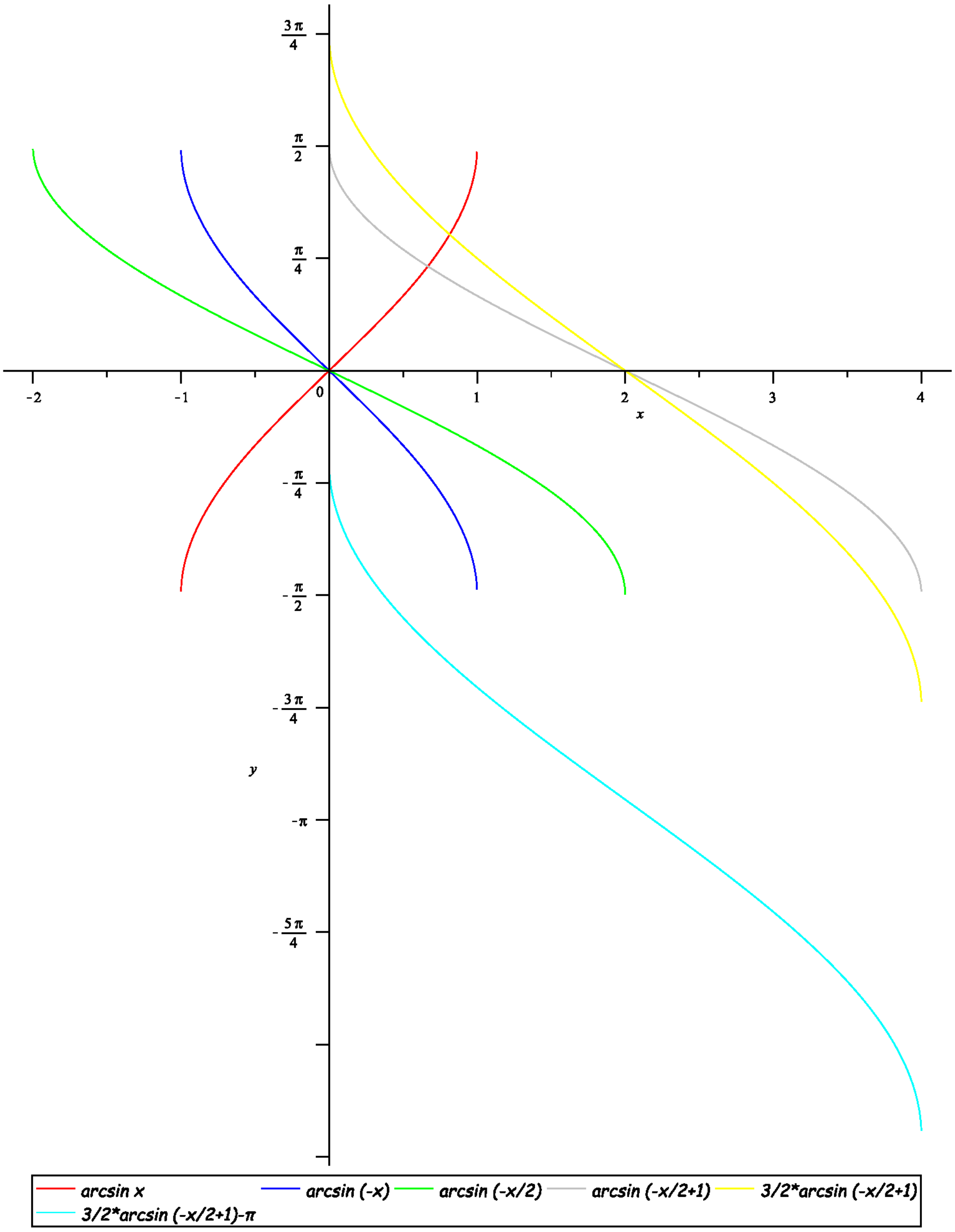


(39) Načrtněte graf funkce

$$y(x) = \frac{3}{2} \arcsin\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) - \pi.$$

Řešení:

S pomocí Příkladu 28 dostaneme



(40) Rozhodněte o paritě funkcí (je daná funkce sudá či lichá?)

i) $f_1(x) = 2$;

ii) $f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$;

iii) $f_3(x) = \sqrt{x}$;

iv) $f_4(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

v) $f_5(x) = \sin x + \cos x$;

vi) $f_6(x) = x \cosh x$.

Jak se mění parita funkce vzhledem k součtu, rozdílu, součinu a podílu?

Řešení:

i) $f_1(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad f_1(-x) = 2 \quad \Rightarrow$ sudá funkce,

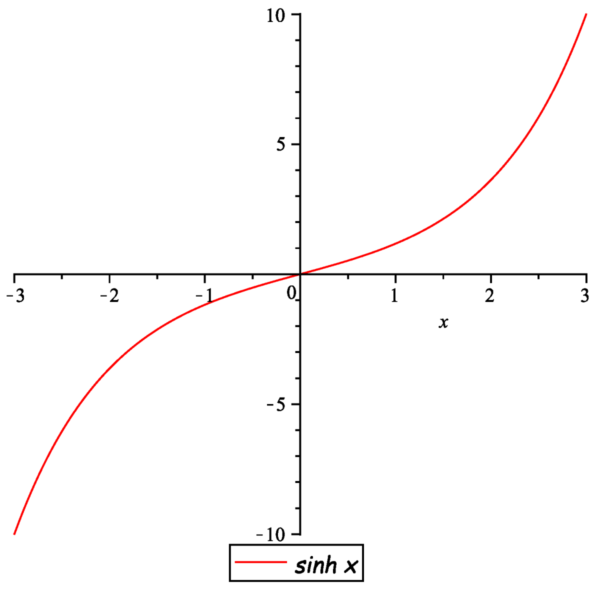
ii) $f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad f_2(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \Rightarrow$ sudá funkce,

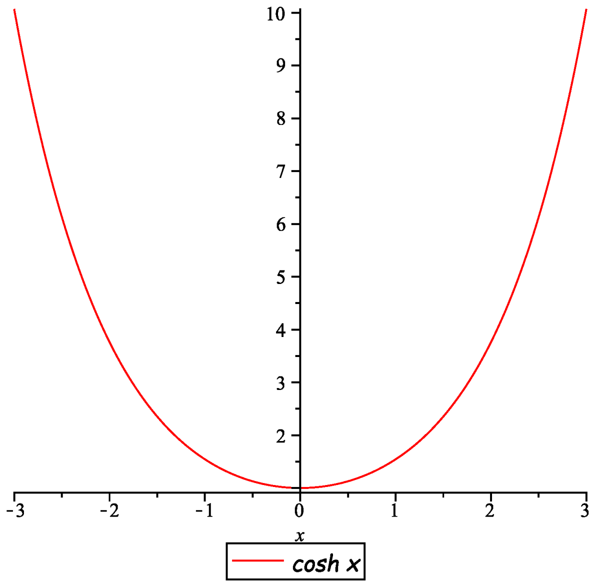
iii) $f_3(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f_3(-x) = \sqrt{-x}$ neexistuje $\Rightarrow$ funkce není sudá ani lichá,

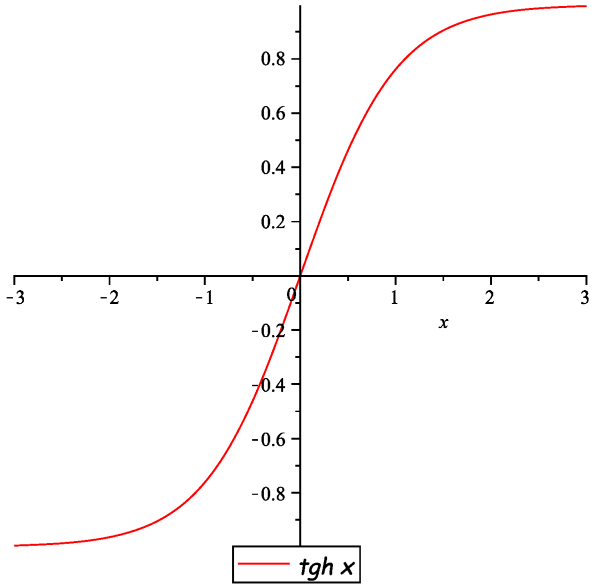
iv) $f_4(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f_4(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} =$
$= -\ln \frac{1-x}{1+x} \quad \Rightarrow$ lichá funkce,

v) $f_5(x) = \sin x + \cos x \quad \Rightarrow \quad f_5(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) =$
$= -\sin x + \cos x \quad \Rightarrow$ funkce není sudá ani lichá,

vi) Nyní si připomene definice hyperbolických funkcí a jejich grafy, tj. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ a







Potom dostaneme

$f_6(x) = x\cosh x \quad \Rightarrow \quad f_6(-x) = -x\cosh(-x) = -x\cosh x \quad \Rightarrow$ lichá funkce.

Označme „S“ sudou funkci a „L“ lichou funkci. Pak platí:

$$S \pm S, S \cdot S, L \cdot L, \frac{S}{S}, \frac{L}{L}$$

jsou sudé funkce,

$$L \pm L, S \cdot L, L \cdot S, \frac{S}{L}, \frac{L}{S}$$

jsou liché funkce.

(41) Určete inverzní funkci
$$f(x) = \frac{x-2}{x+2}.$$

Řešení:

Z rovnice
$$y = \frac{x-2}{x+2}$$
musíme vyjádřit x, potom přeznačením $y \rightsquigarrow x$ dostaneme hledaný předpis pro inverzní funkci. Proto
$$y = \frac{x-2}{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad y(x+2) = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x(y-1) = -2(y+1) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-2(y+1)}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-2(x+1)}{x-1}.$$

(42) Určete inverzní funkci
$$f(x) = 1 + \log(x+2).$$

Řešení:

Z rovnice
$$y = 1 + \log(x+2)$$
musíme vyjádřit x, potom přeznačením $y \rightsquigarrow x$ dostaneme hledaný předpis pro inverzní funkci. Proto
$$y = 1 + \log(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad y - 1 = \log(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 10^{y-1} = x + 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 10^{y-1} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = 10^{x-1} - 2.$$

(43) Určete inverzní funkci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1; \\ x^2, & x \in [1, 4]; \\ 2^x, & x > 4. \end{cases}$$

Řešení:

Přímým výpočtem dostaneme výsledek

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1; \\ \sqrt{x}, & x \in [1, 16]; \\ \log_2 x, & x > 16. \end{cases}$$

(44) Určete jednotlivé elementární funkce, z nichž se skládá funkce

$$F(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3 + 3)}.$$

<u>**Řešení:**</u>

Složky jsou

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = x^3 + 3.$$

Daná funkce je z nich složena takto:

$$F(x) = f(g(h(x))) = (f \circ g \circ h)(x).$$

(45) Určete jednotlivé elementární funkce, z nichž se skládá funkce

$$F(x) = \log_2 \sqrt{\operatorname{tg}(2+x)}.$$

Řešení:

Složky jsou

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \operatorname{tg} x, \quad l(x) = 2 + x.$$

Daná funkce je z nich složena takto:

$$F(x) = f(g(h(l(x)))) = (f \circ g \circ h \circ l)(x).$$

(46) Určete jednotlivé elementární funkce, z nichž se skládá funkce

$$a)F(x) = \operatorname{cotg}^5 x, \qquad b)G(x) = \cos x^7.$$

Řešení:

a) Složky jsou

$$f(x) = \operatorname{cotg} x, \quad g(x) = x^5.$$

Daná funkce je z nich složena takto:

$$F(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

b) Složky jsou

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = x^7.$$

Daná funkce je z nich složena takto:

$$F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

(47) Vypočtěte $f(x)$, jestliže $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$.

Řešení:

Musíme za x dosadit takovou hodnotu, aby na levé straně rovnice $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$ zůstala pouze „nějaká" proměnná, zbytek dostaneme pouze přeznačením. Zvolme $x = \frac{1}{t}$, potom máme

$$f\left(\frac{1}{\frac{1}{t}}\right) = f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{\operatorname{sgn}(t)}{|t|} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|} = \frac{\operatorname{sgn}(t)+\sqrt{1+t^2}}{|t|}.$$

Nyní položíme $t \rightsquigarrow x$ a dostaneme řešení

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x)+\sqrt{1+x^2}}{|x|}.$$

(48) Vypočtěte $f(x)$, jestliže $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$.

Řešení:

Využijeme postup z Příkladu 47. Musíme najít vhodnou hodnotu x. Proto musíme vyřešit rovnici

$$\frac{x}{x+1} = t \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{t}{t-1}.$$

Nyní zvolíme $x = \frac{t}{t-1}$, potom

$$f\left(\frac{\frac{t}{t-1}}{\frac{t}{t-1}+1}\right) = f(t) = \left(\frac{t}{t-1}\right)^2.$$

Pro $t \rightsquigarrow x$ jsme našli funkční předpis ve tvaru

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2.$$

(49) Vyřešte nerovnici

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}+1\right| \leq 1.$$

Řešení:

Nejdříve nerovnost upravíme

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}+1\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2x+1+x-3}{x-3}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{3x-2}{x-3}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |3x-2| \leq |x-3|\,.$$

Nulové body absolutních hodnot jsou $x_1 = \frac{2}{3}$ a $x_2 = 3$. Tímto se nám rozdělí reálná osa na tři subintervaly, na kterých budeme muset vyřešit nerovnici zvlášť. Proto

$$x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] : \; -3x+2 \leq -x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \; x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right],$$
$$x \in \left(\frac{2}{3}, 3\right] : \; 3x-2 \leq -x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \; x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{4}\right],$$
$$x \in (3, \infty) : \; 3x-2 \leq x-3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \; x \in \{\emptyset\}\,.$$

Proto řešením je interval $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$.

(50) Dokažte, že aritmetický průměr dvou nezáporných čísel je větší nebo roven jejich průměru geometrickému.

Řešení:

Jinými slovy máme dokázat, že platí

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad a \geq 0,\ b \geq 0.$$

To plyne z této úvahy

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

(51) Pomocí matematické indukce dokažte, že platí *Bernoulliova nerovnost*

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N},\ n > 1,\ x > -1.$$

Řešení:

Nerovnost dokážeme pomocí matematické indukce, proto vezme první možnou hodnotu n, tj. $n = 2$, a ukážeme, že je nerovnost splněna, proto

$$(1+x)^2 \geq 1+2x \quad \Leftrightarrow \quad 1+2x+x^2 \geq 1+2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 0.\checkmark$$

Uděláme indukční krok, proto předpokládejme, že rovnost platí pro nějaké $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tj. $(1+x)^n \geq 1+nx$. Teď ukážeme, že nerovnost platí i pro $n+1$. Proto

$$\begin{aligned}
&(1+x)^n \geq 1+nx \ / \cdot (1+x) > 0 \quad \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow \quad (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \quad \Rightarrow \\
&\qquad \overset{nx^2 \geq 0}{\Rightarrow} \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x \quad \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.
\end{aligned}$$

Tedy i pro $n+1$ je nerovnice splněna. Tím jsme dokázali Bernoulliovu nerovnost.

(52) Pomocí matematické indukce dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Řešení:

Nejdříve ověříme, že rovnost platí pro $n = 1$, tj.
$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}. \checkmark$$
Nechť nyní rovnost platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $n+1$ dostaneme
$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$
čímž je identita dokázána.

(53) Pomocí matematické indukce dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Řešení:

Nejdříve ověříme, že rovnost platí pro $n = 1$, tj.

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1.\checkmark$$

Nechť nyní rovnost platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $n+1$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \\ = \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4},$$

čímž je identita dokázána.

Rozklad na parciální zlomky

- *Lomená racionální funkce* $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$;
- má-li polynom v čitateli stejný, nebo vyšší stupeň než polynom ve jmenovateli, provedeme dělení polynomů – tím získáme polynom a *ryze lomenou racionální funkci* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (tj., $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$);
- určíme reálné kořeny polynomu $Q(x)$ (pomocí Hornerova schématu, vzorců, vytýkáním či jinými úpravami) a zapíšeme $Q(x)$ jakou součin lineárních polynomů ve tvaru $x - x_0$, kde x_0 je reálný kořen, a kvadratických polynomů ve tvaru $(x-a)^2 + b^2$, které nemají reálné kořeny;
- zapíšeme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pomocí parciální zlomků s neurčitými koeficienty, přičemž jednoduchému reálnému kořenu x_0, tj. členu $x - x_0$, odpovídá parciální zlomek ve tvaru
$$\frac{A}{x - x_0},$$
jednoduchému komplexnímu kořenu $a + ib$, tj. členu $(x - a)^2 + b^2$, odpovídá parciální zlomek
$$\frac{Bx + C}{(x-a)^2 + b^2},$$
pro k-násobný reálný kořen x_0, tj. pro člen $(x - x_0)^k$, odpovídá k parciálních zlomků
$$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - x_0)^k}$$
a pro k-násobný komplexní kořen $a+ib$, tj. pro člen $[(x-a)^2+b^2]^k$, odpovídá k parciálních zlomků ve tvaru
$$\frac{B_1x + C_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{B_2x + C_2}{[(x-a)^2 + b^2]^2} + \cdots + \frac{B_kx + C_k}{[(x-a)^2 + b^2]^k};$$
- metodou neurčitých koeficientů (příp. s pomocí dosazení některých kořenů) určíme všechny neznámé koeficienty v čitatelích parciálních zlomků.

(54) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2}.$$

Řešení:

Nejdříve musíme rozložit jmenovatele na součin, tj. učit kořeny. K tomu můžeme využít tzv. Hornerovo schéma (viz později) nebo některou z elementárních úprav, proto
$$x^3-2x^2+x-2=x^2(x-2)+x-2=\left(x^2+1\right)(x-2).$$
Proto rozklad na parciální zlomky musí vypadat takto
$$\frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-2}.$$
Pro další výpočet musíme obě strany rovnice vynásobit jmenovatelem původního zlomku, proto
$$3x^2-5x+8=(Ax+B)(x-2)+Cx^2+C,$$
$$3x^2-5x+8=Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2+C.$$
Pro určení jednotlivých koeficientů lze využít dosazení jednotlivých kořenů (zde pouze $x=2$), ovšem takovým způsobem dostaneme všechny hledané koeficienty pouze v případě jednoduchých reálných kořenů. Druhou možností je tzv. metoda neurčitých koeficientů, kdy porovnáváme koeficienty u jednotlivých mocnin x, tj.
$$\begin{aligned} x^2: &\qquad 3=A+C,\\ x^1: &\qquad -5=-2A+B,\\ x^0 \text{ (koeficienty bez } x\text{)}: &\qquad 8=-2B+C. \end{aligned}$$
Tím jsme obdrželi soustavu tří rovnic o třech neznámých, kterou lze vyřešit přímo (metodami známých ze střední školy nebo pomocí matic). Řešením jsou hodnoty $A=1$, $B=-3$ a $C=2$. Tedy hledaný rozklad je tvaru
$$\frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{x-3}{x^2+1}.$$
Při hledání je možné použít i kombinaci obou popsaných metod – část koeficientů získat dosazením kořenů a zbytek metodou neurčitých koeficientů, kde bude nutné již vyřešit nižší počet rovnic.

(55) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3+1}.$$

Řešení:

Rozložením jmenovatele (buď se znalostí vhodného vzorce nebo z faktu, že $x = -1$ je kořen tohoto polynomu, a dále pomoci dělení dvou polynomů) obdržíme $x^3 + 1 = (x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)$. Proto rozklad musí vypadat takto

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

což vede k rovnici

$$1 = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C.$$

Pomocí metody neurčitých koeficientů dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 :\ 0 &= A + B, \\ x^1 :\ 0 &= -A + B + C, \\ x^0 :\ 1 &= A + C, \end{aligned}$$

jejímž řešením je trojice $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ a $C = \frac{2}{3}$. Proto máme

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1}.$$

(56) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3(x+1)}.$$

Řešení:

Jmenovatel je již ve tvaru požadovaného součinu, proto rozklad musí vypadat takto

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1},$$

z čehož obdržíme rovnici

$$1 = Ax^3 + Ax^2 + Bx^2 + Bx + Cx + C + Dx^3.$$

Tedy metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^3:\ 0 &= A + D, \\ x^2:\ 0 &= A + B, \\ x^1:\ 0 &= B + C, \\ x^0:\ 1 &= C, \end{aligned}$$

jejímž řešením je čtveřice $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ a $D = -1$. Proto hledaný rozklad je tvaru

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

(57) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2}.$$

Řešení:

Jmenovatel upravíme do tvaru
$$x^4-2x^3+2x^2=x^2\left(x^2-2x+2\right),$$
proto parciální zlomky musí být ve tvaru
$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}.$$
Úpravou dostaneme rovnici
$$x^2-2=Ax^3-2Ax^2+2Ax+Bx^2-2Bx+2B+Cx^3+Dx^2,$$
což nám metodou neurčitých koeficientů dá soustavu rovnic
$$\begin{aligned}
x^3: &\quad 0=A+C,\\
x^2: &\quad 1=-2A+B+D,\\
x^1: &\quad 0=2A-2B,\\
x^0: &\quad -2=2B.
\end{aligned}$$
Řešením soustavy je čtveřice $A=-1$, $B=-1$, $C=1$ a $D=0$, proto hledaný rozklad je tvaru
$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2-2x+2}.$$

(58) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2}.$$

Řešení:

Poněvadž jsou stupně obou polynomů (alespoň) stejné, musíme nejdříve zadaný podíl upravit tak, abychom dostali ryzí racionální lomenou funkci, tj.

$$\begin{array}{l} \left(x^3+3x^2+4\right):\left(x^3+x-2\right)=1+\dfrac{3x^2-x+6}{x^3+x-2}. \\ -\underline{\left(x^3+x-2\right)} \\ \quad 3x^2-x+6 \end{array}$$

Nyní musíme rozložit jmenovatele x^3+x-2 na součin. Má-li polynom celočíselné kořeny, musí to být dělitelé absolutního členu. Má-li polynom racionální kořen (tj. ve tvaru zlomku), je čitatel zlomku tvořen dělitelem absolutního člene polynomu a jmenovatel tohoto kořene je dělitelem koeficientu u nejvyšší mocniny polynomu. Tuto skutečnost využijeme při aplikování Hornerova schématu, kde postupujeme takto:

- Nejprve sepíšeme do tabulky koeficienty studovaného polynomu. (Přitom nesmíme zapomenout na možné nulové koeficienty.)

x^3	x^2	x^1	x^0
1	0	1	-2

- Tabulku rozšíříme o jeden sloupec, do něhož budeme psát kandidáty na kořeny.

kand.	1	0	1	-2
2				

- První (vedoucí) koeficient polynomu sepíšeme do řádku s kandidátem na kořen.

kand.	1	0	1	-2
2	1			

- Nyní nastupuje hlavní část – doplnění zbylých polí druhého řádku tabulky.

kand.	1	0	1	-2
2	1	$2\cdot 1+0=2$		

- Tím dostaneme tabulku

kand.	1	0	1	-2
2	1	2	$2\cdot 2+1=5$	$2\cdot 5-2=8$

- Protože poslední číslo v druhém řádku je různé od nuly, číslo 2 není kořenem studovaného polynomu x^3+x-2. (Poznamenejme, že tato pozice obsahuje funkční hodnotu studovaného polynomu v testovaném čísle.)
- Druhý řádek tabulky vymažeme (v zápise na papír ho škrtáme a rozšíříme tabulku o volný řádek) a otestujeme v něm dalšího kandidáta na kořen.

kand.	1	0	1	-2
1	1	1	2	0

- Poslední pozice druhého řádku je nulová, což znamená, že studovaný polynom nabývá v čísle 1 hodnoty 0. Číslo 1 je tedy kořenem polynomu x^3+x-2. Ostatní čísla (tj. mimo prvního a posledního) v druhém řádku tabulky navíc udávají koeficienty polynomu vzniklého vydělením studovaného polynomu kořenovým činitelem právě nalezeného kořene.

kand.	1	0	1	-2
1	1	1	2	0
–	x^2	x^1	x^0	–

- Shrňme si předchozí postup do jediné tabulky.

–	x^3	x^2	x^1	x^0
kand.	1	0	1	-2
2	1	$2 \cdot 1 + 0 = 2$	5	8
1	1	1	2	0
–	x^2	x^1	x^0	–

Tímto postupem jsme dostali $x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)$. Proto rozklad musí být

$$\frac{3x^2-x+6}{x^3+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2},$$

z čehož dostaneme rovnici

$$3x^2-x+6=Ax^2+Ax+2A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

neboli

$$\begin{aligned} x^2: \quad & 3=A+B,\\ x^1: \quad & -1=A-B+C,\\ x^0: \quad & 6=2A-C. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je čtveřice $A=2$, $B=1$ a $C=-2$, proto hledaný rozklad je ve tvaru

$$\frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2}=1+\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x^2+x+2}.$$

(59) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x}.$$

Řešení:

Nejdříve upravíme jmenovatele, tj. $x^5+3x^3+2x = x\left(x^4+3x^2+2\right)$. S využitím substituce $y = x^2$ dostaneme kvadratickou rovnici y^2+3y+2 s řešeními $y_1 = -1$ a $y_2 = -2$. Proto jmenovatele můžeme rozložit do tvaru $x\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)$. Hledaný rozklad tedy musí být ve tvaru

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{x^2+1},$$

z čehož dostaneme rovnici

$$x+1 = Ax^4+3Ax^2+2A+Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^4+2Dx^2+Ex^3+2Ex.$$

Odtud metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x^4:\ 0 &= A+B+D,\\
x^3:\ 0 &= C+E,\\
x^2:\ 0 &= 3A+B+2D,\\
x^1:\ 1 &= C+2E,\\
x^0:\ 1 &= 2A
\end{aligned}$$

a její řešení $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -1$, $D = -1$ a $E = 1$. Tím jsme získali rozklad na parciální zlomky

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{x^2+2} + \frac{1-x}{x^2+1}.$$

(60) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x-4}{x^4+8x}.$$

Řešení:

Upravíme jmenovatele do tvaru $x^4+8x = x\left(x^3+8\right)$ a s pomocí Hornerova schématu

	1	0	0	8
-2	1	-2	4	0

zjistíme, že $x=-2$ je také kořenem a další rozklad je ve tvaru $x^4+8x = x\left(x^3+8\right) = x(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$, proto rozklad bude mít podobu

$$\frac{x-4}{x^4+8x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+4}.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} x-4 =& Ax^3-2Ax^2+4Ax+2Ax^2-4Ax+8A+Bx^3-2Bx^2+4Bx+ \\ &+Cx^3+2Cx^2+Dx^2+2Dx. \end{aligned}$$

Metodou neurčitých koeficientů získáme soustavu

$$\begin{aligned} x^3: &\qquad 0 = A+B+C, \\ x^2: &\qquad 0 = -2A+2A-2B+2C+D, \\ x^1: &\qquad 1 = 4A-4A+4B+2D, \\ x^0: &\qquad -4 = 8A \end{aligned}$$

s řešeními $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4}$ a $D=0$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru

$$\frac{x-4}{x^4+8x} = -\frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}x}{x^2-2x+4}.$$

(61) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1}.$$

Řešení:

Nejdříve získáme ryzí racionální funkci, tj.

$$\begin{array}{l}
\left(2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 3\right) : \left(x^2 - 1\right) = 2x^2 - x + 3 + \dfrac{2x+6}{x^2-1}. \\
-\left(2x^4 + 2x^2\right) \\
\hline
\quad - x^3 + 3x^2 + 3x + 3 \\
\quad -\left(-x^3 + x\right) \\
\hline
\qquad 3x^2 + 2x + 3 \\
\qquad -\left(3x^2 - 3\right) \\
\hline
\qquad\quad 2x + 6
\end{array}$$

Poněvadž platí $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, bude rozklad ve tvaru

$$\frac{2x+6}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1},$$

což vede k rovnici

$$2x + 6 = Ax - A + Bx + B.$$

S využitím metody neurčitých koeficientů obdržíme soustavu

$$\begin{aligned}
x^1 &: \ 2 = A + B, \\
x^0 &: \ 6 = B - A
\end{aligned}$$

s řešením $A = -2$ a $B = 4$. Řešením je tedy rozklad

$$\frac{2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1} = 2x^2 - x + 3 - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x-1}.$$

(62) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{2x-1}{2x^4+x^3+x^2}.$$

Řešení:

Úpravou jmenovatele obdržíme $2x^4+x^3+x^2=x^2\left(2x^2+x+1\right)$, proto musí být rozklad ve tvaru
$$\frac{2x-1}{2x^4+x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{2x^2+x+1},$$
což vede na rovnici
$$2x-1=2Ax^3+Ax^2+Ax+2Bx^2+Bx+B+Cx^3+Dx^2.$$
Pomocí metody neurčitých koeficientů obdržíme soustavu
$$\begin{aligned}
x^3: &\quad 0=2A+C,\\
x^2: &\quad 0=A+2B+D,\\
x^1: &\quad 2=A+B,\\
x^0: &\quad -1=B
\end{aligned}$$
a její řešení $A=3$, $B=-1$, $C=-6$ a $D=-1$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru
$$\frac{2x-1}{2x^4+x^3+x^2}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{6x+1}{2x^2+x+1}.$$

(63) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2}.$$

Řešení:

Upravíme jmenovatele do tvaru součinu, tj. $x^4-x^3+2x^2 = x^2\left(x^2-x+2\right)$, proto bude rozklad mít podobu
$$\frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+2}.$$
Odtud dostaneme rovnici
$$-5x+2 = Ax^3-Ax^2+2Ax+Bx^2-Bx+2B+Cx^3+Dx^2,$$
což nás metodou neurčitých koeficientů přivede k soustavě
$$\begin{aligned}
x^3 :& \qquad 0 = A+C,\\
x^2 :& \qquad 0 = -A+B+D,\\
x^1 :& \qquad -5 = 2A-B,\\
x^0 :& \qquad 2 = 2B
\end{aligned}$$
s řešením $A=-2$, $B=1$, $C=2$ a $D=-3$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru
$$\frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2} = -\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2x-3}{x^2-x+2}.$$

(64) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{2x^2+4x+9}{x^3+3x^2+3x+2}.$$

Řešení:

S pomocí Hornerova schématu dostaneme

	1	3	3	2
-2	1	1	1	0

proto platí $x^3+3x^2+3x+2=(x+2)\left(x^2+x+1\right)$. Tedy rozklad bude ve tvaru

$$\frac{2x^2+4x+9}{x^3+3x^2+3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

což vede k rovnici

$$2x^2+4x+9=Ax^2+Ax+A+Bx^2+2Bx+Cx+2C.$$

Metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu

$$x^2:\ 2=A+B,\quad x^1:\ 4=A+2B+C,\quad x^0:\ 9=A+2C$$

s řešením $A=3$, $B=-1$ a $C=3$. Hledaný rozklad je tedy tvaru

$$\frac{2x^2+4x+9}{x^3+3x^2+3x+2}=\frac{3}{x+2}+\frac{-x+3}{x^2+x+1}.$$

(65) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{9x^3-4x+1}{x^4-x^2}.$$

Řešení:

Upravíme jmenovatele do tvaru $x^4-x^2=x^2\left(x^2-1\right)=x^2\,(x-1)\,(x+1)$, proto rozklad bude ve tvaru
$$\frac{9x^3-4x+1}{x^4-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}.$$
Odtud dostaneme rovnici ve tvaru
$$9x^3-4x+1=Ax^3-Ax+Bx^2-B+Cx^3+Dx^3+Dx^2.$$
Metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu
$$\begin{aligned} x^3:&\qquad 9=A+C+D,\\ x^2:&\qquad 0=B-C+D,\\ x^1:&\qquad -4=-A,\\ x^0:&\qquad 1=-B \end{aligned}$$
s řešením $A=4$, $B=-1$, $C=2$ a $D=3$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru
$$\frac{9x^3-4x+1}{x^4-x^2}=\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}.$$

(66) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x^2 - x + 10}{(x^2 - 3x + 10)^2}.$$

Řešení:

Jmenovatele již nelze nijak rozložit, proto rozklad musí být v tomto tvaru

$$\frac{x^2 - x + 10}{(x^2 - 3x + 10)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 3x + 10} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 3x + 10)^2},$$

což vede na rovnici

$$x^2 - x + 10 = Ax^3 + 3Ax^2 + 10Ax + Bx^2 - 3Bx + 10B + Cx + D.$$

Metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x^3 : \quad & 0 = A, \\
x^2 : \quad & 1 = 3A + B, \\
x^1 : \quad & -1 = 10A - 3B + C, \\
x^0 : \quad & 10 = 10B + D
\end{aligned}$$

s řešením $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$ a $D = 0$. Proto hledaný rozklad je tvaru

$$\frac{x^2 - x + 10}{(x^2 - 3x + 10)^2} = \frac{1}{x^2 - 3x + 10} + \frac{2x}{(x^2 - 3x + 10)^2}.$$

(67) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^6 + 2x^4 + x^2}.$$

Řešení:

Nejdříve upravíme jmenovatele do tvaru

$$x^6 + 2x^4 + x^2 = x^2\left(x^4 + 2x^2 + 1\right) = x^2\left(x^2 + 1\right)^2$$

. Proto bude rozklad ve tvaru

$$\frac{1}{x^6 + 2x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2},$$

z čehož obdržíme rovnici

$1 = Ax^5 + 2Ax^3 + Ax + Bx^4 + 2Bx^2 + B + Cx^5 + Cx^3 + Dx^4 + Dx^2 + Ex^3 + Fx^2.$

Metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}
x^5:\ 0 &= A + C,\\
x^4:\ 0 &= B + D,\\
x^3:\ 0 &= 2A + C + E,\\
x^2:\ 0 &= 2B + D + F,\\
x^1:\ 0 &= A,\\
x^0:\ 1 &= B
\end{aligned}$$

a řešení $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 0$ a $F = -1$. Tedy hledaný rozklad je ve tvaru

$$\frac{1}{x^6 + 2x^4 + x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

(68) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{5x^7+12x^6+24x^5+19x^4+8x^3+4x^2+3x+1}{x^8+3x^7+5x^6+5x^5+3x^4+x^3}.$$

Řešení:

Pomocí vytýkání upravíme jmenovatele do tvaru

$$x^8+3x^7+5x^6+5x^5+3x^4+x^3 = x^3\left(x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+1\right).$$

S využitím Hornerova schématu

	1	3	5	5	3	1
-1	1	2	3	2	1	0

můžeme psát

$$x^8+3x^7+5x^6+5x^5+3x^4+x^3 = x^3\left(x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+1\right) = x^3(x+1)\left(x^4+2x^3+3x^2+2x+1\right)$$

Proto rozklad bude ve tvaru

$$\frac{5x^7+12x^6+24x^5+19x^4+8x^3+4x^2+3x+1}{x^8+3x^7+5x^6+5x^5+3x^4+x^3} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1}+ \\ +\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2},$$

což vede na rovnici

$$\begin{aligned} 5x^7&+12x^6+24x^5+19x^4+8x^3+4x^2+3x+1 = \\ &= Ax^7+3Ax^6+5Ax^5+5Ax^4+3Ax^3+Ax^2+Bx^6+3Bx^5+5Bx^4+ \\ &\quad+5Bx^3+3Bx^2+Bx+Cx^5+3Cx^4+5Cx^3+5Cx^2+3Cx+C+ \\ &\quad+Dx^7+2Dx^6+3Dx^5+2Dx^4+Dx^3+Ex^7+2Ex^6+2Ex^5+Ex^4+ \\ &\quad+Fx^6+2Fx^5+2Fx^4+Fx^3+Gx^5+Gx^4+Hx^4+Hx^3. \end{aligned}$$

Pomocí metody neurčitých koeficientů dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^7:&\quad 5 = A+D+E,\\ x^6:&\quad 12 = 3A+B+2D+2E+F,\\ x^5:&\quad 24 = 5A+3B+C+3D+2E+2F+G,\\ x^4:&\quad 19 = 5A+5B+3C+2D+E+2F+G+H,\\ x^3:&\quad 8 = 3A+5B+5C+D+F+H,\\ x^2:&\quad 4 = A+3B+5C,\\ x^1:&\quad 3 = B+3C,\\ x^0:&\quad 1 = C \end{aligned}$$

s řešením $A = -1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 4$, $E = 2$, $F = 3$, $G = 6$ a $H = -1$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru

$$\frac{5x^7 + 12x^6 + 24x^5 + 19x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x^8 + 3x^7 + 5x^6 + 5x^5 + 3x^4 + x^3} = \\ = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2+x+1} + \frac{6x-1}{(x^2+x+1)^2}.$$

I. 2. Limity posloupností a funkcí

Limita posloupnosti

Definice 3. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* A (píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí, že $|a_n - A| < \varepsilon$, nebo-li

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_0 \text{ platí } |a_n - A| < \varepsilon.$$

Definice 4. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* $\pm\infty$ (píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$), jestliže ke každému $A \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n > A$ ($a_n < A$), nebo-li

$$\forall A > 0 \ (A < 0) \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_0 \text{ platí } a_n > A \ (a_n < A).$$

Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$, platí následující pravidla pro počítání s limitami:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

Jestliže navíc $B \neq 0$, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Důležité vzorce:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{ohraničená posloupnost}}{\text{posloupnost jdoucí do } \pm\infty} = 0.$$

Neučité výrazy:

$$\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \pm\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

(69) Z definice limity dokažte, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

K číslu $\varepsilon = 0{,}1$ určete n_0.

Řešení:

Ke každému ε musíme najít příslušné n_0 tak, že platí nerovnost z definice, tzn.

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Proto řešením dostaneme

$$\left| \frac{n-n-1}{n+1} \right| < \varepsilon \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+1 < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1,$$

kde $\lfloor\cdot\rfloor$ značí (dolní) celou část čísla. Pro $\varepsilon = 0,1$ máme $n_0 = 10$.

(70) Z definice limity dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Řešení:

Mějme dle definice $A \in \mathbb{R}$. Musíme určit n_0 tak, aby

$$\forall n > n_0 \text{ platilo } \; a_n > A, \quad \text{tj. } n > A,$$

proto $n_0 := \max\{1 + \lfloor A \rfloor, 1\}$.

(71) Udejte příklad posloupností a_n a b_n takových, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a zároveň

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \text{nebo} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Řešení:

Řešením jsou např. posloupnosti $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ a $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

(72) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{3}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = -1.$$

(73) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{3n+n^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{3n+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{3}{n}+1\right)} = 3.$$

(74) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-5n-1).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-5n-1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=\infty.$$

(75) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-8n^2+6n+7}{2n+5}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-8n^2+6n+7}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(-8n+6+\frac{7}{n}\right)}{n\left(2+\frac{5}{n}\right)} = -\infty.$$

(76) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)\frac{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a)(n+b)-n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n+ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(a+b+\frac{ab}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}+1\right)}=\frac{a+b}{2}.$$

(77) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n+1}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n+1}\right)\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n+1}}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-(2n+1)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n-1+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n+1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(-\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}=-\infty.$$

(78) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right)\frac{\sqrt{9n^2-4}+3n}{\sqrt{9n^2-4}+3n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-4-9n^2}{\sqrt{9n^2-4}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{9n^2-4}+3n}=0.$$

(79) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-2n\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{9n^2-4}-2n\right)\frac{\sqrt{9n^2-4}+2n}{\sqrt{9n^2-4}+2n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-4-4n^2}{\sqrt{9n^2-4}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(5n-\frac{4}{n}\right)}{n\left(\sqrt{9-\frac{4}{n^2}}+2\right)}=\infty.$$

(80) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3-(n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{4}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\infty.$$

(81) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{n^4+18n}}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{n^4+18n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-\frac{16n}{\sqrt[3]{n^4}}\right)}{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{18n}{n^4}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-16\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{18}{n^3}}} = 0.$$

(82) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/3}\left(\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}+\sqrt{\frac{5}{n^{4/3}}+\frac{3}{n^{7/3}}}\right)}{n^{5/3}\left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+\frac{4}{n^{7/3}}+\frac{1}{n^{10/3}}}-\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^5}}\right)} = -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$$

(83) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{a+\frac{1}{n}}-\sqrt{a}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{a+\frac{1}{n}}-\sqrt{a}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \left(\sqrt{a+\frac{1}{n}}-\sqrt{a}\right) \frac{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{a+\frac{1}{n}-a}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

(84) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 1.$$

(85) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \cos n\pi).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \cos n\pi) = 1 + \lim_{n\to\infty} (\cos n\pi) = 1 + (\pm 1) \quad \Rightarrow \text{limita neexistuje.}$$

(86) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi) = 1 + \lim_{n\to\infty}(\sin n\pi) = 1.$$

(87) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \sin n}{3n - 1}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \sin n}{3n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)}{n\left(3 - \frac{1}{n}\right)} \left| \begin{array}{c} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \\ \text{neboť } -1 \leq \sin n \leq 1 \end{array} \right| = \frac{2}{3}.$$

(88) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{5}\,\sqrt[n]{n}\right) = 1,$$

neboť platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Nechť platí

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n,$$

kde jistě $h_n \geq 0$. Musíme proto ukázat, že $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Postupnými úpravami obdržíme

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} &= 1 + h_n \ /^n \\ n &= (1+h_n)^n = 1 + h_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n \\ &\Downarrow \\ n &\geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \geq 0 \\ 0 \leftarrow 0 \leq h_n^2 &\leq \frac{2}{n-1} \to 0 \end{aligned}$$

proto z Věty o limitě sevřené posloupnosti (též „o dvou policajtech“) plyne $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

(89) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{1/2} = \sqrt{1} = 1.$$

(90) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

Řešení:

Zadanou posloupnost můžeme omezit

$$3 \leftarrow \sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le \sqrt[n]{3^n + 3^n} \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 3,$$

proto z Věty o limitě sevřené posloupnosti plyne $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.

(91) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 4^{n}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right]^{2} = \infty\cdot(e\cdot 1)^2 = \infty.$$

(92) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}=$$

$$=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right]}=\frac{1}{e}.$$

(93) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3} = e^{3}.$$

(94) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}\right]=e\,.$$

(95) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right]^{1/5}=\sqrt[5]{e}.$$

(96) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{7n+6}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{7n+6} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{\frac{7}{2}(2n+3)-\frac{9}{2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{2n+3}\right]^{7/2}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{-9/2} = \sqrt{e^7}.$$

(97) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{n^2+1}{2n-1}\right).$$

Řešení:

Neboť platí

$$-1\leq\cos\frac{n^2+1}{2n-1}\leq 1 \quad\Rightarrow\quad 0\leftarrow-\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\cos\frac{n^2+1}{2n-1}\leq\frac{1}{n}\to 0,$$

plyne z Věty o limitě sevřené posloupnosti $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{n^2+1}{2n-1}\right)=0$.

(98) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{2 \cdot 4^n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{2 \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(1 + (-1)^n\right)}{2 \cdot 2^n \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0.$$

(99) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - 3n!}{(n+2)! + 1}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - 3n!}{(n+2)! + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)n! - 3n!}{(n+2)(n+1)n! + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1) - 3}{(n+2)(n+1) + \frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 2 - 3}{n^2 + 3n + 2 + \frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2 \cdot n!}} = 1.$$

(100) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)+1}{(n+2)-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

(101) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \left| \begin{array}{l} \text{ve jmenovateli je součet} \\ \text{aritmetické posloupnosti} \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

(102) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right).$$

Řešení:

Rozkladem na parciální zlomky obdržíme
$$\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$
Proto můžeme spočítat
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}&\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}\right)=\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.\end{aligned}$$

(103) Najděte hromadné body posloupnosti

$$\left\{\cos\frac{2n\pi}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:

Vzhledem k periodicitě funkce $\cos x$ můžeme rozlišit následující situace ($k \in \mathbb{N}$)

$$n = 3k \quad \Rightarrow \quad \left\{\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\frac{6k\pi}{3} = \cos 2\pi = 1\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 3k-1 \quad \Rightarrow \quad \left\{\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\frac{6k\pi - 2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 3k-2 \quad \Rightarrow \quad \left\{\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\frac{6k\pi - 4\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Tedy posloupnost $\left\{\cos\frac{2n\pi}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadné body 1 a $-\frac{1}{2}$.

(104) Najděte hromadné body posloupnosti

$$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:

Uvažujme následující dvě varianty ($k \in \mathbb{N}$)

$$n = 2k \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{1+(-1)^n}{2} = \frac{1+(-1)^{2k}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 2k-1 \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{1+(-1)^n}{2} = \frac{1+(-1)^{2k-1}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Tedy posloupnost $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má dva hromadné body 1 a 0.

(105) Určete lim sup a lim inf posloupnosti

$$\left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:

Vzhledem k charakteru funkce $\sin n$ stačí uvažovat následující varianty ($k \in \mathbb{N}$)

$$n = 4k \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4} = \frac{4k}{4k+1}\sin^2\frac{4k\pi}{4} = \frac{4k}{4k+1}\sin^2(\pi) = 1\cdot 0 = 0\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 4k-1 \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4} = \frac{4k-1}{4k}\sin^2\left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 1\cdot\left(\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 4k-2 \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4} = \frac{4k-2}{4k-1}\sin^2\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot(\mp 1)^2 = 1\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 4k-3 \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4} = \frac{4k-3}{4k-2}\sin^2\left(k\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = 1\cdot\left(\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

To znamená, že

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{a} \quad \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}\right) = 0.$$

Limita funkce

Definice 5. Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu rovnu číslu* L, a píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$, neboli

$$\forall \mathcal{O}(L)\ \exists \mathcal{O}(x_0) \text{ tak, že } \forall x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

V podání $\varepsilon - \delta$ definice to znamená:

- vlastní limita ve vlastním bodě ($x_0, L \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to x_0} = L$)
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$
- nevlastní limita ve vlastním bodě ($x_0 \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to x_0} = \pm\infty$)
$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M\ (f(x) < M);$$
- vlastní limita v nevlastním bodě ($L \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to\pm\infty} = L$)
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ x > K\ (x < K) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$
- nevlastní limita v nevlastním bodě ($\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$)
$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ x > K\ (x < K) \Rightarrow f(x) > M\ (f(x) < M).$$

Pokud existují $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ (obě limity jsou vlastní), platí následující pravidla pro počítání s limitami:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L_1|,$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2,$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2.$$

Jestliže navíc $L_2 \neq 0$, pak platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Důležité vzorce:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{ohraničená funkce}}{\text{funkce jdoucí do } \pm\infty} = 0.$$

Neučité výrazy:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \pm\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Spojitost funkce

Definice 6. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0, jestliže

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nechť nyní funkce f není spojitá v bodě x_0. Potom rozlišujeme následující případy.

- Existuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, ale $a \neq f(x_0)$. Potom bod x_0 nazýváme *bodem odstranitelné nespojitosti* funkce f. (Přitom připouštíme i situaci, kdy hodnota $f(x_0)$ není definována.)

- Existují obě jednostranné limity $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a_1$ a $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a_2$, ale $a_1 \neq a_2$. Potom bod x_0 nazýváme *bodem nespojitosti prvního druhu* (někdy také *skokem*) funkce f.
- Alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 neexistuje nebo je nevlastní. Potom bod x_0 nazýváme *bodem nespojitosti druhého druhu* funkce f.

Definice 7. Nechť $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *spojitá na intervalu* (a, b), jestliže je spojitá v každém bodě $x_0 \in (a, b)$.

Poznámka 8. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá zprava*, jestliže

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá zleva*, jestliže

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, jestliže je v bodě a spojitá zprava, v bodě b je spojitá zleva a je spojitá v každém bodě $x_0 \in (a, b)$.

(106) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1$$

(107) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6} \left| \tfrac{0}{0} \right| = \lim_{x\to 3} \left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \right] =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{4}.$$

(108) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} \ \Big| \tfrac{0}{0} \Big| = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\cos x \sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} \ \Big| \tfrac{0}{0} \Big| = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x)\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1 + \cos x)\cos x} = \frac{1}{2}.$$

(109) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right]=1.$$

(110) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x + \sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x \sin x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\sin^2 x}{x \sin x} + \frac{\sin^2 x}{x\cos^2 x \sin x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(2\,\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos^2 x} \right) = 3.$$

(111) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \to 0} \left(k \frac{\sin kx}{kx} \right) = k.$$

(112) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{3x}{x+2}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{3x}{x+2}} \left| \begin{array}{c} \text{díky spojitosti funkce } a^{f(x)} \\ \text{můžeme limitu přepsat} \end{array} \right| = 2^{\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+2}} = 2^3 = 8.$$

(113) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}\left|\begin{array}{c}\text{musíme využít exponenciální}\\ \text{funkci, neboť proměnná } x\\ \text{je v základu i v exponetu funkce}\end{array}\right| = \lim_{x\to 0} e^{(1+x)\ln\frac{\sin 2x}{x}} =$$
$$= e^{\lim_{x\to 0}\left[(1+x)\ln\frac{\sin 2x}{x}\right]} = e^{\ln 2} = 2.$$

(114) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \frac{4x}{3x} \frac{3x}{\sin 3x} + \frac{\sin 7x}{7x} \frac{7x}{3x} \frac{3x}{\sin 3x} \right) = \frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{11}{3}.$$

(115) Vypočtěte
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi x + \sin x}{2x + \cos x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi x + \sin x}{2x + \cos x} \,\Big|\, \tfrac{\infty}{\infty}, \text{ v čitateli i jmenovateli vytkneme } x \,\Big|\, =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\pi + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{\pi + 0}{2 + 0} = \frac{\pi}{2}.$$

(116) Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} \;\Big|\, \tfrac{0}{0},\ \text{rozšíříme } \tfrac{x}{x} \,\Big| &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \cdot \frac{x}{\sin 2x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - e^{-x} + 1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 2x}{x}} = \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right) \cdot \frac{1}{2\frac{\sin 2x}{2x}} = 2\frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

(117) Vypočtěte

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} \;\Big|\; \tfrac{0}{0}, \text{ tj. číslo 2 je kořenem obou polynomů} \;\Big|\; = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-1} = 5.$$

(118) Vypočtěte
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \;\Big|\, \tfrac{0}{0},\ \text{rozšíříme } \tfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \,\Big| &= \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1.
\end{aligned}$$

(119) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2-3x+2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2-3x+2} \,\left|\, \tfrac{4}{0} \,\right|\, = \lim_{x\to 2} \frac{x^2}{(x-2)(x-1)},$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{(x-2)(x-1)} \,\left|\, \tfrac{4}{0^+} \,\right|\, = \infty,$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{(x-2)(x-1)} \,\left|\, \tfrac{4}{0^-} \,\right|\, = -\infty.$$

Protože limita zprava je různá od limity zleva, zadaná limita neexistuje.

(120) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-5}{x^2-7x+12}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-5}{x^2-7x+12} = \lim_{x\to 4} \frac{x-5}{(x-3)(x-4)} \ \left|\ \frac{-1}{0}\ \right| = \begin{cases} +\infty & x \to 4^-, \\ -\infty & x \to 4^+ \end{cases} \quad \Rightarrow \text{limita neexistuje.}$$

(121) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}+x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=-\infty.$$

(122) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \left(\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} \frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+13-4x-4}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{-3x+9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} \left| \tfrac{0}{0} \right| = \lim_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3}{(x+3)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} = -\frac{1}{16}.$$

(123) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}\,\frac{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+6-(x^2+2x-6)}{(x^2-4x+3)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-4(x-3)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=-\frac{1}{3}.$$

(124) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)} = -1.$$

(125) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-3}{\sin x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2x-3}{\sin x} \ \left| \tfrac{-3}{0} \right| , \\
&\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-3}{\sin x} \ \left| \tfrac{-3}{\sin 0^+} = \tfrac{-3}{0^+} \right| = -\infty, \\
&\lim_{x\to 0^-} \frac{2x-3}{\sin x} \ \left| \tfrac{-3}{\sin 0^-} = \tfrac{-3}{0^-} \right| = \infty.
\end{aligned}$$

Protože limita zprava je různá od limity zleva, zadaná limita neexistuje.

(126) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\cos x - 1}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\cos x - 1} \quad \left| \tfrac{-1}{0} \right| ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{\cos x - 1} \quad \left| \tfrac{-1}{\cos 0^+ - 1} = \tfrac{-1}{0^-} \right| = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{\cos x - 1} \quad \left| \tfrac{-1}{\cos 0^- - 1} = \tfrac{-1}{0^-} \right| = \infty.$$

Protože limita zprava je rovna limitě zleva, zadaná limita existuje a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\cos x - 1} = \infty.$$

(127) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4 + 1}{3 \cdot 2^x + x^2 - 1}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4 + 1}{3 \cdot 2^x + x^2 - 1} \left| \text{nejrychleji do } \infty \text{ jde } 2^x \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x(1 + \frac{x^4}{2^x} + \frac{1}{2^x})}{2^x(3 + \frac{x^2}{2^x} - \frac{1}{2^x})} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{x^4}{2^x} + \frac{1}{2^x}}{3 + \frac{x^2}{2^x} - \frac{1}{2^x}} \left| \tfrac{1+0+0}{3+0-0} \right| = \frac{1}{3}.$$

(128) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\log_6 x - 3^{x+1} + 15x^6}{3\log_6 x + 3^x - 5x^6}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\log_6 x - 3^{x+1} + 15x^6}{3\log_6 x + 3^x - 5x^6} \;\Big|\, \text{nejrychleji do } \infty \text{ jde } 3^x \,\Big| = \lim_{x\to\infty} \frac{3^x(\frac{2\log_6 x}{3^x} - 3 + \frac{15x^6}{3^x})}{3^x(\frac{3\log_6 x}{3^x} + 1 - \frac{5x^6}{3^x})} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\log_6 x}{3^x} - 3 + \frac{15x^6}{3^x}}{\frac{3\log_6 x}{3^x} + 1 - \frac{5x^6}{3^x}} \;\Big|\, \frac{0-3+0}{0+1-0} \,\Big| = -3.$$

(129) Ze znalostí grafů základních funkcí určete limitu.

$$\lim_{x\to 2\pi^-} e^{\operatorname{cotg} x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2\pi^-} e^{\operatorname{cotg} x} \;\Big|\; e^{\operatorname{cotg} 2\pi^-} = e^{-\infty} = \tfrac{1}{e^{\infty}} = \tfrac{1}{\infty} \;\Big|\; = 0.$$

(130) Ze znalostí grafů základních funkcí určete limitu.

$$\lim_{x\to\infty}(5^{\frac{1}{x}}+2).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}(5^{\frac{1}{x}}+2)\ \Big|\ 5^{\frac{1}{\infty}}+2=5^0+2\ \Big|\ =3.$$

(131) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

(132) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}\right).$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)=\\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}\right]=\\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}=0.
\end{aligned}$$

(133) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}=1.$$

(134) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)} = 1.$$

(135) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2+1}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{(x+2)(x-2)}\ \left|\ \tfrac{5}{0}\ \right|\ =\begin{cases}+\infty & x\to 2^+,\\ -\infty & x\to 2^-\end{cases}\quad \Rightarrow \text{limita neexistuje.}$$

(136) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x \left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left[4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \left(\sqrt{1+x}+1\right) \right] = 8.$$

(137) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| = \lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| = \lim_{x\to-2}\frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}.$$

(138) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+ax)^{\frac{1}{x}}\right) \left| \begin{array}{c}\text{funkce } \ln x \\ \text{je spojitá}\end{array} \right| =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}\right] \left| z = \tfrac{1}{x} \right| = \ln\left[\lim_{z\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^{z}\right] \left| u = \tfrac{z}{a} \right| =$$

$$= \ln\left[\lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{ua}\right] = \ln\left\{\lim_{u\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{a}\right\} = \ln e^{a} = a.$$

(139) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}1\right)\ \Big|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\tfrac{x-y}{1+xy},\ \text{pro } xy>-1\Big| =$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arctg}\frac{\frac{x+1}{x+2}-1}{1+\frac{x+1}{x+2}}=\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arctg}\frac{x+1-x-2}{x+2+x+1}=\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arctg}\frac{-1}{2x+3}.$$

Nyní výraz u limity upravíme

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+3}=z\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}z=\frac{1}{2x+2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{\operatorname{tg}z}=2x+3\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}z}-3\right).$$

Proto

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}z}-3\right)(-z)\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(-\frac{z}{\operatorname{tg}z}+3z\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(-\frac{z}{\frac{\sin z}{\cos z}}+3z\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(-\frac{z}{\sin z}\cdot\cos z+3z\right)=-\frac{1}{2}.$$

(140) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x(1+x-1)} \quad \left| \sin\tfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\alpha}{2}} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\sqrt{1+x}+1\right)\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{4}\left(\sqrt{1+x}+1\right) \cdot \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = 1.$$

(141) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-1}}{e}=\frac{1}{e^2}.$$

(142) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x} \;\Big|\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\Big|\; = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(143) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin 0}{\cos\frac{\pi}{6}-\cos x} \left| \begin{array}{l} \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}}{-2\sin\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}}{\sin\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}} = 2.$$

(144) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - \sin 2x + 1}{\cos x - \sin x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - \sin 2x + 1}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x + 1}{\cos x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 2\sin x\cos x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x\,(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (2\cos x) = \sqrt{2}.$$

(145) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \;\; \Big| \, z = 2x \, \Big| \;\; = \lim_{z\to 0} \left(\frac{e^{z}-1}{z} \cdot 2 \right) = 2 \cdot \lim_{z\to 0} \left(\frac{e^{z}-1}{z} \right) = 2.$$

(146) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos x + x + 2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos x + x + 2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\cos x + x + 2)}$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x + x + 2)}{x} = \begin{cases} +\infty & x \to 3^-, \\ -\infty & x \to 3^+, \end{cases}$$

proto obdržíme

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos x + x + 2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\cos x + x + 2)} = \begin{cases} +\infty & x \to 3^-, \\ 0 & x \to 3^+ \end{cases} \Rightarrow \text{limita neexistuje.}$$

(147) Určete druhy nespojitosti v bodě $x_0 = 0$ pro funkce

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f_2(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad f_3(x) = \lfloor x \rfloor, \quad f_4(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}.$$

Řešení:

Ze základních vzorců víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Funkce f_1 také není v 0 definována, proto v x_0 nastává odstranitelná nespojitost.

Pro funkci f_2 spočítáme limitu přímo, tj.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} \;\Big|\, \tfrac{1}{0} \,\Big| = \begin{cases} +\infty & x \to 0^+, \\ -\infty & x \to 0^-, \end{cases}$$

což znamená, že v x_0 nastává nespojitost II. druhu.

Pro funkci f_3 je nutné si uvědomit, jak se počítá celá část reálného čísla – je to vlastně nejbližší menší celé číslo, proto platí

$$\lim_{x\to 0} \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \to 0^+, \\ -1 & x \to 0^-, \end{cases}$$

tedy funkce f_3 má v bodě x_0 nespojitost I. druhu.

Limitu funkce f_4 si rozdělíme na dvě možnosti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + e^{-\frac{1}{x}}}{1 - e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = -1,$$

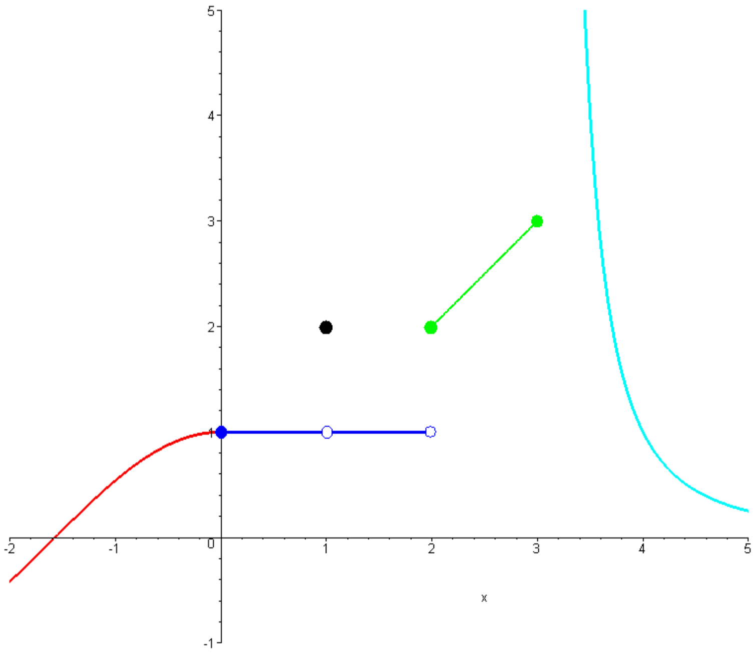
tudíž funkce f_4 má v bodě x_0 nespojitost I. druhu.

(148) Určete, zda je daná funkce spojitá/spojitá zleva/spojitá zprava v bodech $-\pi/2, 0, 1, 2, 3, 4$. Jestliže je nespojitá, určete druh nespojitosti.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0, \\ 1 & 0 \leq x < 1, \\ 2 & x = 1, \\ 1 & 1 < x < 2, \\ x & 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{(x-3)^2} & x > 3. \end{cases}$$

Řešení:

Nejprve si pro názornost ukažme graf této funkce. K vyřešení příkladu samozřejmě není nutný – stačí spočítat příslušné limity a funkční hodnoty.



Řešení příkladu shrnuje následující tabulka.

x_0	$-\frac{\pi}{2}$	0	1	2	3	4
$f(x_0)$	0	1	2	2	3	1
$\lim\limits_{x\to x_0^-}$	0	1	1	1	3	1
$\lim\limits_{x\to x_0^+}$	0	1	1	2	∞	1
$\lim\limits_{x\to x_0}$	0	1	1	neex.	neex.	1
spojitá zleva	ano	ano	ne	ne	ano	ano
spojitá zprava	ano	ano	ne	ano	ne	ano
spojitá	ano	ano	ne	ne	ne	ano
druh nespojitosti	—	—	odstran.	skok	2. druh	—

I. 3. Derivace funkce

Definice 9. Buď $f(x)$ funkce a $x_0 \in D(f)$. Existuje-li

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 a značíme $f'(x_0)$. Je-li tato limita vlastní, hovoříme o *vlastní derivaci*. Je-li tato limita nevlastní, hovoříme o *nevlastní derivaci*.

Základní vzorce pro počítání s derivacemi (f a g jsou funkce, $k \in \mathbb{R}$):

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (k \cdot f)' = k \cdot f', \quad (f \cdot g)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Derivace elementárních funkcí ($k, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$):

$$
\begin{aligned}
(k)' &= 0, & (\cos x)' &= -\sin x,\\
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x},\\
(e^x)' &= e^x, & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x},\\
(a^x)' &= a^x \cdot \ln a, & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
(\log_b x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln b}, & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2},\\
(\sin x)' &= \cos x, & (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

Věta 10. *Nechť funkce* $f: \ x = f(y)$ *je spojitá a ryze monotónní na intervalu* I. *Nechť* y_0 *je vnitřní bod intervalu* I *a nechť má f v* y_0 *derivaci* $f'(y_0)$. *Pak inverzní funkce* $f^{-1}: \ y = f^{-1}(x)$ *má v bodě* $x_0 = f(y_0)$ *derivaci a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}, & \text{je-li } f'(y_0) \neq 0,\\ +\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ rostoucí},\\ -\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ klesající}. \end{cases}$$

Rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě dotyku $(x_0, f(x_0))$:

$$t: \ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Pokud $f'(x_0) = \pm\infty$ a pokud je funkce f v tomto bodě spojitá, pak je tečna v tomto bodě rovnoběžná s osou y a její rovnice tedy je

$$t: \ x = x_0.$$

Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě dotyku $(x_0, f(x_0))$:

$$
\begin{aligned}
n: \ y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), && \text{je-li } f'(x_0) \neq 0,\\
n: \ x &= x_0, && \text{je-li } f'(x_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Pokud $f'(x_0) = \pm\infty$ a pokud funkce f v tomto bodě spojitá, pak je normála v tomto bodě rovnoběžná s osou x a její rovnice tedy je

$$n: \ y = f(x_0).$$

(149) Z definice vypočtěte hodnotu $f'(0)$, kde $f(x) = \sin x$.

Řešení:

Z definice platí

$$f'(0) = (\sin x)'_{x=0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(150) Z definice vypočtěte hodnotu $f'(0)$, kde $f(x) = |\sin x|$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1, \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{derivace neexistuje.}$$

(151) Z definice vypočtěte hodnotu $f'(\sqrt{5})$, kde $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2-1}-2}{x-\sqrt{5}} = \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{x^2-1-4}{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+2\right)} = \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-1}+2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(152) Z definice určete derivaci funkce $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
(\sinh x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sinh(x+h) - \sinh x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{x+h} - e^{-(x+h)}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x - e^{-x-h} + e^{-x}}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^x e^h - e^x}{h} + \frac{e^{-x} e^{-h} - e^{-x}}{-h} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left(e^x \frac{e^h - 1}{h} + e^{-x} \frac{e^{-h} - 1}{-h} \right) = \frac{1}{2} \left(e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} + e^{-x} \lim_{h\to 0} \frac{e^{-h} - 1}{-h} \right) = \\
&= \frac{1}{2} (e^x \cdot 1 + e^{-x} \cdot 1) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \\
&= \cosh x.
\end{aligned}$$

(153) Zderivujte
$$f(x) \equiv 1.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme
$$(1)' = 0.$$

(154) Zderivujte

$$f(x) = 6x.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$(6x)' = 6.$$

(155) Zderivujte
$$f(x) = x^2.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme
$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

(156) Zderivujte
$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(157) Zderivujte

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

(158) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt[4]{x^7}.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$\left(\sqrt[4]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}.$$

(159) Zderivujte
$$f(x) = x^3 + 2x - \sin x + 2.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme
$$\left(x^3 + 2x - \sin x + 2\right)' = 3x^2 + 2 - \cos x.$$

(160) Zderivujte
$$f(x) = -2\cos x + 4\,e^x + \frac{1}{3}x^7.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme
$$\left(-2\cos x + 4\,e^x + \frac{1}{3}x^7\right)' = 2\sin x + 4\,e^x + \frac{7}{3}x^6.$$

(161) Zderivujte

$$f(x) = x\,e^x\,.$$

Řešení:

Pomocí vzorce pro derivaci součinu funkcí obdržíme

$$(x\,e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x)\,e^x\,.$$

(162) Zderivujte

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}.$$

Řešení:

Derivováním podílu odostaneme

$$\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3\cdot(x^2+1)-(3x-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}.$$

(163) Zderivujte

$$f(x) = \frac{x \ln x}{\arcsin x + \operatorname{arctg} x}.$$

Řešení:

Kombinací derivování podílu a součinu získáme přímo

$$\left(\frac{x \ln x}{\arcsin x + \operatorname{arctg} x}\right)' = \frac{(\ln x + 1)(\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}\right)}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2}.$$

(164) Zderivujte

$$f(x) = x^7 + 4\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}(3x+1) + \sin x^2 + 2^x + \arcsin 7x + \ln(1+x^2) + x^2\, e^{1-10x}.$$

Řešení:

Aplikováním základních vzorců, derivováním složené funkce a součinu dostaneme

$$\left(x^7 + 4\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}(3x+1) + \sin x^2 + 2^x + \arcsin 7x + \ln(1+x^2) + x^2\, e^{1-10x}\right)' =$$

$$= 7x^6 + 4\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{1}{(3x+1)^2+1} \cdot (3x+1)' + \left(\cos x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' + 2^x \ln 2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-(7x)^2}} \cdot (7x)' + \frac{1}{1+x^2} \cdot \left(x^2\right)' + 2x \cdot e^{1-10x} + x^2 \cdot e^{1-10x} \cdot (1-10x)' =$$

$$= 7x^6 + \frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{9x^2+6x+2} + 2x\cos x^2 + 2^x \ln 2 + \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}} + \frac{2x}{1+x^2} +$$

$$+ 2x\, e^{1-10x} - 10x^2\, e^{1-10x}.$$

(165) Zderivujte
$$f(x) = (3x^2 - 2x + 10)^{10}.$$

Řešení:

$$\left[(3x^2 - 2x + 10)^{10}\right]' = 10(3x^2 - 2x + 10)^9 \left(3x^2 - 2x + 10\right)' = 10(3x^2 - 2x + 10)^9(6x - 2).$$

(166) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Řešení:

$$\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \left[(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4-x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

(167) Zderivujte
$$f(x) = \ln \sin x.$$

Řešení:

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x.$$

(168) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{\sin 3x}.$$

Řešení:

$$\left(\sqrt{\sin 3x}\right)' = \left[(\sin 3x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\sin 3x)' = \frac{1}{2}(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot 3 = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

(169) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2}\left(\sqrt{x} - \frac{2}{5x^2} + 6\sqrt[5]{x^3}\right).$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{2}{5}}\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}x^{-2} + 6x^{\frac{3}{5}}\right) = x^{\frac{9}{10}} - \frac{2}{5}x^{-\frac{8}{5}} + 6x, \\ f'(x) &= \frac{9}{10}x^{-\frac{1}{10}} - \frac{2}{5}\left(-\frac{8}{5}\right)x^{-\frac{13}{5}} + 6 = \frac{9}{10\sqrt[10]{x}} + \frac{16}{25\sqrt[5]{x^{13}}} + 6 = \\ &= \frac{9}{10\sqrt[10]{x}} + \frac{16}{25x^2\sqrt[5]{x^3}} + 6 = \frac{9\sqrt[10]{x^9}}{10x} + \frac{16\sqrt[5]{x^2}}{25x^3} + 6. \end{aligned}$$

(170) Zderivujte

$$f(x) = x^2 e^x \sin x.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^2(e^x \sin x)]' = 2x(e^x \sin x) + x^2(e^x \sin x)' = \\ &= 2x\, e^x \sin x + x^2(e^x \sin x + e^x \cos x) = x\, e^x(2 \sin x + x \sin x + x \cos x). \end{aligned}$$

(171) Zderivujte

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = (\ln^{-1} x)' = -1 \ln^{-2} x \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln^2 x}.$$

(172) Zderivujte

$$f(x) = \operatorname{arccotg} 2x.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{-1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = \frac{-2}{1+4x^2}.$$

(173) Zderivujte

$$f(x) = (2x + 6)4^x.$$

Řešení:

$$f'(x) = 2 \cdot 4^x + (2x + 6)4^x \ln 4 = 2 \cdot 4^x \big[1 + (x + 3) \ln 4\big].$$

(174) Zderivujte
$$f(x) = 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$f'(x) = 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \ln 7 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x - \sqrt{x}\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \ln 7 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\ln^2 x} =$$
$$= 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \ln 7 \cdot \frac{\ln x - 2}{2\sqrt{x} \ln^2 x}.$$

(175) Zderivujte
$$f(x) = x\sin^2(2x).$$

Řešení:

$$f'(x) = 1\sin^2 2x + x2\sin 2x\cos 2x2 = \sin^2 2x + 2x2\sin x\cos x = \sin^2 2x + 2x\sin 4x.$$

(176) Zderivujte

$$f(x) = \frac{-2}{\ln\cos x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$f'(x) = -2[(\ln\cos x)^{-1}]' = -2(-1)(\ln\cos x)^{-2}\frac{1}{\cos x}(-\sin x) =$$
$$= -2\frac{\sin x}{\cos x(\ln\cos x)^2} = \frac{-2\operatorname{tg} x}{\ln^2\cos x}.$$

(177) Zderivujte
$$f(x) = 7^{2x^3+x-9}.$$

__Řešení:__

$$f'(x) = 7^{2x^3+x-9} \ln 7(6x^2+1).$$

(178) Zderivujte

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}\cdot\frac{(-1)(x^2+1)-(1-x)2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}\cdot\frac{x^2-2x-1}{2(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

(179) Zderivujte

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$f'(x) = \frac{-1}{1 + \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{2x^2+2}{x^4+2x^2+1} = \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1}.$$

(180) Zderivujte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}x}{1-x^2}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{5}x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{5}(1-x^2)-\sqrt{5}x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1+\frac{5x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{\sqrt{5}(x^2+1)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{\frac{(1-x^2)^2+5x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}.$$

(181) Zderivujte

$$f(x) = x^5 + 5^x.$$

Řešení:

$$f'(x) = 5x^4 + 5^x \ln 5.$$

(182) Zderivujte
$$f(x) = 5x^5 \sqrt[5]{5^x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = 5 \cdot 5x^4 \sqrt[5]{5^x} + 5x^5 \frac{1}{5}(5^x)^{-\frac{4}{5}} 5^x \ln 5 = 25x^4 \sqrt[5]{5^x} + x^5 \sqrt[5]{5^x} \ln 5 =$$
$$= x^4 \sqrt[5]{5^x}(25 + x \ln 5).$$

(183) Zderivujte

$$f(x) = \ln\ln(x-3) + \arcsin\frac{x-5}{2}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\ln(x-3)}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-5}{2}\right)^2}}\frac{1}{2} = \\
&= \frac{1}{(x-3)\ln(x-3)} + \frac{1}{\sqrt{-x^2+10x-21}}.
\end{aligned}$$

(184) Zderivujte

$$f(x) = \arccos \log_{\frac{2}{3}} x^2.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\log_{\frac{2}{3}}^2 x^2}} \frac{1}{x^2 \ln \frac{2}{3}} 2x = \\ &= \frac{-2}{x \ln \frac{2}{3} \sqrt{1-\log_{\frac{2}{3}}^2 x^2}}. \end{aligned}$$

(185) Zderivujte

$$f(x) = \ln^2 \cos^3 x^5.$$

Řešení:

$$f'(x) = 2 \ln \cos^3 x^5 \cdot \frac{1}{\cos^3 x^5} \cdot 3 \cos^2 x^5 (-\sin x^5) 5x^4 = -30 \frac{\ln \cos^3 x^5 \cdot \cos^2 x^5 \cdot \sin x^5 \cdot x^4}{\cos^3 x^5} =$$
$$= -30x^4 \cdot \ln \cos^3 x^5 \cdot \operatorname{tg} x^5.$$

(186) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln\cos\frac{2x+1}{4}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left(\ln\cos\frac{2x+1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\cos\frac{2x+1}{4}}\left(-\sin\frac{2x+1}{4}\right)\frac{1}{2} = \\ &= -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\ln\cos\frac{2x+1}{4}\right)^2}}\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}. \end{aligned}$$

(187) Zderivujte

$$f(x) = x^x.$$

Řešení:

Poněvadž se proměnná x vyskytuje v základu i v exponentu, musíme využít exponenciální funkci, tj.

$$(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}\,(x \ln x)' = e^{x \ln x}\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$
$$= e^{x \ln x}\,(1 + \ln x) = x^x\,(1 + \ln x)\,.$$

Zkuste výsledek porovnat s tím, který byste obdrželi aplikováním vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$ a/nebo $(a^x)' = a^x \ln a$.

(188) Zderivujte
$$f(x) = x^{x^2}.$$

Řešení:

$$\left(x^{x^2}\right)' = \left(e^{x^2 \ln x}\right)' = e^{x^2 \ln x}\left(x^2 \ln x\right)' = e^{x^2 \ln x}\left(2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) =$$
$$= x^{x^2}\left(2x \cdot \ln x + x\right) = x^{x^2+1}(2 \ln x + 1)$$

(189) Zderivujte

$$f(x) = x^{\sin x}.$$

Řešení:

$$\left(x^{\sin x}\right)' = \left(e^{\sin x \cdot \ln x}\right)' = e^{\sin x \cdot \ln x} (\sin x \cdot \ln x)' =$$
$$= e^{\sin x \cdot \ln x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

(190) Zderivujte

$$f(x) = (\sin x)^{\ln x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\left[(\sin x)^{\ln x}\right]' &= \left(e^{\ln x \cdot \ln \sin x}\right)' = e^{\ln x \cdot \ln \sin x}\,(\ln x \cdot \ln \sin x)' = \\ &= e^{\ln x \cdot \ln \sin x}\left(\frac{1}{x} \cdot \ln \sin x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right) = \\ &= (\sin x)^{\ln x}\left(\frac{\ln \sin x}{x} + \frac{\cos x \cdot \ln x}{\sin x}\right).\end{aligned}$$

(191) Zderivujte

$$f(x) = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \left[e^{\operatorname{tg} x \ln \ln x}\right]' = e^{\operatorname{tg} x \ln \ln x}(\operatorname{tg} x \ln \ln x)' = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\ln \ln x + \operatorname{tg} x \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\right) =$$

$$= (\ln x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln \ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x \ln x}\right).$$

(192) Zderivujte
$$f(x)=\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\left(\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}}\cdot\frac{-e^x\,(1+e^x)-(1-e^x)\,e^x}{(1+e^x)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}\cdot\frac{-2\,e^x}{(1+e^x)^2}=\sqrt{\frac{(1+e^x)^2}{1-e^{2x}}}\cdot\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}=$$
$$=\frac{-e^x}{(1+e^x)\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

(193) Zderivujte

$$f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\left[(x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}\right]' &= \left(e^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2+1)}\right)' = e^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2+1)} \left[\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2+1)\right]' = \\
&= e^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2+1)} \left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\right] = \\
&= (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x - 1} \left[2x \operatorname{arctg} x + \ln(x^2+1)\right].
\end{aligned}$$

(194) Zderivujte

$$f(x) = \ln \frac{e^x}{x^2+1}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\left(\ln \frac{e^x}{x^2+1}\right)' = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2+1}} \cdot \frac{e^x\left(x^2+1\right) - e^x\,2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2+1}{e^x} \cdot \frac{e^x\,(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

(195) Zderivujte

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$$

Řešení:

$$\left(\ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x+1) - \sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x(x+1) - x^2 - 1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}.$$

(196) Zderivujte

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

Řešení:

$$\left(\ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \frac{-\cos x(1+\sin x) - (1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \cdot \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x}.$$

(197) Zderivujte

$$f(x) = \ln \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x}.$$

Řešení:

$$\left(\ln \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x}\right)' = \frac{x}{x+2-2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\left(1-\frac{2}{2\sqrt{x+1}}\right)\cdot x - x - 2 + 2\sqrt{x+1}}{x^2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)x - x\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + 2x + 2}{x^2\sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+1} - 2x^2 - 2x} =$$

$$= \frac{2+x-2\sqrt{x+1}}{x\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

(198) Zderivujte

$$f(x) = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

Řešení:

$$\left(\frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arccos x}{x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(1+\sqrt{1-x^2}\right) - \left(1-\sqrt{1-x^2}\right) \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - x}{1-1+x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\arccos x}{x^2}.$$

(199) Zderivujte

$$f(x) = (x-2)\sqrt{1+e^x} - \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}.$$

Řešení:

$$\left[(x-2)\sqrt{1+e^x} - \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right]' = \sqrt{1+e^x} + (x-2)\cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} -$$

$$- \frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1} \cdot \frac{\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\left(\sqrt{1+e^x}+1\right) - \left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1+e^x} + \frac{(x-2)\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{e^x + \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - e^x + \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{1+e^x - 1} =$$

$$= \sqrt{1+e^x} + \frac{(x-2)\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{\frac{2\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{e^x} =$$

$$= \sqrt{1+e^x} + \frac{(x-2)\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} =$$

$$= \frac{1+e^x + \frac{x\,e^x}{2} - e^x - 1}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{x\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}}.$$

(200) Zderivujte

$$f(x) = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\left(\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x-1+x}{1+x}}}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2} = \\
&= -\sqrt{\frac{1+x}{2x}}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} = \\
&= -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x-2x^2}}.
\end{aligned}$$

(201) Určete první a druhou derivaci funkce

$$f(x) = x^2 \sin\sqrt{x}.$$

Řešení:

$$\left(x^2 \sin\sqrt{x}\right)' = 2x\sin\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x},$$

$$\begin{aligned}\left(x^2 \sin\sqrt{x}\right)'' &= \left(2x\sin\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\right)' = \\ &= 2\sin\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x} = \\ &= 2\sin\sqrt{x} + \frac{7}{4}\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \frac{1}{4}x\sin\sqrt{x}.\end{aligned}$$

(202) Určete první a druhou derivaci funkce
$$f(x) = \operatorname{tg}^2 x.$$

Řešení:

$$(\operatorname{tg}^2 x)' = \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)' = \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos^2 x - \sin^2 x\cdot 2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x} =$$
$$= \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}{\cos^4 x} = \frac{2\cdot\sin x}{\cos^3 x},$$
$$(\operatorname{tg}^2 x)'' = \left(\frac{2\cdot\sin x}{\cos^3 x}\right)' = \frac{2\cdot\cos x\cdot\cos^3 x - 2\cdot\sin x\cdot 3\cdot\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^6 x} =$$
$$= \frac{2\cdot\cos^4 x + 6\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\cos^6 x} =$$
$$= \frac{2\cdot\cos^2 x + 6\cdot\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

(203) Určete hodnotu derivace dané funkce v bodě x_0.

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 8, \quad x_0 = -1.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x + 2, \\ f'(-1) &= 6(-1) + 2 = -4. \end{aligned}$$

(204) Určete hodnotu derivace dané funkce v bodě x_0.

$$f(x) = \ln \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{12}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}, \\ f'\left(\tfrac{\pi}{12}\right) &= \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4. \end{aligned}$$

(205) Určete funkční hodnotu dané funkce v bodě x_0 a dále v tomto bodě určete hodnotu první a druhé derivace této funkce.

$$f(x) = \sqrt{3x^4+1}, \quad x_0 = -1.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}(3x^4+1)^{-\frac{1}{2}}12x^3 = \frac{6x^3}{\sqrt{3x^4+1}},\\
f''(x) &= \frac{18x^2\sqrt{3x^4+1} - 6x^3\frac{6x^3}{\sqrt{3x^4+1}}}{3x^4+1},\\
f(-1) &= \sqrt{3+1} = 2,\\
f'(-1) &= \frac{-6}{2} = -3,\\
f''(-1) &= \frac{18\cdot 2 - \frac{36}{2}}{4} = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

(206) Určete funkční hodnotu dané funkce v bodě x_0 a dále v tomto bodě určete hodnotu první a druhé derivace této funkce.

$$f(x) = x \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 \sin 2x + x \cos 2x 2 = \sin 2x + 2x \cos 2x,\\
f''(x) &= 2 \cos 2x + 2 \cos 2x + 2x(-\sin 2x)2 = 4 \cos 2x - 4x \sin 2x,\\
f(\tfrac{\pi}{4}) &= \tfrac{\pi}{4} 1 = \tfrac{\pi}{4},\\
f'(\tfrac{\pi}{4}) &= 1 + 0 = 1,\\
f''(\tfrac{\pi}{4}) &= 0 - 4\tfrac{\pi}{4} 1 = -\pi.
\end{aligned}$$

(207) Pomocí inverzní funkce určete derivaci funkce $\arccos x$.

Řešení:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \\ = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(208) Pomocí inverzní funkce určete derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$.

Řešení:

$$(\sqrt[3]{x})' \left| \sqrt[3]{x} = y \right| = \frac{1}{(y^3)'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

(209) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$$

v bodě $x_0 = 2$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = 2$, tj.

$$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+11}} \overset{x=2}{\rightsquigarrow} \frac{1}{6}, \qquad f(x) = \sqrt{x^2-3x+11} \overset{x=2}{\rightsquigarrow} 3.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: \ y - 3 = \frac{1}{6}(x-2), \qquad n: \ y - 3 = -6(x-2),$$

$$y = \frac{x}{6} + \frac{8}{3}, \qquad y = -6x + 15.$$

(210) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$$

v bodě $x_0 = \sqrt{2}$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = \sqrt{2}$, tj.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2 - 1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \overset{x=\sqrt{2}}{\rightsquigarrow} \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} \overset{x=\sqrt{2}}{\rightsquigarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: \ y - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \sqrt{2}\right), \qquad n: \ y - \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \left(x - \sqrt{2}\right),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1 + \frac{\pi}{4}, \qquad y = -\frac{2}{\sqrt{2}}x + 2 + \frac{\pi}{4}.$$

(211) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = 4 - x^2$$

v dotykovém bodě x_0, jenž je průsečíkem grafu funkce $f(x)$ s kladnou částí osy x.

Řešení:

Nejdříve určíme bod x_0. Funkce $f(x)$ má s osou x průsečíky v bodech, které jsou řešením kvadratické rovnice $f(x) = 0$. Tato řešení jsou ± 2, proto $x_0 = 2$. Nyní spočítáme funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = 2$, tj.

$$f'(x) = -2x \overset{x=2}{\rightsquigarrow} -4, \qquad f(x) = 4 - x^2 \overset{x=2}{\rightsquigarrow} 0.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} t:\ y - 0 &= -4\,(x-2)\,, & n:\ y - 0 &= \frac{1}{4}\cdot(x-2)\,, \\ y &= -4x + 8, & y &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(212) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

v bodě $x_0 = 1$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = 1$, tj.

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{2x}{2}\right) \overset{x=1}{\rightsquigarrow} 0, \qquad f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}} \overset{x=1}{\rightsquigarrow} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t:\ y - e^{-\frac{1}{2}} = 0\,(x-1), \qquad n:\ x = 1,$$
$$y = e^{-\frac{1}{2}}, \qquad x = 1.$$

(213) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = x^2 \log_2(x^2 - 7).$$

v bodě $x_0 = -3$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = -3$, tj.

$$f'(x) = 2x \log_2(x^2 - 7) + \frac{2x^3}{(x^2 - 7)\ln 2} \overset{x=-3}{\rightsquigarrow} -6 - \frac{27}{\ln 2},$$

$$f(x) = x^2 \log_2(x^2 - 7) \overset{x=-3}{\rightsquigarrow} 9.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: \ y - 9 = \left(-6 - \frac{27}{\ln 2}\right)(x + 3),$$

$$y = -\left(6 + \frac{27}{\ln 2}\right)x + 9 - 3\left(6 + \frac{27}{\ln 2}\right),$$

$$n: \ y - 9 = \frac{1}{6 + \frac{27}{\ln 2}}(x + 3),$$

$$y = \frac{\ln 2}{6\ln 2 + 27}x + 9 + 3\frac{\ln 2}{6\ln 2 + 27}.$$

(214) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}.$$

v bodě $x_0 = -2$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = -2$, tj.

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+3}{(x^2-3)^2} \overset{x=-2}{\rightsquigarrow} 11,$$

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3} \overset{x=-2}{\rightsquigarrow} 3.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} t:\ y-3 &= 11(x+2), \\ y &= 11x+25, \\ n:\ y-3 &= -\frac{1}{11}(x+2), \\ y &= -\frac{x}{11}+\frac{31}{11}. \end{aligned}$$

(215) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = 2x + \sin x.$$

v bodě $x_0 = \pi$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = \pi$, tj.

$$f'(x) = 2 + \cos x \overset{x=\pi}{\rightsquigarrow} 1,$$
$$f(x) = 2x + \sin x \overset{x=\pi}{\rightsquigarrow} 2\pi.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} t:\ y - 2\pi &= 1(x - \pi), \\ y &= x + \pi, \\ n:\ y - 2\pi &= -1(x - \pi), \\ y &= -x + 3\pi. \end{aligned}$$

(216) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^2-4x+11}.$$

v bodě $x_0 = -1$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = -1$, tj.

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 10x^2 + 23x - 2}{\sqrt{x^2-4x+11}} \overset{x=-1}{\rightsquigarrow} -\frac{19}{2},$$

$$f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^2-4x+11} \overset{x=-1}{\rightsquigarrow} 8.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} t:\ y - 8 &= -\frac{19}{2}(x+1), \\ y &= -\frac{19}{2}x - \frac{3}{2}, \\ n:\ y - 8 &= \frac{2}{19}(x+1), \\ y &= \frac{2}{19}x + \frac{154}{19}. \end{aligned}$$

I. 4. l'Hospitalovo pravidlo

Věta 11 (l'Hospitalovo pravidlo). *Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z podmínek*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,
- $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

V roce 1921 bylo dokázáno, že autorem tohoto pravidla je *Johann I. Bernoulli* (1667–1748), jehož byl *Guillaume Francois Antoine de l'Hospital* (1661–1704) žákem. Na základě poznámek z Bernoulliových přednášek vydal l'Hospital v roce 1696 první tištěnou učebnici diferenciálního počtu *Analýza nekonečně malých veličin.*

Výpočet limit s neurčitými výrazy pomocí l'Hospitalova pravidla:

- $$\infty - \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \Rightarrow \frac{0}{0};$$
- $$-\infty + \infty \Rightarrow \text{analogicky jako předchozí úprava;}$$
- $$0 \cdot \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \Rightarrow \frac{0}{0};$$
- $$0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0}(g(x)\ln f(x))}$$
  $$\Rightarrow \text{ předchozí případ } \Rightarrow \frac{0}{0}.$$

(217) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} \;\Big|\tfrac{0}{0}\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2x-1} = \frac{4}{3}.$$

(218) Pro $a > 0$ vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} \left| \tfrac{0}{0} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a}{1} = \ln a.$$

(219) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} \;\Big|\tfrac{0}{0}\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} \;\Big|\tfrac{0}{0}\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{1}{2}.$$

(220) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2}.$$

__Řešení:__

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2} \ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi\sin(\pi x)}{2(x-1)} \ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(221) Následující příklad ukazuje, že ne vždy je vhodné použít l'Hospitalovo pravidlo
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

čímž jsme se dostali zpět k zadání. Řešení příkladu bez použití l'Hospitalova pravidla vede k výsledku
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

(222) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} \operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} \operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x) \;\left|\infty\cdot 0\right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}} \;\left|\tfrac{0}{0}\right| =$$

$$\overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} -\frac{\operatorname{tg}^2 2x \cos^2 2x}{2\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} -\frac{\sin^2 2x}{2\sin x \cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} -\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} \sin 2x = -1.$$

(223) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} \; \left| \tfrac{0}{0} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\sin x}\cos x}{4\cos 4x} = \frac{1}{4}.$$

(224) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x.$$

Řešení:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x \,\left|\, 0 \cdot \infty \,\right| = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\operatorname{cotg} x} \,\left|\, \tfrac{0}{0} \,\right| =$$

$$\overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x = 0.$$

(225) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right) \left|\, \infty-\infty \,\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x} \left|\, \tfrac{0}{0} \,\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x} \left|\, \tfrac{0}{0} \,\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x} \left|\, \tfrac{0}{0} \,\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x+4\cos x-4x\sin x-x2x\sin x-x^2\cos x} = \frac{1}{6}.$$

(226) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\ \Big|\infty-\infty\Big| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{(e^x-1)\sin x}\ \Big|\tfrac{0}{0}\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{e^x\sin x+(e^x-1)\cos x}\ \Big|\tfrac{0}{0}\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-(e^x-1)\sin x} = \frac{1}{2}.$$

(227) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\ \left|\infty-\infty\right|\ =\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x}=0$$

(228) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right).$$

__Řešení:__

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)\ \left|-\infty+\infty\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\left(e^{2x}-1\right)+2x}{2x^2\left(e^{2x}-1\right)}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+2x\,e^{2x}-1-2\,e^{2x}+2}{4x\left(e^{2x}-1\right)+4x^2\,e^{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{2x}+2x\,e^{2x}+1}{4x\,e^{2x}-4x+4x^2\,e^{2x}}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\,e^{2x}+2\,e^{2x}+4x\,e^{2x}}{4\,e^{2x}+8x\,e^{2x}-4+8x\,e^{2x}+8x^2\,e^{2x}}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\,e^{2x}+8x\,e^{2x}}{8\,e^{2x}+16x\,e^{2x}+32x\,e^{2x}+16x\,e^{2x}+16x^2\,e^{2x}} = \frac{1}{6}.$$

(229) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)\ \left|\,\infty-\infty\,\right|\ =\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\ \left|\,\tfrac{0}{0}\,\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\ \left|\,\tfrac{0}{0}\,\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

(230) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\ln x}-\frac{1}{x^2-1}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\ln x}-\frac{1}{x^2-1}\right)\ \Big|\infty-\infty\Big| = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-2\ln x}{2(x^2-1)\ln x}\ \Big|\tfrac{0}{0}\Big|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-\frac{2}{x}}{4x\ln x+\frac{2(x^2-1)}{x}}\cdot\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{4x^2\ln x+2x^2-2}\ \Big|\tfrac{0}{0}\Big|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{8x\ln x+4x+4x}=\frac{1}{2}.$$

(231) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right) \;\Big|\, \pm\infty \mp \infty \,\Big|\; = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} \;\Big|\, \tfrac{0}{0} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{1+x}{1+x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{(1+x)\ln(1+x)+x} \;\Big|\, \tfrac{0}{0} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\ln(1+x)+1+1} = -\frac{1}{2}.$$

(232) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x \;\Big|\, 0\cdot(-\infty) \,\Big|\; = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \;\Big|\, \tfrac{-\infty}{\infty} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

(233) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x \; \left| 0 \cdot \infty \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{\ln x}} \; \left| \tfrac{0}{0} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{-2}{1+x^2}}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x \ln^2 x}{1+x^2} \; \left| \tfrac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln^2 x + \frac{4x \ln x}{x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln^2 x + 4 \ln x}{2x} \; \left| \tfrac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4\ln x}{x} + \frac{4}{x}}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 \ln x + 4}{2x} \; \left| \tfrac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}}{2} = 0.$$

(234) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x\,e^{-x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} x\,e^{-x} \;\Big|\infty\cdot 0\Big| = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\;\Big|\tfrac{\infty}{\infty}\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

(235) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0^+} x\,e^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,e^{\frac{1}{x}} \;\Big|\, 0\cdot\infty \,\Big| = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-1}} \;\Big|\, \frac{\infty}{\infty} \,\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}\,e^{\frac{1}{x}}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \;\Big|\, e^{\frac{1}{0^+}} \,\Big| = \infty.$$

(236) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0^-} x\,e^{-\frac{1}{x}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^-} x\,e^{-\frac{1}{x}} \;\left|\, 0\cdot\infty \,\right| = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{-1}} \;\left|\, \frac{\infty}{\infty} \,\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^{-2}\,e^{-\frac{1}{x}}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^-} -e^{-\frac{1}{x}} \;\left|\, -e^{-\frac{1}{0^-}} \,\right| = -\infty.$$

(237) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^{-2}}}{x^{100}}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^{-2}}}{x^{100}} \;\Big|\tfrac{0}{0}\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^{-2}}(-1)(-2)x^{-3}}{100x^{99}} = \frac{1}{50} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^{-2}}}{x^{102}}.$$

Je vidět, že situace se zhoršila a tudy cesta nevede. Upravme tedy zadání a počítejme znovu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^{-2}}}{x^{100}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^{-100}}{e^{x^{-2}}} \;\Big|\tfrac{\infty}{\infty}\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-100x^{-101}}{e^{x^{-2}}(-2)x^{-3}} = 50 \lim_{x\to 0} \frac{x^{-98}}{e^{x^{-2}}} \;\Big|\tfrac{\infty}{\infty}\Big|\; = \\
&\Big|\; \textit{použijeme ještě } 49 \times \textit{ l'Hospitalovo pravidlo} \;\Big| \\
&= 50! \lim_{x\to 0} \frac{x^{0}}{e^{x^{-2}}} \;\Big|\tfrac{1}{\infty}\Big|\; = 0.
\end{aligned}$$

(238) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\cos 3x\right)} = e^{-\frac{9}{2}},$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{x^2}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x\cos 3x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2\cos 3x - 6x\sin 3x} = -\frac{9}{2}.$$

(239) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\operatorname{cotg}2x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\operatorname{cotg}2x}=e^{\lim_{x\to 0}\left\{\operatorname{cotg}(2x)\cdot\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]\right\}}=e,$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0}\left\{\operatorname{cotg}(2x)\cdot\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\cdot\ln\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\sin 2x}\ \left|\frac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)\cdot\ln\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos(2x)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}}{2\cos 2x}=1.$$

(240) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1+} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1+} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{1-x}\cdot\ln x\right)} = e^{-1},$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{1-x}\cdot\ln x\right) = \lim_{x\to 1+}\frac{\ln x}{1-x}\ \Big|\, \tfrac{0}{0}\,\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

(241) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [\operatorname{tg}(2x)\cdot\ln(\operatorname{tg} x)]} = e^{-1},$$

neboť platí

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [\operatorname{tg}(2x)\cdot\ln(\operatorname{tg} x)] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)\cdot\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos 2x} \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos(2x)\cdot\ln(\operatorname{tg} x) + \sin(2x)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-2\sin 2x} = -1.$$

(242) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{-\frac{1}{6}},$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{(\cos x)\cdot x-\sin x}{x^2}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{4\sin x + 2x\cos x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{4\cos x + 2\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{6}.$$

(243) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}=e^0=1,$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{x}\ \left|\begin{array}{l}\text{což je limita typu } \frac{0}{0}, \text{ neboť platí}\\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\overset{\text{l'H.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1\end{array}\right|\overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\,\frac{\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x}{x^2}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x}{x\operatorname{arctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)x\operatorname{arctg} x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x\operatorname{arctg} x-1}{(1+3x^2)\operatorname{arctg} x+x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\overset{\text{l'H.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{arctg} x-\frac{2x}{1+x^2}}{6x\operatorname{arctg} x+\frac{1+3x^2}{1+x^2}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2(1+x^2)\operatorname{arctg} x-2x}{6x(1+x^2)\operatorname{arctg} x+1+3x^2+1+x^2}=0.$$

(244) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(\sin x\cdot \ln \operatorname{cotg} x)} = 1,$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x \cdot \ln \operatorname{cotg} x) \left| 0\cdot\infty \right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{\sin^2 x \cdot \cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0.$$

(245) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

<u>Řešení:</u>

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\cdot \ln\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{-\frac{1}{3}},$$

neboť platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\cdot \ln\frac{\sin x}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{(\cos x)x-\sin x}{x^2}}{\sin x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x+x\sin 2x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{2\sin x\cos x+\sin 2x+2x\cos 2x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\sin 2x+\sin 2x+2x\cos 2x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-\cos x+x\sin x}{2\cos 2x+2\cos 2x+2\cos 2x-4x\sin 2x} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(246) Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{x^2 - \pi^2}, & x \neq \pi, \\ -\frac{1}{2}, & x = \pi \end{cases}$$

spojitá.

Řešení:

Pomocí l'Hospitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{x^2 - \pi^2} \left| \frac{0}{0} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{\cos 2x \cdot \sin 3x - 2x \sin 2x \cdot \sin 3x + 3x \cos 2x \cdot \cos 3x}{2x} = -\frac{3}{2},$$

což znamená, že funkce $f(x)$ není spojitá.

I. 5. Vyšetřování průběhu funkce

Monotonie a lokální extrémy

Důsledek 12. *Nechť má funkce* $f(x)$ *konečnou derivaci na intervalu* I.

- *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *rostoucí na* I.
- *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *klesající na* I.

Definice 13. Nechť $x_0 \in D(f)$. Tento bod se nazývá *stacionární*, pokud $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 14. Lokální extrém může nastat buď ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde $f'(x_0)$ neexistuje.

Věta 15. *Nechť je funkce* $f(x)$ *spojitá v bodě* x_0 *a má vlastní derivaci v nějakém ryzím okolí* $\mathcal{O}\{x_0\} \setminus x_0$. *Jestliže pro všechna* $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x < x_0$, *je* $f(x_0) > 0$ *(*$f(x_0) < 0$*) a jestliže pro všechna* $x \in \mathcal{O}\{x_0\}$, $x > x_0$, *je* $f(x_0) < 0$ *(*$f(x_0) > 0$*), pak má funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 *ostré lokální maximum (minimum).*

Věta 16. *Nechť* $f'(x_0) = 0$. *Je-li* $f''(x_0) > 0$, *pak má funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 *ostré lokální minimum. Je-li* $f''(x_0) < 0$, *pak má funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 *ostré lokální maximum.*

Konvexnost, konkávnost a inflexní body

Důsledek 17. *Nechť* I *je otevřený interval a funkce* $f(x)$ *má vlastní druhou derivaci na intervalu* I.

- *Je-li* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *ostře konvexní na* I.
- *Je-li* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *ostře konkávní na* I.

Definice 18. Nechť $x_0 \in D(f)$. Tento bod se nazývá *kritický*, pokud $f''(x_0) = 0$.

Věta 19.

- *Nechť* x_0 *je inflexní bod a nechť existuje* $f''(x_0)$. *Potom* $f''(x_0) = 0$.
- *Nechť* $f''(x_0) = 0$ *a existuje okolí* $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ *takové, že platí* $f''(x_0) < 0$ *pro každé* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *a* $f''(x_0) > 0$ *pro každé* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, *nebo naopak. Pak je* x_0 *inflexním bodem funkce* $f(x)$.
- *Nechť* $f''(x_0) = 0$ *a* $f'''(x_0) \neq 0$. *Pak je* x_0 *inflexním bodem funkce* $f(x)$.

Poznámka 20. Inflexním bodem může může být buď kritický bod nebo bod, kde $f''(x_0)$ neexistuje. Zde je potřeba dát pozor na definici inflexního bodu. V některých publikacích bývá inflexní bod definován jako kritický bod, v němž druhá derivace mění znaménko, což znamená, že v inflexním bodě musí existovat vlastní druhá derivace, jejíž hodnota je rovna nule. Inflexní body bývají někdy ještě rozdělovány do dvou kategorií podle chování $f'(x_0)$. Pokud x_0 je inflexní bod a současně $f'(x_0) = 0$, nazývá se bod x_0 *sedlovým bode* (též stacionární inflexní bod), a pokud x_0 je inflexní bod s $f'(x_0) \neq 0$, hovoříme o *nestacionárním inflexním bodě*.

Asymptoty

Definice 21. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže má f v x_0 alespoň jednu limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty.$$

Věta 22. *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

Vyšetřování průběhu funkce — postup

i) Definiční obor;
ii) spojitost, charakterostika bodů nespojitosti;
iii) lichost, sudost, periodičnost;
iv) $f(x) = 0$, intervaly, kde je funkce kladná a záporná;
v) $f'(x) = 0$ a $D(f')$;
vi) monotonie, extrémy;
vii) $f''(x) = 0$ a $D(f'')$;
viii) konvexnost, konkávnost, inflexní body;
ix) asymptoty bez směrnice a směrnicí;
x) graf funkce.

(247) Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = x^{-3}\,e^{-x\sin x}$$

sudá, nebo lichá.

Řešení:

Připomeňme, že funkce je sudá, jestliže je její graf symetrický dle osy y, tj. $f(-x) = f(x)$, a lichá, jestliže je její graf symetrický dle počátku soustavy souřadnic, tj. $f(-x) = -f(x)$. Spočtěme tedy, čemu se rovná $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^{-3}\,e^{-(-x)\sin(-x)} = -x^{-3}\,e^{x(-\sin x)} = -x^{-3}\,e^{-x\sin x} = -f(x).$$

Daná funkce je tedy lichá.

(248) Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = \frac{x(x^2+5)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{x^7} \ln \sqrt[3]{x^2}}$$

sudá, nebo lichá.

Řešení:

Spočtěme, čemu se rovná $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)[(-x)^2+5]}{\operatorname{cotg} \frac{1}{(-x)^7} \ln \sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{-x(x^2+5)}{\operatorname{cotg} \left(-\frac{1}{x^7}\right) \ln \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{-x(x^2+5)}{-\operatorname{cotg} \frac{1}{x^7} \ln \sqrt[3]{x^2}} = \frac{x(x^2+5)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{x^7} \ln \sqrt[3]{x^2}} = f(x). \end{aligned}$$

Daná funkce je tedy sudá.

(249) Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sin x}$$

sudá, nebo lichá.

Řešení:

Spočtěme, čemu se rovná $f(-x)$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) + 1}{\sin(-x)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{-\sin x} = -\frac{x^2 + 2x + 1}{\sin x} \neq \pm f(x).$$

Daná funkce tedy není ani sudá, ani lichá.

(250) Rozhodněte o kladnosti a zápornosti funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)\, e^{\sin x}}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Řešení:

Funkce může změnit znaménko pouze ve svém nulovém bodě (protnutím osy x), nebo v bodech, kde není definována (přeskočením osy x). Proto nejprve určíme definiční obor dané funkce

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Nyní najdeme nulové body této funkce

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ \frac{(x-2)\, e^{\sin x}}{\operatorname{arccotg} x} &= 0, \\ (x-2)\, e^{\sin x} &= 0, \\ x - 2 &= 0, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Obdrželi jsme celkem dva intervaly, na nichž musíme zjistit znaménko funkce.

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

Daná funkce je tedy záporná (její graf je pod osou x) v intervalu $(-\infty, 2)$ a kladná (její graf je nad osou x) v intervalu $(2, \infty)$.

(251) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci

$$f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60.$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obor funkce $f(x)$. Je zřejmé, že platí $D(f) = \mathbb{R}$. Spočítáme první derivaci, tj.

$$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2 = 60x^2(x^2 - x - 2).$$

Nyní musíme určit definiční obor pro $f'(x)$, ten je očividně $D(f') = \mathbb{R}$, a stacionární body funkce $f(x)$, tedy musíme vyřešit rovnici $f'(x) = 0$. Proto

$$60x^2(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ nebo } x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$$

Tyto body nám rozdělí definiční obor rozdělí na čtyři intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$ a $(2, \infty)$, ve kterých zjistíme znaménka $f'(x)$. Podle těchto znamének určíme průběh funkce v jednotlivých intervalech a určíme případné extrémy. K tomu nám pomůže následující tabulka

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Odtud je vidět, že funkce $f(x)$ je rostoucí v intervalech $(-\infty, -1)$, a $(2, \infty)$, klesající v $(-1, 2)$. Funkce $f(x)$ má dva lokální extrémy, lokální maximum pro $x = -1$ a lokální minimum pro $x = 2$.

(252) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci

$$f(x) = x\,e^{-x^2}.$$

Řešení:

Stejným postupem jako v předchozím příkladě obdržíme

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2\,e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2) \quad \text{a} \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

Nyní určíme stacionární body funkce $f(x)$, proto

$$e^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ a } x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nyní se nám definiční obor funkce $f(x)$ rozpadl na tři intervaly, ve kterých určíme průběh funkce, tj.

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Tedy funkce $f(x)$ je rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a klesající v intervalech $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Také má dva lokální extrémy, konkrétně lokální minimum pro $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a lokální maximum pro $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(253) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci
$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x}.$$

Řešení:

Určíme potřebné definiční obory a derivaci $f(x)$, tj.
$$D(f) = (0,1) \cup (1,\infty), \quad f'(x) = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x}, \quad D(f') = (0,1) \cup (1,\infty).$$
Určíme stacionární body, proto
$$\frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} \quad \Rightarrow \quad x\,(2\ln x - 1) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ nebo } \ln x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = e^{\frac{1}{2}}.$$
Ovšem bod $x_1 \notin D(f)$, proto je stacionárním bodem pouze x_2. Nyní analyzujeme monotonii funkce $f(x)$, tj.

x	$(0,1)$	$\left(1, e^{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{1}{2}}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Tedy funkce $f(x)$ je klesající v intervalech $(0,1)$, a $(1,\sqrt{e})$, rostoucí v intervalu $(\sqrt{e},\infty)$ a s lokálním minimem pro $x = \sqrt{e}$.

(254) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci

$$f(x) = x - 2\sin x, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obory (ty jsou určeny již zadáním příkladu) a $f'(x)$, tj.

$$D(f) = (0, 2\pi), \quad f'(x) = 1 - 2\cos x, \quad D(f') = (0, 2\pi).$$

Najdeme stacionární body

$$1 - 2\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{3} \text{ a } x_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

A analyzujeme monotonii funkce $f(x)$

x	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$
sgn f'	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Funkce $f(x)$ je tedy rostoucí na intervalu $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ a klesající na intervalech $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$. Funkce má také dva lokální extrémy, lokální minimum pro $x = \frac{\pi}{3}$ a lokální maximum v bodě $x = \frac{5\pi}{3}$.

(255) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}.$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obory a $f'(x)$, tj.

$$D(f) = (0, \infty), \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(1 + \ln \frac{1}{x}\right), \quad D(f') = (0, \infty).$$

Najdeme stacionární body

$$-\frac{1}{x^2}\left(1 + \ln \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{1}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = e\,.$$

A analyzujeme monotonii funkce $f(x)$

x	$(0, e)$	(e, ∞)
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ je tedy rostoucí na intervalu (e, ∞) a klesající na intervalu $(0, e)$. Funkce má také lokální minimum pro $x = e$.

(256) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}.$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obory a $f'(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{x^2+4x+3}{e^x}, \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

Najdeme stacionární body

$$-\frac{x^2+4x+3}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x+1)(x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \text{ nebo } x = -3.$$

A analyzujeme monotonii funkce $f(x)$

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Funkce $f(x)$ je tedy rostoucí pro $x \in (-3, -1)$ a klesající pro $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$. Funkce má lokální minimum pro $x = -3$ a lokální maximum pro $x = -1$.

(257) Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}.$$

Řešení:

K analyzování chování tečen grafu funkce $f(x)$ použijeme postup analogický vyšetřování monotonie funkce s tím, že budeme zjišťovat znaménkové změny funkce $f''(x)$. Tedy, nejdříve určíme definiční obory a $f''(x)$, k čemuž pochopitelně potřebuje vypočítat i $f'(x)$ – tu ale již známe z příkladu 256, tedy

$$D(f) = \mathbb{R}, \ f'(x) = -\frac{x^2+4x+3}{e^x}, \ f''(x) = \frac{x^2+2x-1}{e^x}, \ D(f'') = \mathbb{R}.$$

Nyní určíme kritické body, což jsou řešení rovnice $f''(x) = 0$, tj.

$$\frac{x^2+2x-1}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1-\sqrt{2} \text{ a } x_2 = -1+\sqrt{2}.$$

Teď se nám definiční obor rozpadl na tři intervaly, ve kterých zjistíme jednotlivá znaménka $f''(x)$, tj.

x	$(-\infty, -1-\sqrt{2})$	$(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$	$(-1+\sqrt{2}, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ je konvexní v intervalech $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ a $(-1+\sqrt{2}, \infty)$, konkávní v intervalu $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ a má dva inflexní body pro $x = -1-\sqrt{2}$ a $x = -1+\sqrt{2}$.

(258) Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3.$$

<u>**Řešení:**</u>

K analyzování chování tečen grafu funkce $f(x)$ použijeme postup analogický vyšetřování monotonie funkce s tím, že budeme zjišťovat znaménkové změny funkce $f''(x)$. Tedy, nejdříve určíme definiční obory a $f''(x)$, k čemuž pochopitelně potřebuje vypočítat i $f'(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7,\ f''(x) = 12x^2 - 12x - 24,\ D(f'') = \mathbb{R}.$$

Nyní určíme kritické body, což jsou řešení rovnice $f''(x) = 0$, tj.

$$12x^2 - 12x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \text{ a } x_2 = -1.$$

Teď se nám definiční obor rozpadl na tři intervaly, ve kterých zjistíme jednotlivá znaménka $f''(x)$, tj.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ je konvexní v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$, konkávní v intervalu $(-1, 2)$. Funkce má dva inflexní body pro $x = -1$ a $x = 2$.

(259) Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce

$$f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obory a $f''(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - x^2\right),\ f''(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2 - 3\right),\ D(f'') = \mathbb{R}.$$

Nyní určíme kritické body, tj.

$$x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2 - 3\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ nebo } x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3} \text{ a } x_3 = -\sqrt{3}.$$

Teď se nám definiční obor rozpadl na čtyři intervaly, ve kterých zjistíme jednotlivá znaménka $f''(x)$, tj.

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ je konvexní v intervalech $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, \infty)$, konkávní v $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$. Funkce má tři inflexní body pro $x = 0, \pm\sqrt{3}$.

(260) Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3}.$$

<u>**Řešení:**</u>

Nejdříve určíme definiční obory a $f''(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}, \quad f''(x) = -\frac{6}{25\sqrt[5]{x^7}}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Rovnice

$$-\frac{6}{25\sqrt[5]{x^7}} = 0$$

nemá řešení. Ovšem druhá derivace neexistuje pro $x = 0$, proto nám tento bod rozdělí definiční obor funkce $f(x)$ na dva intervaly, proto

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

Funkce $f(x)$ je konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$ a konkávní na intervalu $(0, -\infty)$. Funkce má inflexní bod pro $x = 0$.

(261) Určete asymptoty bez směrnice funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Řešení:

Určíme definiční obor funkce $f(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

proto jediným možným bodem, kterým může vést asymptota bez směrnice je $x = 0$. Musíme ověřit limitní chování funkce $f(x)$ v tomto bodě, tj.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Proto existuje asymptota bez směrnice a je dána rovnicí $x = 0$.

(262) Určete asymptoty bez směrnice funkce

$$f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení:

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladě. Určíme definiční obor funkce $f(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

proto jediným možným bodem, kterým může vést asymptota bez směrnice je $x = 0$. Musíme ověřit limitní chování funkce $f(x)$ v tomto bodě, tj.

$$\lim_{x \to 0} \left(5x + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Proto asymptota bez směrnice neexistuje.

(263) Určete asymptoty v $\pm\infty$ funkce

$$f(x) = \frac{3x^2}{x-1}.$$

Řešení:

K určení rovnice asymptoty se směrnicí budeme postupovat dle daných vzorců, proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{1-\frac{1}{x}} = 3,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 3x^2 + 3x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3.$$

Při výpočtu jsme využili možnost nerozlišovat, zda limitu počítáme v $+\infty$ nebo $-\infty$ (toto samozřejmě v některých případech není možné a asymptoty se mohou lišit). Proto rovnice asymptoty se směrnicí je v obou směrech rovna $y = 3x + 3$.

(264) Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}.$$

Řešení:

Nejdříve se zaměříme na asymptoty bez směrnice. Proto nejdříve určíme definiční obor

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}.$$

V „dírách" definičního oboru vypočítáme jednostranné limity, tj.

$$\lim_{x\to 2} \frac{4+x^3}{4-x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{4+x^3}{(2-x)(2+x)} = \begin{cases} +\infty, & x \to 2^-, \\ -\infty, & x \to 2^+, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{4+x^3}{4-x^2} = \lim_{x\to -2} \frac{4+x^3}{(2-x)(2+x)} = \begin{cases} +\infty, & x \to -2^-, \\ -\infty, & x \to -2^+. \end{cases}$$

Funkce $f(x)$ má tedy dvě asymptoty bez směrnice o rovnicí $x = 2$ a $x = -2$. Nyní určíme asymptoty se směrnicí, tj.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4+x^3}{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+x^3}{4x-x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x^3}+1}{\frac{4}{x^2}-1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4+x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+x^3+4x-x^3}{4-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}}{\frac{4}{x^2}-1} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má asymptotu se směrnicí o rovnici $y = -x$.

(265) Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

Řešení:

Nejdříve se zaměříme na asymptoty bez směrnice. Proto nejdříve určíme definiční obor

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Vypočítáme jednostranné limity v -1, tj.

$$\lim_{x\to -1} \frac{e^x}{x+1} = \begin{cases} +\infty, & x \to -1^+, \\ -\infty, & x \to -1^-, \end{cases}$$

Funkce $f(x)$ má tedy asymptotu bez směrnice o rovnici $x = -1$. Nyní určíme asymptoty se směrnicí, tj.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x}{x^2+x} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2+x} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x+1} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty, \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+x} = 0. \end{cases}$$

V dalším nás tedy zajímá pouze směr do $-\infty$, proto

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má asymptotu se směrnicí pouze ve směru $-\infty$ o rovnici $y = 0$.

(266) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x^2-1\neq 0$. Proto máme
$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodech nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned obdržíme
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^3}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty.$$

iii) Poněvadž platí
$$f(-x)=\frac{-x^3}{x^2-1}=-f(x),$$
je zadaná funkce lichá (to nám usnadnění kreslení grafu). Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.
$$f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0.$$
Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
sgn f	$-$	$+$	$-$	$+$
f	záporná	kladná	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.
$$f'(x)=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2},\qquad D(f')=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.
$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2\left(x^2-3\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=0,\ x_2=\sqrt{3},\ x_3=-\sqrt{3},$$

x	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},-1\right)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$\left(1,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},\infty\right)$
sgn f′	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má lokální maximum pro $x=-\sqrt{3}$ a lokální minimum pro $x=\sqrt{3}$. Ve význačných bodech (lok. extrémy, infl. body) je vhodné znát i jejich funkční hodnotu, proto spočítáme $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ a $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}, \qquad D(f'') = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\left(x^2+3\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ má tedy v bodě $x=0$ inflexní bod. Z předchozího již víme, že $f(0)=0$. V inflexním bodě určíme ještě směrnici tečny, tj. $f'(0)=0$, což znamená, že tečna je v tomto bodě rovnoběžná s osou x.

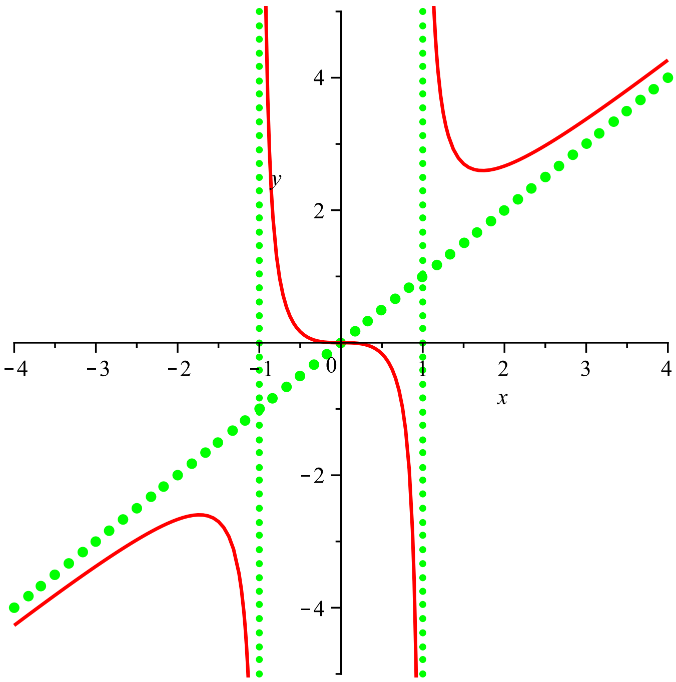
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má dvě asymptoty bez směrnice o rovnicích $x=1$ a $x=-1$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y=x$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 17. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 266.

(267) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x+1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodu nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to-1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$

není zadaná funkce ani lichá, ani sudá (což je vidět už z nesymetrie definičního oboru). Vzhledem k definičnímu oboru je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
sgn f	$+$	$-$	$-$
f	kladná	záporná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2-2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
sgn f′	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Z tabulky vidíme, že funkce má v $x=-2$ lokální minimum a v $x=0$ lokální maximum. Spočtěme v těchto význačných bodech funkční hodnotu.

$$f(-2) = 4, \qquad f(0) = 0.$$

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x-2}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 0,$$

což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod. Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

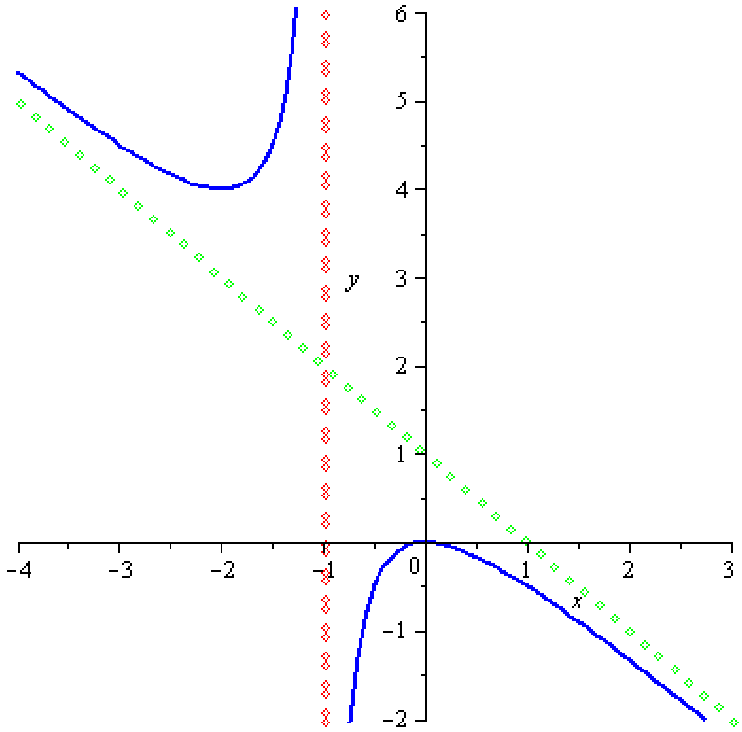
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má jednu asymptotu bez směrnice o rovnici $x = -1$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} = -\frac{x^2}{x^2+x} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v $+\infty$ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + 1$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 18. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 267.

(268) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna kladná reálná čísla, tedy

$$D(f) = (0, \infty).$$

ii) Zjistíme limitní chování na okraji definičního oboru

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} + \ln x \;\Big|\, \infty - \infty \,\Big| = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} \left| \begin{array}{c} \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} -x = 0 \\ \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} = \frac{1+0}{0} \end{array} \right| = \infty.$$

iii) Vzhledem k tvaru definičního oboru je zřejmé, že zadaná funkce není ani lichá, ani sudá, ani periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ \frac{1}{x} + \ln x &= 0, \\ \ln x &= -\frac{1}{x}, \\ \ln x^x &= -1, \end{aligned}$$

kde použité úpravy jsou vzhledem k oboru hodnot korektní. Protože $\ln x^x > 0$, daná funkce nemá žádný nulový bod a je tedy na celém svém definičním oboru buď pouze kladná, nebo pouze záporná (zdůrazněme, že definiční obor je „bez děr“). Tedy

x	$(0, \infty)$
sgn f	$+$
f	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1.$$

Připomeňme, že vše navíc probíhá na definičním oboru původní funkce, tj.

x	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
sgn f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = 1$ lokální minimum. Spočtěme v tomto význačném bodě funkční hodnotu.

$$f(1) = 1 + 0 = 1.$$

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-x^2+2x}{x^4} = \frac{2-x}{x^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2.$$

x	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

Čili funkce f má v $x=2$ inflexní bod. Funkční hodnota v něm je

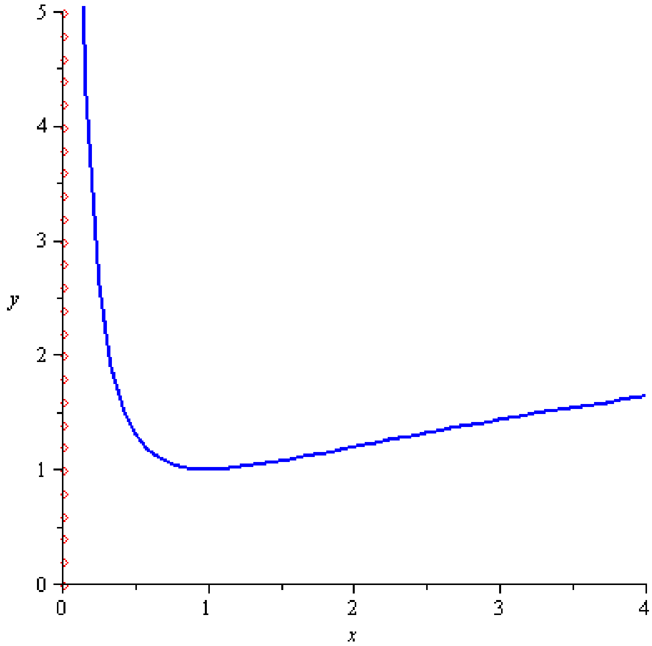
$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \doteq 1,19.$$

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má jednu asymptotu bez směrnice o rovnici $x=0$. Asymptotu se směrnicí má, opět vzhledem k definičnímu oboru, smysl hledat pouze v $+\infty$:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x\ln x}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$
$$\overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \ln x = \infty,$$

tedy funkce $f(x)$ asymptotu se směrnicí nemá.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 19. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 268.

(269) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1-2x}{3x^2}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $3x^2 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodu nespojitosti, tj.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-2x}{3} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = +\infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{1+2x}{3x^2},$$

není zadaná funkce lichá ani sudá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$	$+$	$-$
f	kladná	kladná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{2\,(x-1)}{3x^3}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má pro $x = 1$ lokální minimum s hodnotou $f(1) = -\frac{1}{3}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = -\frac{2\,(2x-3)}{3x^4}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(2x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2},$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má pro $x = \frac{3}{2}$ inflexní bod. Platí $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{8}{27}$ a směrnice tečny je rovna $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{81}$, což nám tentokrát náčrt grafu příliš neusnadní.

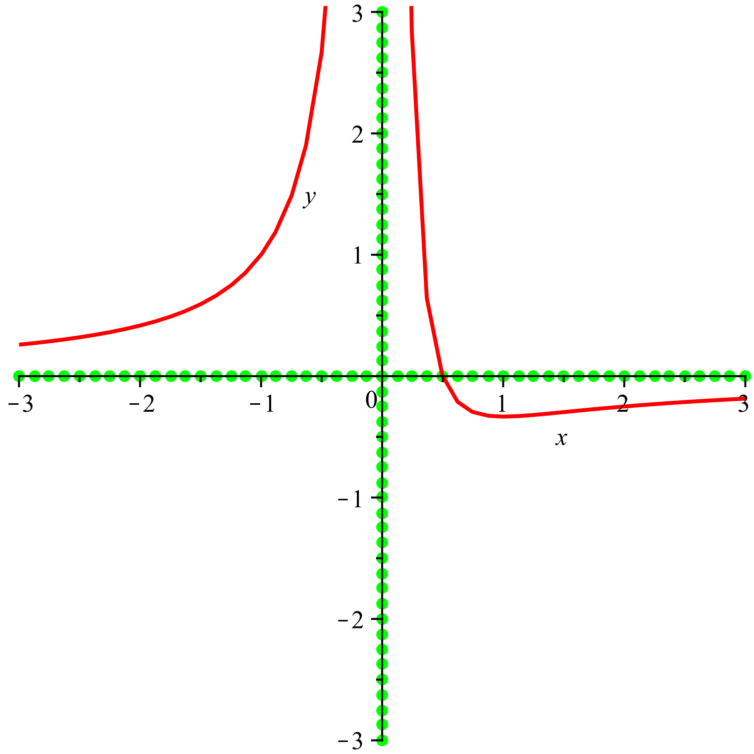
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1-2x}{3x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{3x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2}}{3} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}{3} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 20. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 269.

(270) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Z bodu ii) plyne, že funkce je spojitá v $\mathbb{R}$.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x),$$

je zadaná funkce sudá (to nám usnadnění kreslení grafu). Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$	$-$	$+$
f	kladná	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

V bodě lokálního minima $x = 0$ určíme funkční hodnotu, tj. $f(0) = -1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = -\frac{4\left(3x^2 - 1\right)}{(x^2 + 1)^3}, \qquad D(f'') = \mathbb{R}.$$

viii) Určíme inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má dva inflexní body $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ s hodnotami $f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ a $f'\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

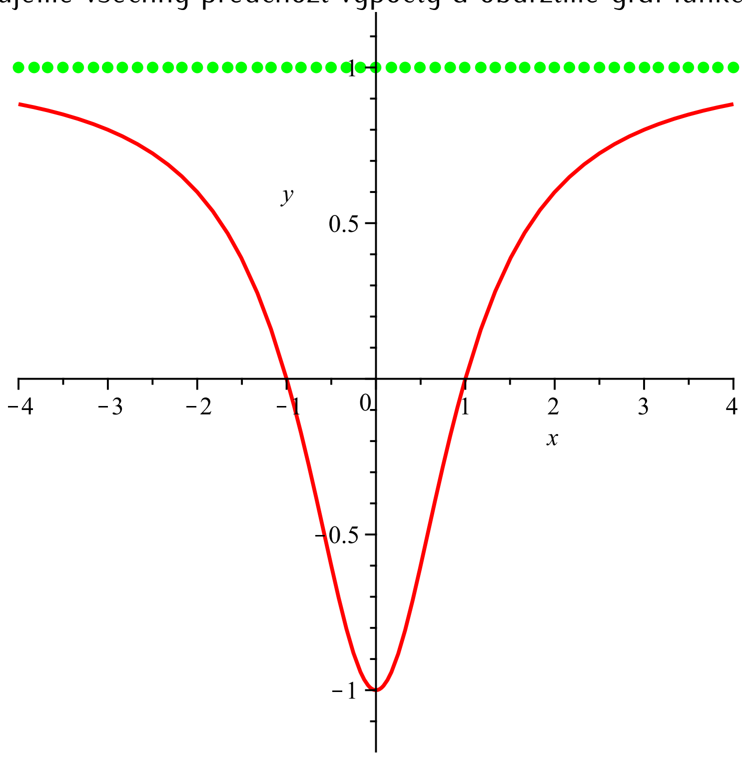
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty bez směrnice. Určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^3+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 1$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 21. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 270.

(271) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x^2-1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodech nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned obdržíme

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = -f(x),$$

je zadaná funkce sudá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Je zřejmé, že průsečíky s osou x neexistují (neboť rovnice $x^2+1=0$ nemá řešení). Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$	$-$	$+$
f	kladná	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

V bodě lokálního maxima $x=0$ určíme funkční hodnotu, tj. $f(0) = -1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{4\left(3x^2+1\right)}{(x^2-1)^3}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

viii) Funkce nemá kritické body (rovnice $3x^2+1=0$ nemá řešení). Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

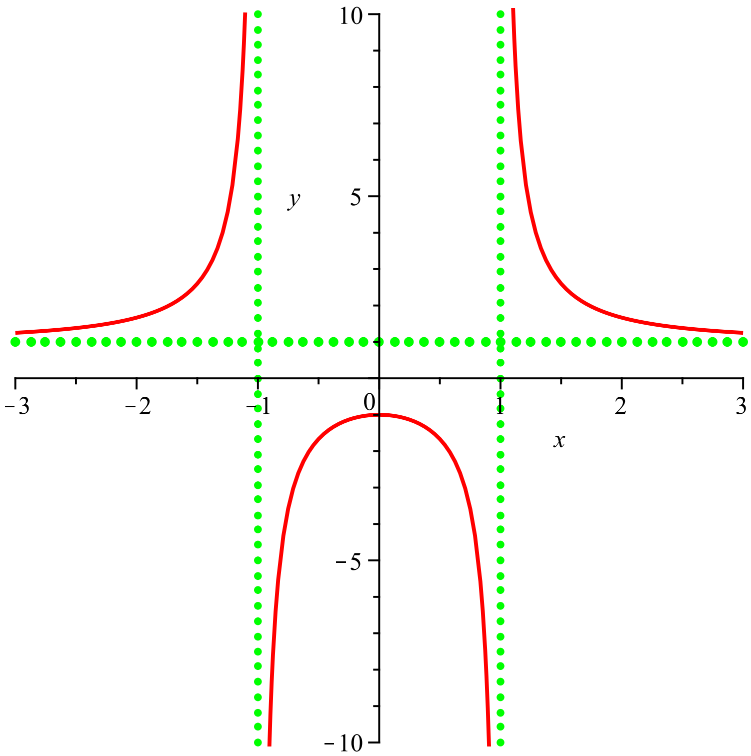
Je vidět, že funkce nemá inflexní body.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má dvě asymptoty bez směrnice o rovnicích $x=1$ a $x=-1$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}}=0,$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y=1$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 22. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 271.

(272) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x}{3-x^2}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $3-x^2 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodech nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned obdržíme

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \left(\frac{x}{\sqrt{3}+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}-x}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} \left(\frac{x}{\sqrt{3}+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}-x}\right) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = +\infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{-x}{3-x^2} = -f(x),$$

je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},\infty\right)$
sgn f	$+$	$-$	$+$	$-$
f	kladná	záporná	kladná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}.$$

vi) Je zřejmé, že funkce $f(x)$ nemá stacionární body. Určíme intervaly monotonie, tj.

x	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},\infty\right)$
sgn f′	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ tedy nemá žádný lokální extrém.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{2x\left(9+x^2\right)}{(3-x^2)^3}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\left(9 + x^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má inflexní bod pro $x = 0$. Z předchozího již víme, že $f(0) = 0$. Určíme zde ještě směrnici tečny, tj. $f'(0) = \frac{1}{3}$.

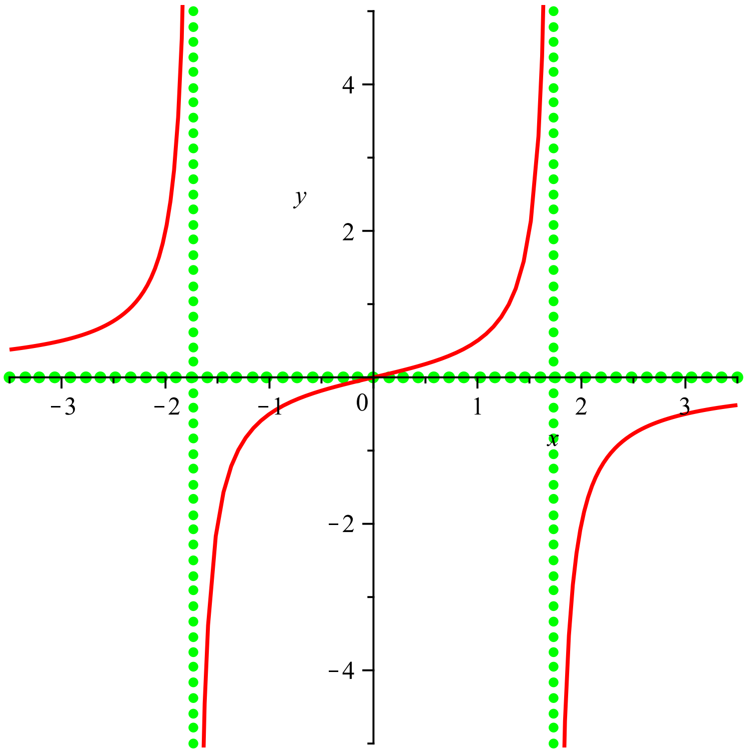
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má dvě asymptoty bez směrnice o rovnicích $x = \sqrt{3}$ a $x = -\sqrt{3}$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{3-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{3x - x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - 1} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{3 - x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 23. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 272.

(273) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R}\{0\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodě nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{1}{2}\left(-x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x),$$

je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1,$$

tedy funkce nemá průsečíky s osou x. Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1,$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Určíme funkčního hodnoty lokálního maxima pro $x = -1$ a minima pro $x = 1$, tj. $f(-1) = -1$ a $f(1) = 1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 0\}.$$

viii) Inflexní body očividně neexistují, určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ nemá inflexní bod.

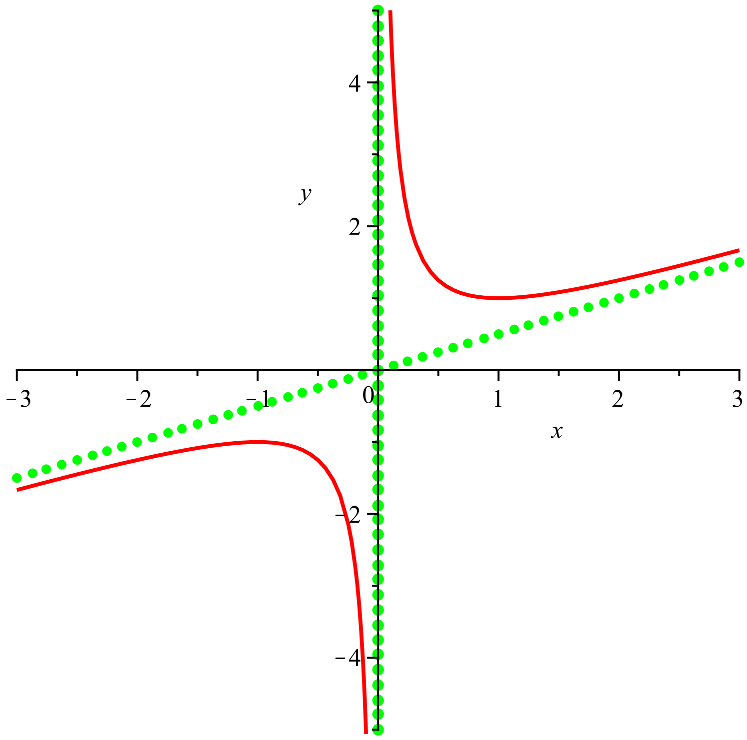
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má asymptotu se směrnicí o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{2x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = \frac{x}{2}$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 24. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 273.

(274) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x^2 - 1 \neq 0$. Proto máme
$$D(f) = (0, \infty)\,.$$

ii) Zjistíme limitní chování v levém krajním bodě definičního oboru, tj.
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

iii) Definiční obor funkce $f(x)$ není symetrický, proto funkce $f(x)$ ani nemůže být lichá nebo sudá. Navíc, je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.
$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad D(f') = (0, \infty)\,.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e,$$

x	$(0,e)$	(e,∞)
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

Pro $x = e$ má funkce $f(x)$ lokální maximum s funkční hodnotou $f(e) = \frac{1}{e}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor
$$f''(x) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}, \quad D(f'') = (0, \infty)\,.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\frac{3}{2}},$$

x	$\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

V bodě $x = e^{\frac{3}{2}}$ má funkce $f(x)$ inflexní bod. Platí $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ a směrnice tečny je rovna $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2e^3}$, což nám tentokrát náčrt grafu příliš neusnadní.

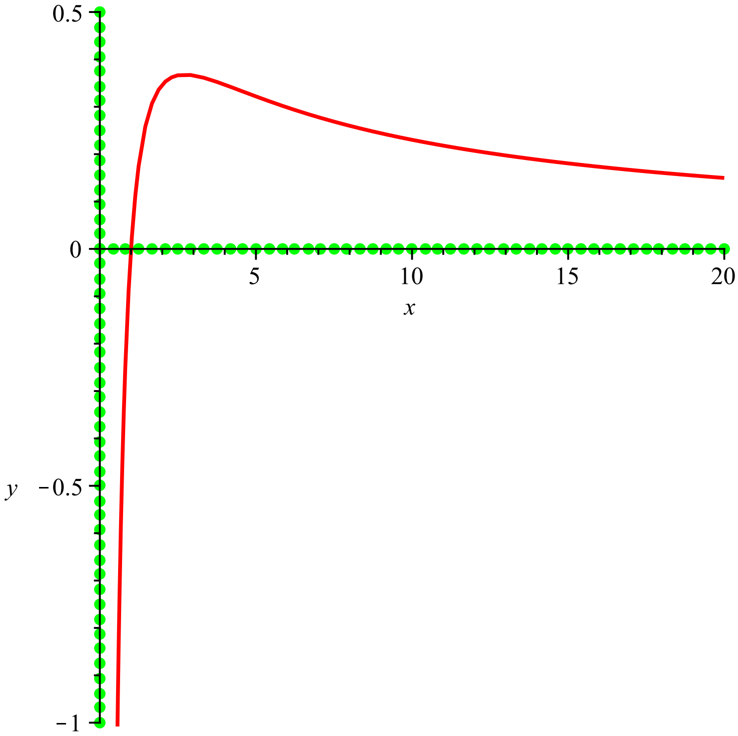
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptotu se směrnicí (pokud existuje – směr pro $x \to -\infty$ nemá smysl uvažovat), proto

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{x} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 25. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 274.

(275) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{\ln x^2}{x}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x \neq 0$. Proto máme
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodě nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned dostaneme
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x^2}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln x^2}{x} = +\infty.$$

iii) Poněvadž platí
$$f(-x) = \frac{\ln x^2}{-x} = -\frac{\ln x^2}{x} = -f(x),$$
je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$
Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
sgn f	$-$	$+$	$-$	$+$
f	záporná	kladná	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.
$$f'(x) = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm e,$$

x	$(-\infty, -e)$	$(-e, 0)$	$(0, e)$	(e, ∞)
sgn f′	$-$	$+$	$+$	$-$
f	↘	↗	↗	↘

Funkce $f(x)$ ma lokální minimum pro $x = -e$ a lokální maximum pro $x = e$ s funkčními hodnotami $f(-e) = -\frac{2}{e}$ a $f(e) = \frac{2}{e}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor
$$f''(x) = \frac{2\ln x^2 - 6}{x^3}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = e^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm e^{\frac{3}{2}},$$

x	$\left(-\infty, -e^{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(-e^{\frac{3}{2}}, 0\right)$	$\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ má tři inflexní body pro $x = \pm e^{\frac{3}{2}}$ a $x = 0$. Vypočítáme funkční hodnoty a směrnice tečen, proto $f\left(-e^{\frac{3}{2}}\right) = -3\,e^{-\frac{3}{2}}$, $f'\left(-e^{\frac{3}{2}}\right) = 5\,e^{3}$, $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = 3\,e^{-\frac{3}{2}}$, $f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -e^{-3}$.

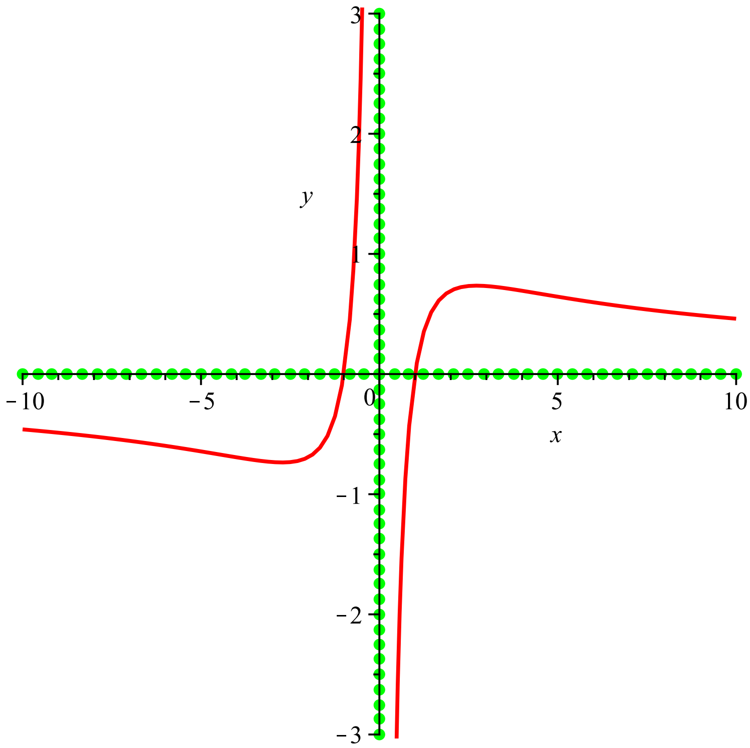
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\ln x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} \;\Big|\, \tfrac{\infty}{\infty} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{2x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln x^2}{x} \;\Big|\, \tfrac{\infty}{\infty} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{1} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 26. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 275.

(276) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x - \ln x.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $\ln x$ existuje. Proto máme

$$D(f) = (0, \infty)\,.$$

ii) Zjistíme limitní chování v levém krajním bodě definičního oboru, proto

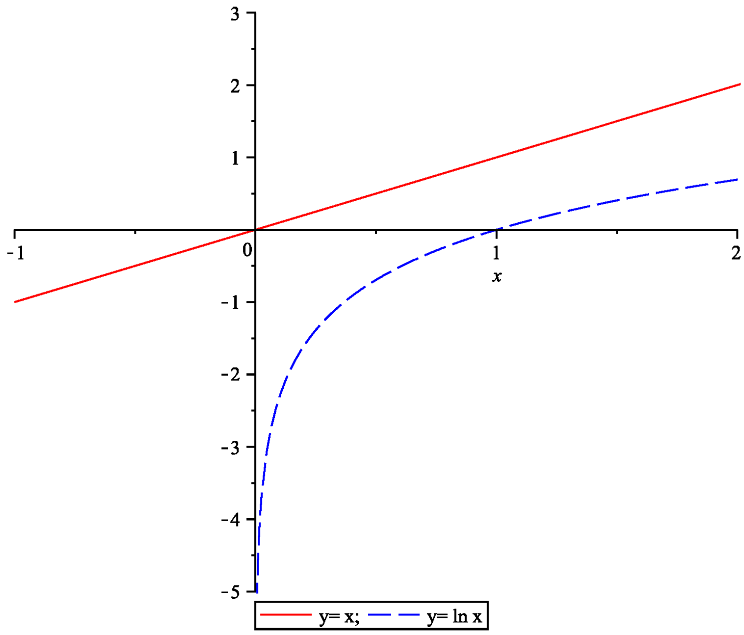
$$\lim_{x \to 0^+} (x - \ln x) = \infty.$$

iii) Definiční obor není symetrický, proto funkce $f(x)$ nemůže být sudá ani lichá. Navíc, je zřejmé, že funkce není ani periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln x.$$

Pokud si vzpomenete na grafy elementárních funkcí, viz



je zřejmé, že funkce $f(x)$ nemá žádné průsečíky s osou x, proto

x	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$
f	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

x	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Určíme hodnotu lokálního minima, tj. $f(1) = 1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

viii) Kritické body neexistují, určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(0,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$
f	$\cup$

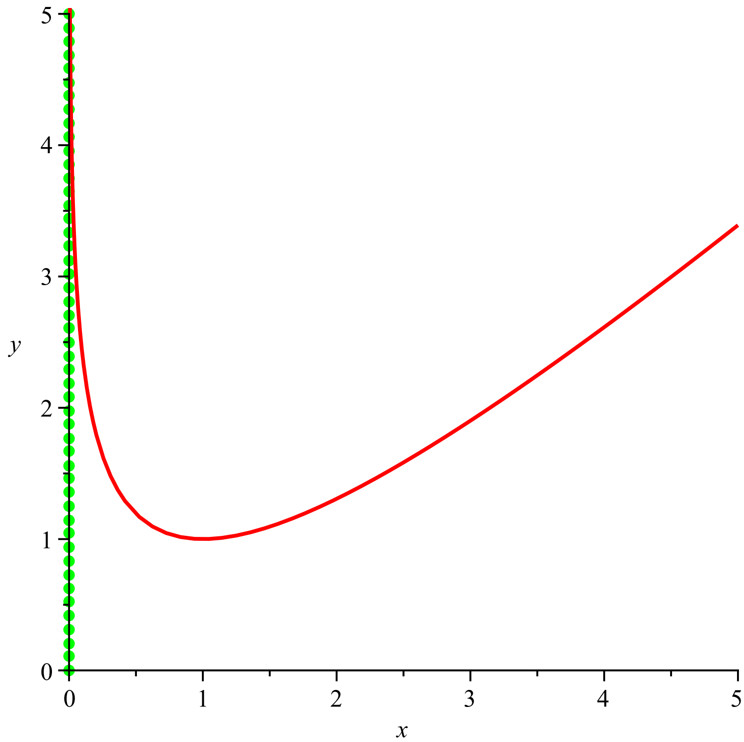
Je tedy zřejmé, že funkce $f(x)$ nemá inflexní bod.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptotu se směrnicí (směr pro $x \to -\infty$ nemá smysl), proto

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \ln x}{x} \left| \tfrac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (x - \ln x - x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Funkce $f(x)$ tey nemá asymptotu se směrnicí.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 27. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 276.

(277) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

v intervalu $x \in [0, 2\pi]$.

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Základní rámec definičního oboru je již dán zadáním příkladu. Dále musí platit

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0 \text{ a současně } \sin x \neq 1.$$

Řešení druhé rovnice dostaneme ihned, tj. $x \neq \frac{\pi}{2}$ (stále platí $x \in [0, 2\pi]$). První rovnici rozdělíme do dvou možností

$$\begin{array}{lcr} 1+\sin x > 0 \ \wedge \ 1-\sin x > 0 & \text{nebo} & 1+\sin x < 0 \ \wedge \ 1-\sin x < 0, \\ \sin x > -1 \ \wedge \ \sin x < 1 & \text{nebo} & \sin x < -1 \ \wedge \ \sin x > 1, \\ x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \ \wedge \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] & \text{nebo} & \text{soustava nemá řešení.} \end{array}$$

Tedy definiční obor zadané funkce je

$$D(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

ii) Určíme hodnoty v krajních bodech definičního oboru, tj. $f(0) = 0$ a $f(2\pi) = 0$. Také zjistíme limitní chování v bodech nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = -\infty.$$

iii) Vzhledem k definičními oboru není funkce $f(x)$ sudá, lichá ani periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\sin x = 1-\sin x \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sgn f	+	+	−	−
f	kladná	kladná	záporná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad D(f') = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

vi) Stacionární body neexistují, nyní určíme intervaly monotonie, tj.

x	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sgn f′	+	−	+
f	↗	↘	↗

Zadaná funkce tedy nemá žádné lokální extrémy.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad D(f'') = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

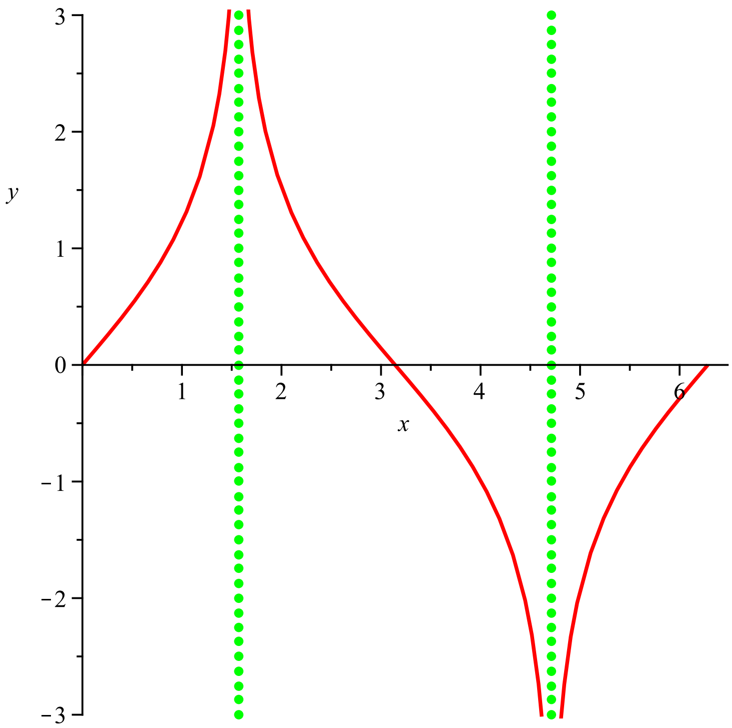
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi.$$

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$

Je zřejmé, že kritické body $x_1 = 0$ a $x_3 = 2\pi$ nemohou být inflexními body. Určíme funkční hodnotu a směrnici tečny v inflexním bodě $x = \pi$, tj. $f(\pi) = 0$ a $f'(\pi) = -1$.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má dvě asymptoty bez směrnice o rovnicích $x = \frac{\pi}{2}$ a $x = \frac{3\pi}{2}$. Poněvadž jsme na omezeném intervalu, nemá smysl uvažovat asymptoty se směrnicí.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 28. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 277.

(278) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x)=x\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla, tj.
$$D(f)=\mathbb{R}.$$

ii) Funkce $f(x)$ je spojitá v celém definičním oboru.

iii) Poněvadž platí
$$f(-x)=-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}=-f(x),$$
je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.
$$f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0.$$
Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.
$$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-x^2\right),\quad D(f')=\mathbb{R}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.
$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm 1,$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Funkce $f(x)$ má lokální minimum pro $x=-1$ a lokální maximum $x=1$ s funkčními hodnotami $f(-1)=-\,e^{-\frac{1}{2}}$ a $f(1)=e^{-\frac{1}{2}}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor
$$f''(x)=x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2-3\right),\quad D(f'')=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.
$$f''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\left(x^2-3\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=0,\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3=\sqrt{3}.$$

x	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},\infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ má tři inflexní body pro $x = \pm\sqrt{3}$ a pro $x = 0$. Určíme funkční hodnoty a směrnice tečen v inflexních bodech, proto $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}\,e^{-\frac{3}{2}}$, $f'\left(-\sqrt{3}\right) = -2\,e^{-\frac{3}{2}}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\,e^{-\frac{3}{2}}$ a $f'\left(\sqrt{3}\right) = -2\,e^{-\frac{3}{2}}$.

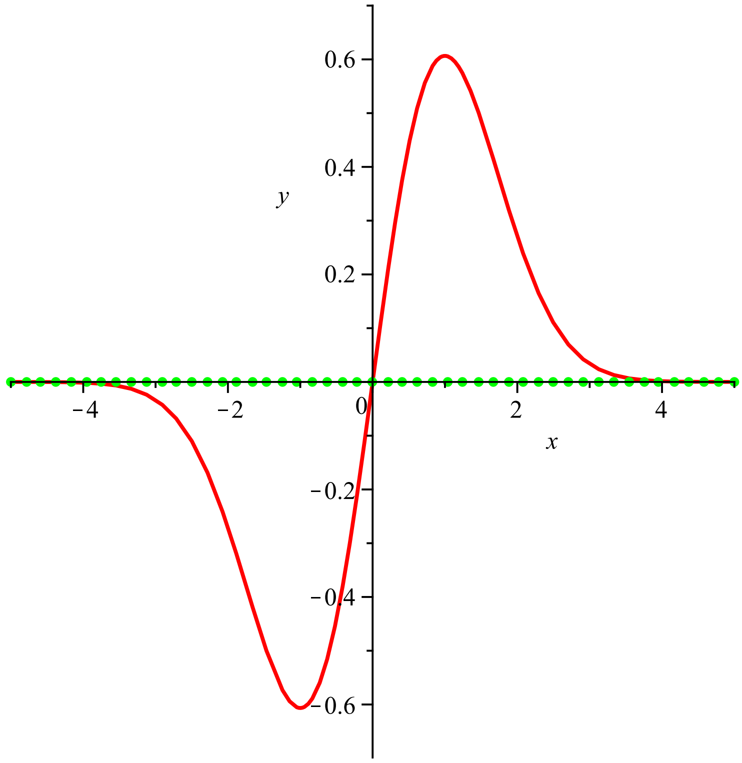
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty se směrnicí. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\,e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} \;\left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x\,e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má tedy asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 29. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 278.

(279) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Je zřejmé, že funkce $f(x)$ je spojitá v $\mathbb{R}$.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = -x - \operatorname{arctg}(-x) = -(x - \operatorname{arctg} x) = -f(x)$$

je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určit průsečíky s osou x není snadné, zřejmě

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Existence dalších nulových bodů můžeme vyloučit, neboť v bodě vi) ukážeme, že funkce je stále rostoucí. Proto obdržíme

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ tedy nemá lokální extrémy.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^3}, \qquad D(f'') = \mathbb{R}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ má tedy inflexní bod pro $x = 0$. Z předchozího již víme, že $f(0) = 0$. V inflexním bodě určíme ještě směrnici tečny, tj. $f'(0) = 0$, což znamená, že tečna je v tomto bodě rovnoběžná s osou x.

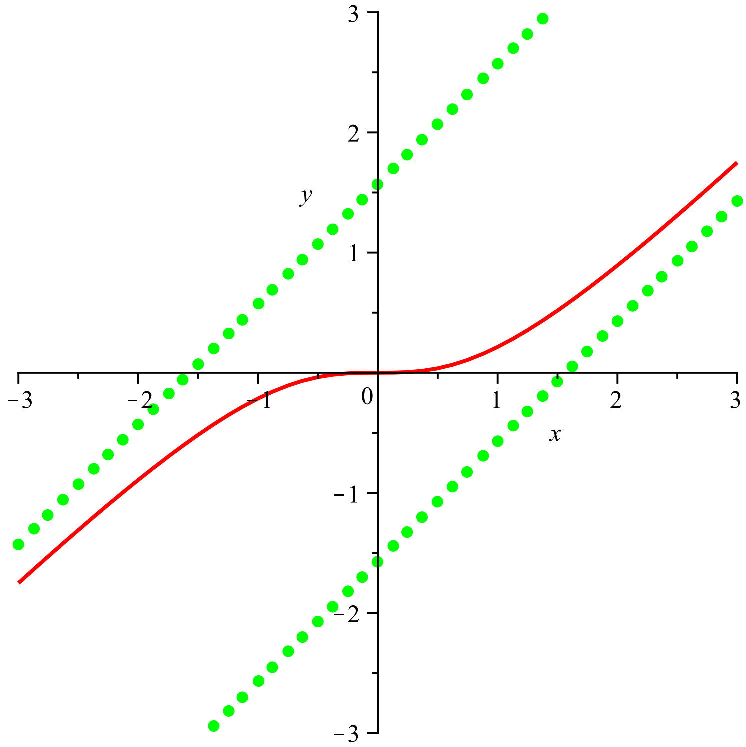
ix) Asymptoty bez směrnice neexistují, určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} \;\Big|\, \tfrac{\infty}{\infty} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (x - \operatorname{arctg} x - x) = - \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Funkce $f(x)$ má tedy dvě asymptoty se směrnicí. Pro $x \to -\infty$ je dána rovnicí $y = x + \frac{\pi}{2}$ a pro $x \to +\infty$ máme $y = x - \frac{\pi}{2}$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 30. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 279.

(280) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$, tj. $0 \leq (x+1)^2$ a $0 \leq (x-1)^2$, vyhovují funkčnímu předpisu všechna reálná čísla, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Funkce $f(x)$ je spojitá v celém definičním oboru.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \arccos\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),$$

(zde jsme využili vztah $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$) není zadaná funkce lichá ani sudá (to zjistíme již z grafu elementární funkce $\arccos x$). Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$	$+$
f	kladná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2-1\right)}{|x^2-1| \cdot (x^2+1)}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

vi) Vzhledem k definičnímu oboru $f'(x)$ nemáme žádné stacionární body, určíme intervaly monotonie, tj.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ má lokální maximum pro $x = -1$ a lokální minimum $x = 1$ s hodnotami $f(-1) = \pi$ a $f(1) = 0$. V těchto bodech není první derivace definována, proto zde má graf funkce $f(x)$ hrot.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-4x\left(x^2-1\right)}{|x^2-1| \cdot (x^2+1)^2}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x\left(x^2-1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Funkce $f(x)$ má tři inflexní body pro $x = \pm 1$ a $x = 0$. Určíme potřebné funkční hodnoty a směrnice tečen, tj. $f(-1) = \pi$, $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = 1$, $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = -1$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -1$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 1$.

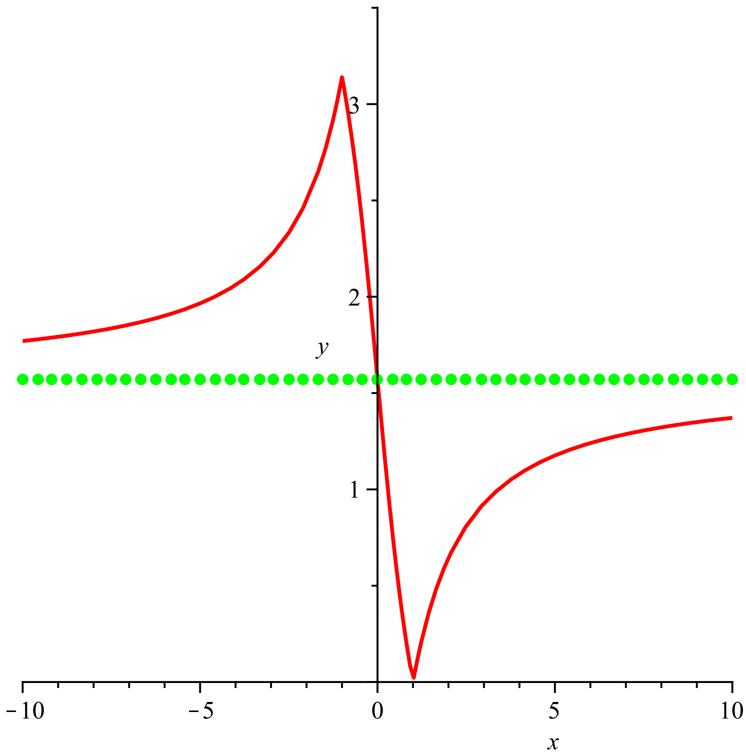
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty bez směrnice. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{x} \left| \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} \right| = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Funkce $f(x)$ má tedy asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = \frac{\pi}{2}$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 31. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 280.

(281) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Je zřejmé, že funkce $f(x)$ je spojitá v $\mathbb{R}$.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \sqrt[3]{2x^2 + x^3} = -\sqrt[3]{-2x^2 - x^3}$$

není zadaná funkce ani sudá ani lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(2-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$	$+$	$-$
f	kladná	kladná	záporná

Ze změny znamének je vidět, že v bodě $x = 0$ je pouze bod dotyku osy x nikoli její průsečík.

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(4 - 3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{3},$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Funkce $f(x)$ má lokální minimum pro $x = 0$ a lokální minimum pro $x = \frac{4}{3}$ s hodnotami $f(0) = 0$ a $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$. Navíc, v bodě $x = 0$ není první derivace definována, bude mít graf funkce v tomto bodě hrot.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = -\frac{8}{9(2-x)\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

viii) Druhá derivace nemá nulový bod, určíme tedy intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cap$	$\cup$

V bodě $x = 2$ má funkce $f(x)$ inflexní body. Z předchozího již víme, že $f(2) = 0$. V inflexním bodě určíme ještě směrnici tečny, ovšem $f'(2)$ neexistuje. Z výpočtu $\lim_{x\to 2} f'(x) = -\infty$ plyne, že tečna je v tomto bodě rovnoběžná s osou y.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty bez směrnice. Určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2x^2 - x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{\frac{2}{x} - 1}{1}} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right) \left| -\infty + \infty \right| =$$

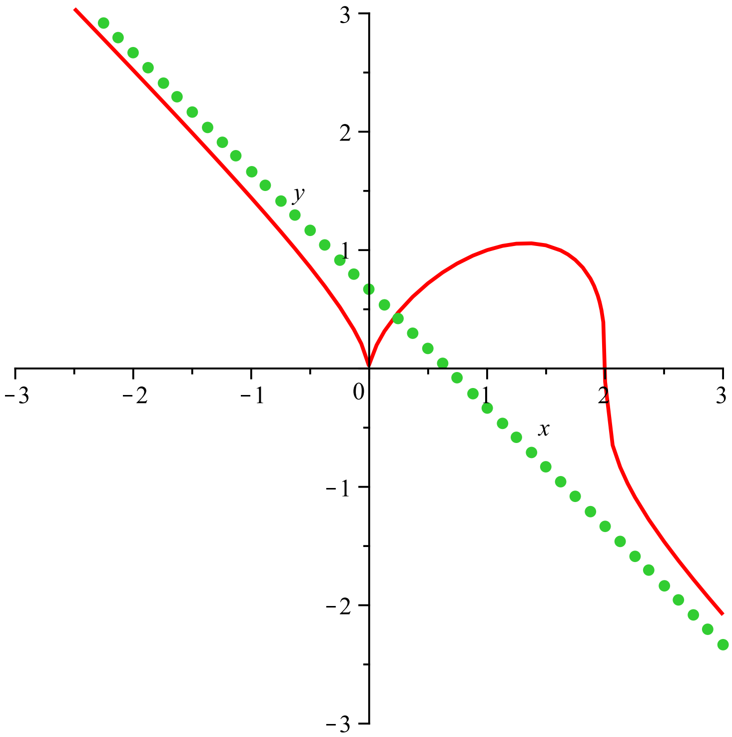
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}} + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}}}{\frac{1}{x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}} \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$\overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{3\left(\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{4}{3}} x^2}}{-\frac{1}{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3x^3\left(\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{4}{3}}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{-4 + 3x} = \frac{2}{3}$$

Funkce $f(x)$ má asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + \frac{2}{3}$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 32. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 281.

(282) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = 2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Zadaná funkce je spojitá v $\mathbb{R}$.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = 2(-x+1) - 3\sqrt[3]{(-x+1)^2}$$

není zadaná funkce lichá ani sudá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8(x+1)^3 = 27(x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = \frac{19}{8}.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,\frac{19}{8})$	$(\frac{19}{8},\infty)$
sgn f	$-$	$-$	$+$
f	záporná	záporná	kladná

Je tedy vidět, že v bodě $x = -1$ je pouze bod dotyku grafu funkce $f(x)$ a osy x.

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x+1}}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
sgn f′	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ má lokální maximum pro $x = -1$ a lokální minimum pro $x = 0$ s hodnotami $f(-1) = 0$ a $f(0) - 1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

viii) Je vidět, že kritické body neexistují. Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$+$
f	$\cup$	$\cup$

Funkce $f(x)$ tedy nemá inflexní bod.

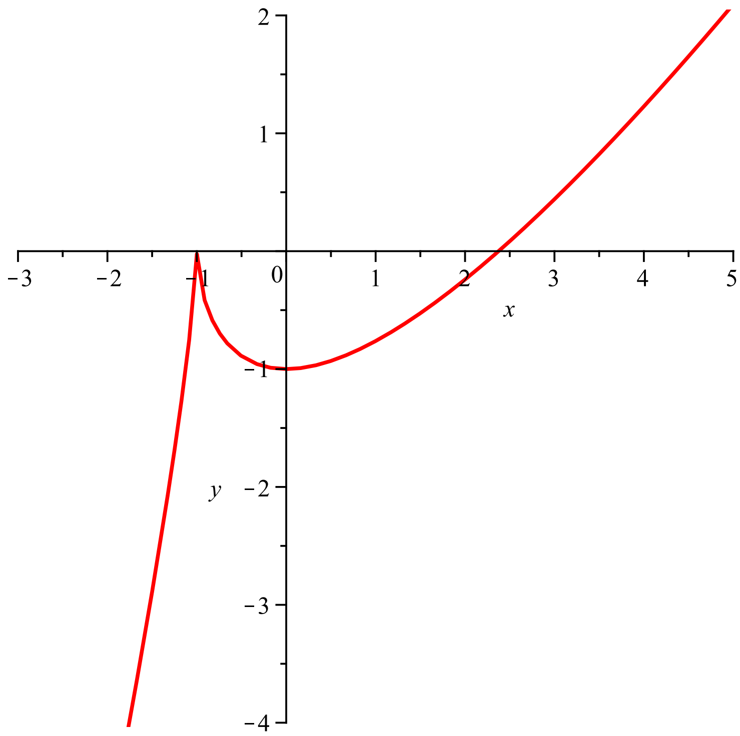
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty bez směrnice. Určíme nyní asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2(x+1)-3\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x}\ \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{2}{\sqrt[3]{x+1}}}{1}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2(x+1)-3\sqrt[3]{(x+1)^2}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-3\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)=-\infty.$$

Tedy funkce $f(x)$ nemá ani asymptoty se směrnicí.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 33. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 282.

(283) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos(2x)}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že
$$\cos 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$
Proto máme
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}.$$

ii) Spočítáme limitní chování v bodech nespojitosti (budeme uvažovat pouze interval $[-\pi, \pi]$, viz bod iii)), tj.
$$\lim_{x\to -\frac{3\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{3\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = -\infty.$$

iii) Poněvadž platí
$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\cos(-2x)} = \frac{\cos x}{\cos(2x)} = f(x),$$
je zadaná funkce sudá. Funkce $\cos x$ je periodická s periodou 2π a funkce $\cos(2x)$ je periodická s periodou π. Proto zadaná funkce $f(x)$ je periodická s periodou 2π. Při vyšetřování funkce se tudíž omezíme na libovolný interval délky 2π, my zvolíme interval $[-\pi, \pi]$

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{\pi}{2}.$$
Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\pi, -\frac{3\pi}{4})$	$(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$	$(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$
sgn f	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
f	záporná	kladná	záporná	kladná	záporná	kladná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.
$$f'(x) = \frac{\left(2\cos^2 x + 1\right)\sin x}{\cos(2x)}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2\cos^2 x + 1\right)\sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\pi,\ x_2 = 0,\ x_3 = \pi$$

x	$(\dots,-\pi)$	$\left(-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	$(\pi,\dots)$
sgn f'	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ má tedy v intervalu $[-\pi,\pi]$ lokální minima pro $x=\pm\pi$ a lokální maximum pro $x=0$ s hodnotami $f(-\pi)=-1$, $f(0)=1$, $f(\pi)=-1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x)=\frac{\left(11-4\cos^4 x-4\cos^2 x\right)\cos x}{\cos^3 2x},\qquad D(f'')=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}.$$

viii) Vypočítáme kritické body a

$$\begin{aligned} f''(x)=0 \quad &\Leftrightarrow\quad \left(11-4\cos^4 x-4\cos^2 x\right)\cos x=0\\ &\Leftrightarrow\quad \cos x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=-\frac{\pi}{2},\ x_2=\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

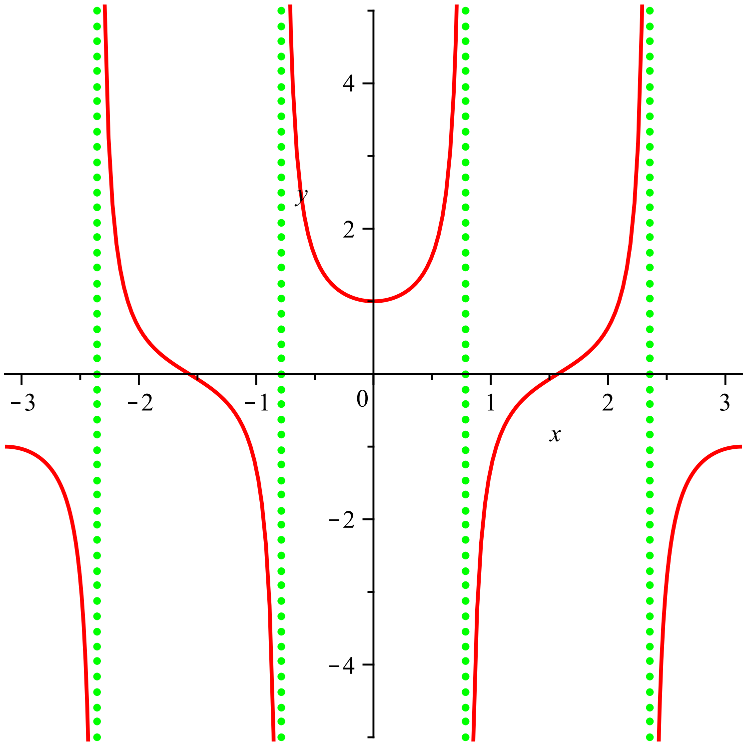
Rovnice $11-4\cos^4 x-4\cos^2 x=0$ nemá řešení, protože při použití substituce $y=\cos^2 x$, dostaneme rovnici $11-4y^2-4y=0$ s řešením $y_1=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}<0$ a $y_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}>1$, tedy řešení původní rovnice neexistuje (stejný výsledek dostaneme bez počítání s využitím faktu $-1\le\cos x\le 1$, potom totiž dostaneme $11-4\cos^4 x-4\cos^2 x\ge 3$). Nyní určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(\dots,-\pi)$	$\left(-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	$(\pi,\dots)$
sgn f''	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
f	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cap$

Funkce $f(x)$ má proto v intervalu $[-\pi,\pi]$ dva inflexní body pro $x=\pm\frac{\pi}{2}$. V inflexních bodech dopočítáme funkční hodnoty a směrnice tečen, tj. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má čtyři asymptoty bez směrnice o rovnicích $x=-\frac{3\pi}{4}$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$ a $x=\frac{3\pi}{4}$. Vzhledem k periodičnosti funkce $f(x)$ nemají asymptoty se směrnicí smysl.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 34. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 283.

I. 6. Aplikace diferenciálního počtu ve slovních úlohách

Definice 23. Buď funkce $f(x)$ definovaná na množině M. Existuje-li největší (nejmenší) hodnota funkce $f(x)$, nazýváme ji *absolutním maximem* (*absolutním minimem*) funkce $f(x)$ na M. Absolutní minima a maxima souhrnně nazýváme *absolutními extrémy*.

Jestliže tedy $x_0 \in M$ a platí $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce $f(x)$ má na M absolutní maximum v bodě x_0. Podobně pro absolutní minimum.

Poznámka 24. Funkce nabývá absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu (případně žádného globálního extrému nenabývá).

(284) Obdélník má obvod o, určete jeho strany a, b tak, aby jeho obsah byl maximální.

Řešení:

Ze zadání plyne, že platí

$$o = 2(a+b) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{o-2b}{2}.$$

Obsah obdélníku je roven $S = a \cdot b$, což můžeme pomocí předchozího vztahu vyjádřit jako funkci proměnné b, tj.

$$S(b) = \frac{o-2b}{2} \cdot b = \frac{o}{2} \cdot b - b^2,$$

pro niž hledáme maximum. Proto musí platit

$$S'(b) = \frac{o}{2} - 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{o}{4}.$$

Ověříme, že nalezený bod je skutečně maximem, tj.

b	$\left(0, \frac{o}{4}\right)$	$\left(\frac{o}{4}, \frac{o}{2}\right)$
$\operatorname{sgn} S'$	$+$	$-$
S	$\nearrow$	$\searrow$

Dopočítáme druhý rozměr obdélníku. Proto $a = \frac{o-2b}{2} = \frac{o}{4}$. Což znamená, že obdélník s maximálním obsahem při pevně zadaném obvodu je právě čtverec.

(285) Určete takové nenulové reálné číslo x, že jeho rozdíl s převrácenou hodnotou druhé mocniny tohoto čísla je maximální.

Řešení:

Ze zadání plyne, že hledáme maximum funkce

$$f(x) = x - \frac{1}{x^2}.$$

Proto musí platit

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt[3]{2}.$$

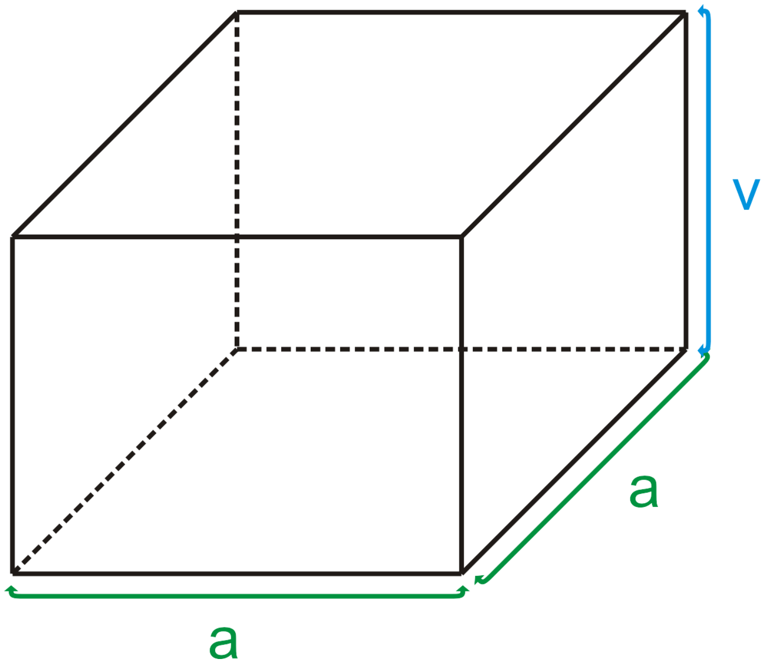
Z následující tabulky plyne, že nalezený bod je skutečně maximum, tj.

x	$\left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right)$	$\left(-\sqrt[3]{2}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

(286) Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu $32\,\mathrm{m}^3$ tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo minimum materiálu.

Řešení:

Mějme takovýto bazén



Potom ze zadaného objemu můžeme vyjádřit výšku bazénu, tj.

$$V = a^2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V}{a^2}.$$

Funkce určující obsah dna a stěn je

$$S = a^2 + 4 \cdot v \cdot a \quad \Rightarrow \quad S(a) = a^2 + \frac{4V}{a},$$

kterou chceme minimalizovat. To znamená, že

$$S'(a) = 2a - \frac{4V}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{2V} \quad \overset{V=32}{\Rightarrow} \quad a = 4, \; v = 2.$$

Získali jsem skutečně hledané minimu, neboť

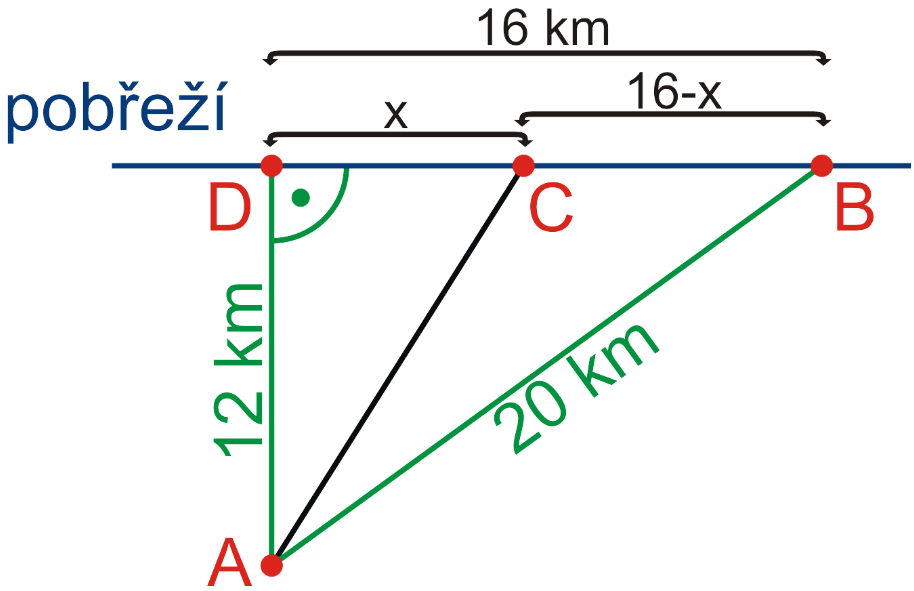
a	$(0,4)$	$(4,\infty)$
sgn S'	$-$	$+$
S	$\searrow$	$\nearrow$

Rozměry optimálního bazénu tedy jsou $4 \times 4 \times 2$.

(287) Muž v loďce je vzdálen 12 km od pobřeží (majícího tvar přímky). Chce se dostat co nejrychleji do místa na pobřeží, které je od něj vzdáleno 20 km. Rozhodněte, kde se má vylodit, víte-li, že dokáže veslovat rychlostí 6 km/h a po břehu se pohybovat rychlostí 10 km/h.

<u>**Řešení:**</u>

Situaci ze zadání lze znázornit takto



Přičemž bod A jeho výchozí pozice a bod C je místo vylodění, které může být v kterémkoli bodě na pláži, tj. v rozmezí bodů D až B včetně. Platí tedy

$$|AC|^2 = 12^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad |AC| = \sqrt{144 + x^2}.$$

Hledaný čas je součtem doby jízdy na lodi a dobou, kterou muž půjde po pláži, tj. (čas = $\frac{\text{dráha}}{\text{rychlost}}$)

$$t = t_1 + t_2 = \frac{|AC|}{6} + \frac{|CB|}{10} \quad \Rightarrow \quad t(x) = \frac{\sqrt{144 + x^2}}{6} + \frac{16 - x}{10}.$$

Standardním postupem najdeme stacionární bod(y), tj.

$$t'(x) = \frac{2x}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{144 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{6\sqrt{144 + x^2}} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 10x = 6\sqrt{144 + x^2} \quad \Rightarrow \quad 100x^2 = 36(144 + x^2) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 64x^2 = 5184 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 9$$

je zřejmé, že platí $x \in [0, 16]$, proto máme jediný stacionární bod $x = 9$ (hodnota $x = -9$ by odpovídala zrcadlové situaci na levé straně a dostali jsme ji díky použití neekvivalentní úpravy při řešení předchozí rovnice). Ověříme, zda jsme obdrželi skutečně extrém

x	$[0, 9)$	$(9, 16]$
$\operatorname{sgn} t'$	$-$	$+$
t	$\searrow$	$\nearrow$

Poněvadž hodnota x může nabývat i mezní hodnoty intervalu, našli jsme lokální(!) minimum. Musíme porovnat funkční hodnoty v lokálním minimu a v krajních bodech, tj.

$$t(9) = \frac{16}{5}, \quad t(0) = \frac{18}{5}, \quad t(16) = \frac{10}{3}.$$

Neboť platí $t(9) < t(16) < t(0)$, nalezli jsme globální minimum pro $x = 9$. Proto se muž musí vylodit ve vzdálenosti 7 km od cílového místa.

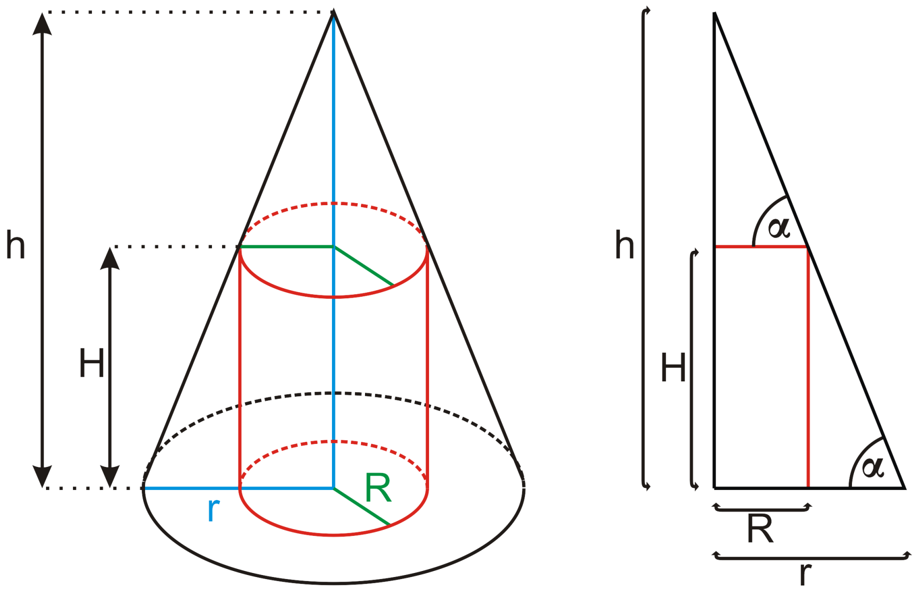
(288) Do rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce h vepište válec (s poloměrem R a výškou H), který má:

i) největší objem;

ii) největší obsah pláště.

Řešení:

i) Situaci znázorníme na obrázku



ze kterého plyne, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{r} = \frac{H}{r-R} = \frac{h-H}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{r} = \frac{H}{r-R} = \frac{h-H}{R} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{R}{h-H} = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{r(h-H)}{h}.$$

Protože objem válce je dán vztahem $V = \pi R^2 H$, získáme funkci proměnné H ve tvaru

$$V(H) = \pi\frac{r^2(h-H)^2}{h^2}H.$$

Nyní určíme stacionární body, tj.

$$V'(H) = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[2(h-H)\cdot(-1)H + (h-H)^2\right] =$$
$$= \frac{\pi r^2}{h^2}(h-H)\left[-2H + h - H\right] = \frac{\pi r^2}{h^2}(h-H)\left[-3H + h\right] = 0,$$

což dává dva stacionární body $H = h$ (tato hodnota ovšem dává válec s maximální možnou výškou a nulovým poloměrem, tedy není potřeba tento stacionární bod uvažovat) a $H = \frac{h}{3}$, který je skutečně hledaným maximem, neboť platí

H	$(0, \frac{h}{3})$	$(\frac{h}{3}, h)$
$\operatorname{sgn} V'$	$+$	$-$
V	$\nearrow$	$\searrow$

Našli jsme tedy válec o rozměrech $H = \frac{h}{3}$ a $R = \frac{r\left(h-\frac{h}{3}\right)}{h} = \frac{2r}{3}$ o maximálním objemu $V = \frac{4\pi r^2 h}{27}$.

ii) Obsah pláště válce je dán vztahem $Q = 2\pi RH$, což s využitím předchozích výpočtů znamená

$$Q(H) = 2\pi \frac{r(h-H)}{h} H.$$

Deriovováním

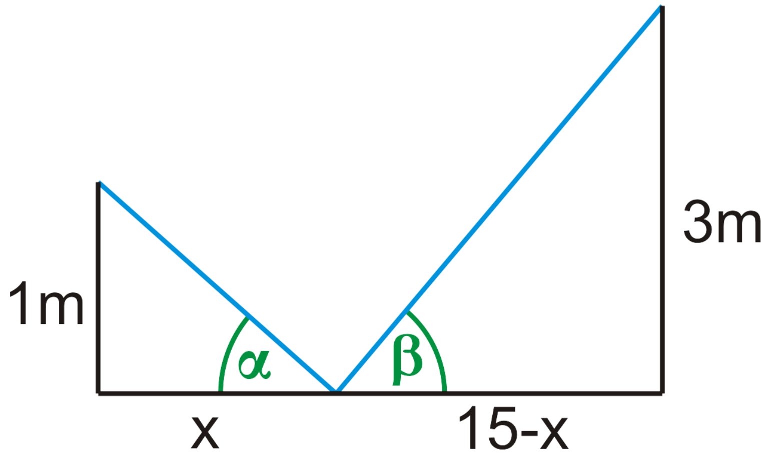
$$Q'(H) = \frac{2\pi r}{h}(h - 2H) = 0$$

najdeme stacionární bod, kterým je hodnota $H = \frac{h}{2}$ (jedná se skutečně o maximum). Hledaný válec má rozměry $H = \frac{h}{2}$ a $R = \frac{r}{2}$ a maximálním obsahu pláště $Q = \frac{\pi r h}{2}$.

(289) („Problém líného kosa“) Na plotě, jehož výška je 1 m, sedí kos. Ve vzdálenosti 15 m od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 m. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozsety žížaly. V jaké vzdálenosti od plotu má kos sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot → žížala → strom po přímkách a po nejkratší dráze?

Řešení:

Situaci znázorníme na obrázku (vzdálenost x je místo sezobnutí žížaly)



z něhož je patrné, že vzdálenost, kterou kos musí uletět, je dána funkcí

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(15-x)^2+9}.$$

Ve stacionárním bodě jistě platí

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x-30}{2\sqrt{(15-x)^2+9}} = 0,$$

a proto

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+9}} = \cos\beta.$$

To ovšem znamená, že $\alpha = \beta$. Nyní již z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$\frac{x}{1} = \frac{15-x}{3} \quad\Rightarrow\quad 3x = 15-x \quad\Rightarrow\quad x = 3,75.$$

Nalezený bod je skutečně minimum, neboť platí

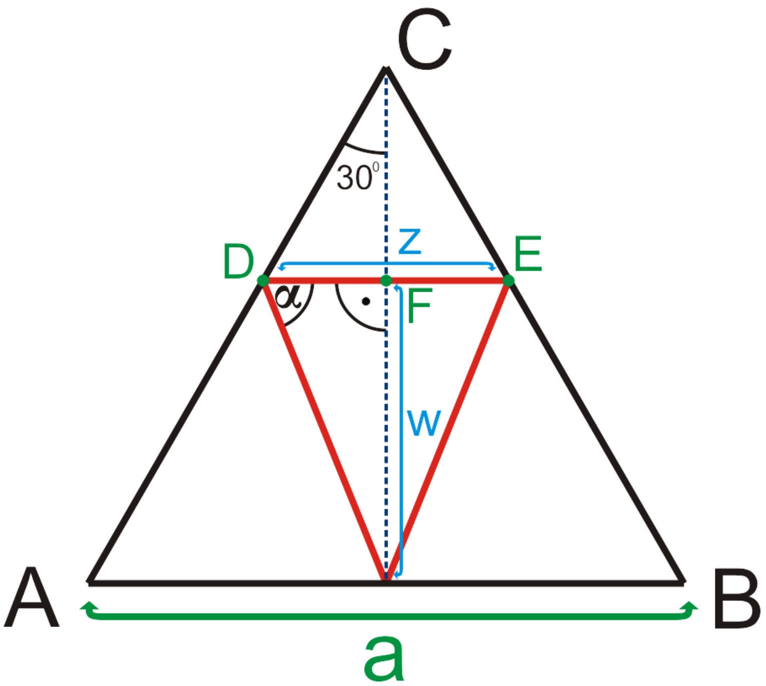
x	$(0;3,75)$	$(3,75;15)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Proto aby kos sezobnul žížalu a přitom urazil nejkratší dráhu, musí ji sezobnout 3,75m od plotu.

(290) Do rovnostranného trojúhelníku o straně a vepište rovnoramenný trojúhelník maximálního obsahu tak, aby vrchol proti jeho základně ležel ve středu strany rovnostranného trojúhelníku.

Řešení:

Znázorníme si oba trojúhelníky na obrázku



Je známo, že v rovnostranném trojúhelníku platí $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, z čehož plyne $|CF| = v - w = \frac{\sqrt{3}}{2}a - w$. Proto můžeme v trojúhelníku CDF spočítat

$$\operatorname{tg} 30 = \frac{\frac{z}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - w} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{2} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}w.$$

Proto můžeme obsah hledaného trojúhelníku vyjádřit pomocí w ve tvaru

$$S(w) = \frac{zw}{2} = \frac{aw}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}w^2.$$

Nyní najdeme stacionární bod

$$S'(w) = \frac{a}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{3a}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{4}.$$

Nalezli jsme skutečně maximum, viz

w	$\left(0, \frac{\sqrt{3}a}{4}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}a}{4}, v\right)$
sgn S'	$+$	$-$
S	$\nearrow$	$\searrow$

Dopočítáme druhý rozměr trojúhelníku

$$z = 2\left(\frac{a}{2} - \frac{3}{12}a\right) = \frac{a}{2}.$$

Ještě musíme ověřit, že nalezený trojúhelník je rovnoramenný, to ovšem plyne z výpočtu

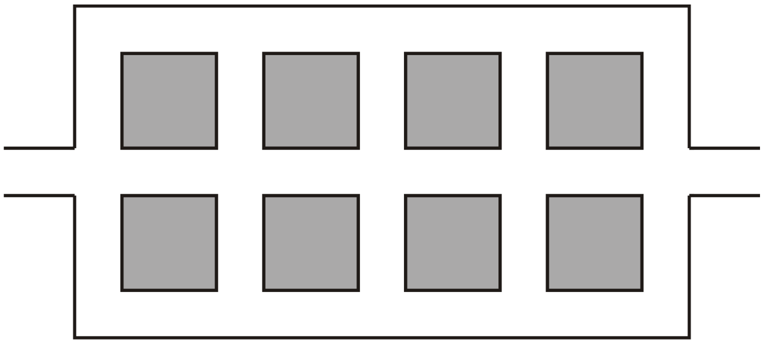
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w}{\frac{z}{2}} = \frac{2w}{z} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ.$$

Tedy, hledaný trojúhelník má výšku $\frac{\sqrt{3}a}{4}$ a délku strany $\frac{a}{2}$.

(291) Váš přítel, pozemní inženýr, se na Vás obrátil s prosbou o pomoc. Dostal za úkol vyprojektovat uprostřed pozemku tvaru čtverce o straně 1,5 km 8 sousedících parcel určených ke stavbě luxusních vil. Parcely musí být obdélníkové, ve dvou řadách po čtyřech a výměra každé z nich musí činit 120 arů (tj. celkem 960 arů). Kolem každé parcely musí Váš přítel nechat postavit cesty. Přitom dlouhá spojovací cesta mezi řadami po čtyřech bude na obě strany vyvedena mimo pozemek a napojena na silniční síť oblasti. Tyto napojovací cesty budou financovány plně z fondu EU, takže jejich cenu není potřeba uvažovat. Jaké rozměry parcel poradíte, aby se za stavbu cest co nejvíce ušetřilo?

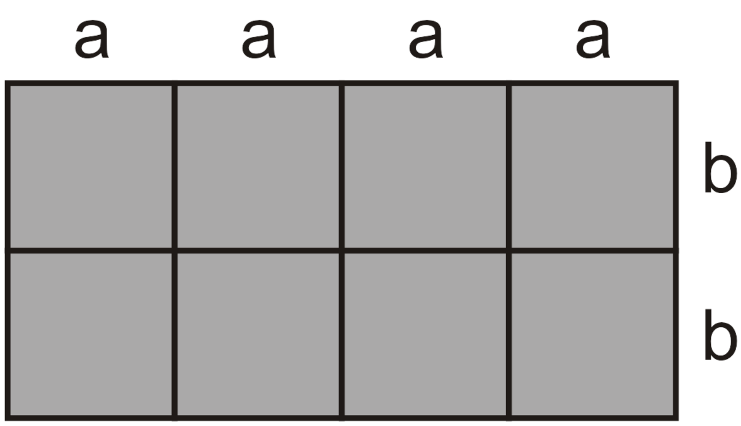
Řešení:

Problém, který musíme vyřešit je znázorněn na Obrázku 35.



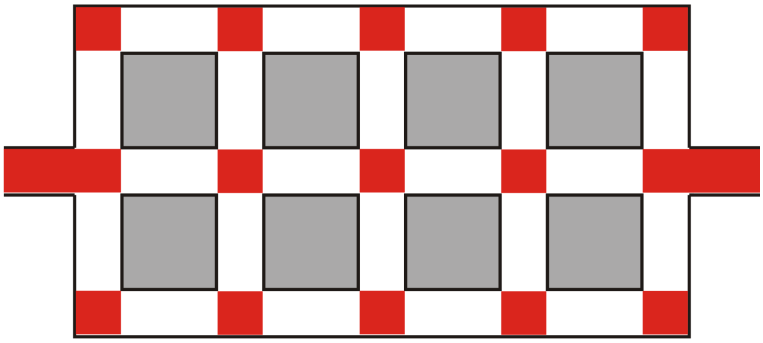
Obrázek 35. Parcely a cesty.

Je zřejmé, že délka cesty (a tím i její cena) bude minimální, bude-li minimální délka cest po stranách jednotlivých parcel. Tím se nám problém zjednodušil na následující.



Obrázek 36. Parcely bez cest.

Na Obrázku 36 jsou znázorněny jednotlivé parcely a je přitom zanedbána šířka cesty. To můžeme provést, neboť plochy cesty vyznačené červeně na Obrázku 37 je nutné vybudovat vždy, ať už je poměr stran parcel jakýkoli, resp. jde o napojovací cesty financované z EU.



Obrázek 37. Neměnné části cest.

Budeme tedy vycházet z Obrázku 36. Celková plocha parcel je dle zadání 960 arů, tedy

$$S = 4a \cdot 2b = 8ab = 960.$$

Naším cílem je minimalizovat délku cest z Obrázku 36, tj.

$$O = 12a + 10b \quad \longrightarrow \quad \min.$$

Ze vztahu pro obsah plochy snadno dostaneme, že

$$b = \frac{120}{a},$$

což dosadíme do vztahu pro délku cest („obvod" parcel). Tím získáme funkci jedné proměnné a můžeme formulovat extremální úlohu

$$O(a) = 12a + \frac{1200}{a} \quad \longrightarrow \quad \min.$$

Mějme přitom na paměti, že pozemek, na kterém pracujeme, má tvar čtverce o straně $1,5\,\mathrm{km}$, tj. $1500\,\mathrm{m}$ a poznamenejme, že jednotky, které používáme jsou ary ($1\,\mathrm{ar} = 100\mathrm{m}^2$), tedy všechny výpočty délek provádíme v desítkách metrů. Odtud

$$\begin{aligned} 2b &< 150, \\ 2\frac{120}{a} &< 150, \\ 150a &> 240, \\ a &> \frac{8}{5}. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 4a &< 150, \\ a &< \frac{75}{2}. \end{aligned}$$

Hledáme tedy globální minimum na intervalu $\left[\frac{8}{5}, \frac{75}{2}\right]$. Funkci O zderivujeme a najdeme její stacionární body.

$$\begin{aligned} O'(a) = 12 - \frac{1200}{x^2} &= 0, \\ 12a^2 &= 1200, \\ a &= \pm 10. \end{aligned}$$

Protože $-10 \notin \left[\frac{8}{5}, \frac{75}{2}\right]$, tento bod nás nezajímá. Porovnejme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu a hodnotu ve stacionárním bodě.

$$\begin{aligned} O\left(\tfrac{8}{5}\right) &= \tfrac{3846}{5} = 769,2, \\ O\left(\tfrac{75}{2}\right) &= 482, \\ O(10) &= 240. \end{aligned}$$

Hledaným minimem je tedy náš stacionární bod. Nyní snadno dopočítáme rozměr b.

$$b = \frac{120}{a} = \frac{120}{10} = 12.$$

Za daných podmínek jsou tedy nejlepší volbou parcely o rozměrech $100 \times 120\mathrm{m}$, přičemž větší rozměr je vertikální.

Poznámka 25. Cílem Příkladu 291 bylo naznačit způsob, jakým je možné reálné zadání zjednodušit za účelem zpřehlednění výpočtů. Poznamenejme, že jakékoli zjednodušování by vždy mělo být řádně zdůvodněno a samozřejmě nesmí nijak ovlivnit výsledek.

(292) V továrně na výrobu kalkulaček zjistili, že pokud vyjádří výnos a náklady jako funkci proměnné x reprezentující počet kalkulaček (v tisících) vyrobených za hodinu, obdrží funkce:

$$r(x) = 9x \qquad \text{pro výnos},$$
$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x \qquad \text{pro náklady}.$$

Určete při jakém objemu výroby bude mít továrna největší zisky.

Řešení:

Nejprve naformulujme problém. Protože

$$\text{zisk} = \text{výnos} - \text{náklady},$$

obdržíme pro zisk funkci

$$p(x) = r(x) - c(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x$$

a hledáme její maximum.

$$p'(x) = -3x^2 + 12x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Zjistěme nyní, pro která x daná funkce roste a pro která klesá. Vzhledem k tomu, že nelze vyrobit záporný počet kalkulaček, zajímá nás její chování jen na intervalu $[0, \infty)$. (Samozřejmě není reálná ani výroba a prodej nekonečného počtu kalkulaček, ale horní omezující podmínka pro nás není dostupná. Výsledek musíme vhodně interpretovat a případně omezující podmínku najít, nebo požadovat od zadavatele problému.)

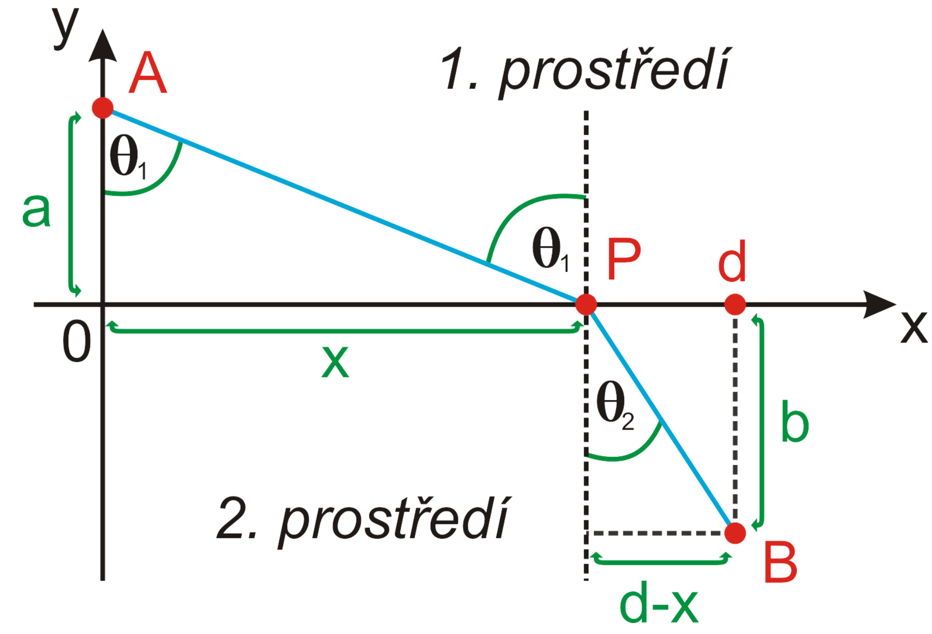
x	$(0, 2-\sqrt{2})$	$(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$	$(2+\sqrt{2}, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Největšího zisku tedy továrna dosáhne při výrobě $2 + \sqrt{2}$ tisíc kalkulaček za hodinu (tj. cca 3 414 kalkulaček za hodinu).

(293) Popište dráhu světelného paprsku z bodu A v prostředí s rychlostí šíření světla c_1 do bodu B s rychlostí šíření světla c_2. Hranici mezi prostředími uvažujte rovnou.

Řešení:

Nejprve zadaný problém důkladně graficky znázorníme. Přitom využijeme faktu, že příroda se chová vždy efektivně, takže světelný paprsek využije trasu, která je nejméně časově náročná. Dráhou tedy bude lomená čára. Na Obrázku 38 je znázorněna modře.



Obrázek 38. Dráha světelného paprsku.

Z Obrázku 38 je zřejmé, že popis dráhy provedeme pomocí úhlu dopadu θ_1 a úhlu lomu θ_2. Přitom jsme jako bod P označili bod, ve kterém světelný paprsek prochází z prvního do druhého prostředí. Přitom souřadnice důležitých bodů jsou:

$$A = [0, a], \qquad P = [0, x], \qquad B = [-b, d].$$

Dokážeme-li tedy popsat vztah úhlů θ_1 a θ_2, budeme schopni např. ze znalosti polohy zdroje světla a úhlu dopadu dopočítat bod B, nebo ze znalosti poloh bodů A a B dopočítat vzdálenost x a tedy polohu bodu P apod. Zdůrazněme, že osa x se kryje s hranicí daných prostředí. Jedním z nejzákladnějších fyzikálních vztahů je vzorec

$$v = s \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{s}{v},$$

kde s značí dráhu, v rychlost a t čas. Označme čas, který potřebuje světlo pro cestu z bodu A do bodu P jako t_1 a čas, který potřebuje světlo pro cestu z bodu P do bodu B jako t_2. Z Obrázku 38 je zřejmé, že platí

$$t_1 = \frac{|AP|}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1},$$
$$t_2 = \frac{|PB|}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_1}.$$

Celkový čas je samozřejmě roven součtu $t_1 + t_2$ a je závislý na pozici bodu P, tj. na velikosti x. Naformulujme extremální problém:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_1} \quad \to \quad \min, \qquad x \in [0, d].$$

Najděme nyní vztah popisující stacionární bod funkce t a dokažme, že jde o globální minimum. Nejprve ji zderivujeme podle proměnné x.

$$t'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Všimněme si, že (opět viz Obrázek 38)

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \qquad \sin\theta_2 = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Celkem jsme dostali, že pro hledaný stacionární bod platí

$$t'(x) = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2} = 0.$$

Tedy

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}. \tag{1}$$

Tento vztah je ve fyzice znám jako *Snellův zákon* (Willebrord Snellius rozený Willebrord Snel van Royen, 1580 – 1626, Leiden, Nizozemsko; prvním objevitelem tohoto zákona je Abu Sa'd al-'Ala' ibn Sahl, cca 940 – 1000, Bagdád).

Abychom byli zcela korektní, musíme ovšem ještě dokázat, že popsaný stacionární bod existuje a že jde skutečně o globální minimum. Dosadíme-li do původního vztahu pro derivaci funkce t body 0 a d, zjistíme, že

$$t'(0) = \frac{0}{c_1\sqrt{a^2+0^2}} - \frac{d-0}{c_2\sqrt{b^2+(d-0)^2}} = -\frac{d}{c_2\sqrt{b^2+d^2}} < 0,$$
$$t'(d) = \frac{d}{c_1\sqrt{a^2+d^2}} - \frac{d-d}{c_2\sqrt{b^2+(d-d)^2}} = \frac{d}{c_1\sqrt{a^2+d^2}} > 0.$$

Protože je $t'(x)$ funkce spojitá na intervalu $[0,d]$ a ukázali jsme, že má v krajních bodech tohoto intervalu opačná znaménka, existuje (dle první Bolzanovy věty) takové $x_0 \in [0,d]$, že $t'(x_0) = 0$. Tedy stacionární bod existuje. Spočtěme nyní druhou derivaci funkce t a pokusme se určit, zda je na intervalu $[0,d]$ konvexní, nebo konkávní.

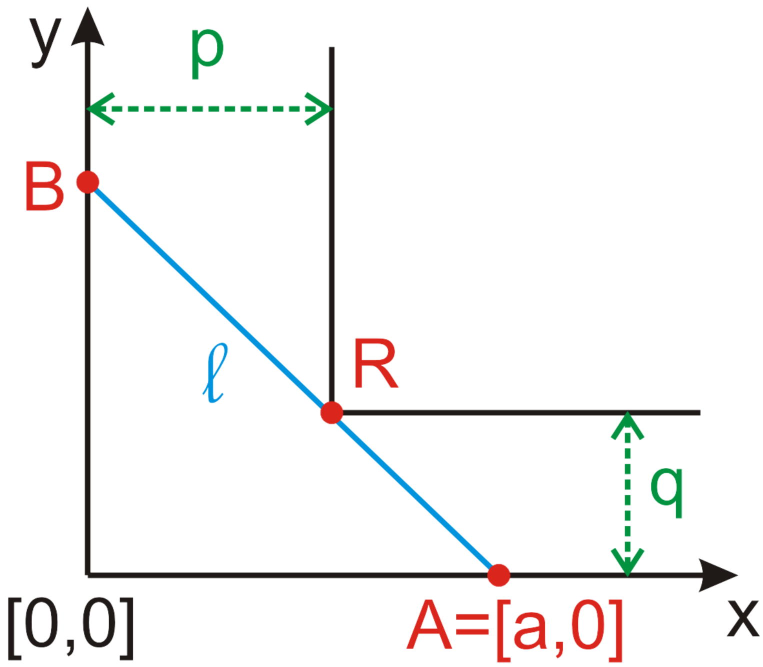
$$t''(x) = \frac{a^2}{c_1(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{c_2\left[b^2+(d-x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad \forall x \in [0,d],$$

takže funkce t je na intervalu $[0,d]$ konvexní. Odtud plyne, že stacionární bod popsaný Snellovým zákonem je jediným lokálním minimem funkce t. Vzhledem k tomu, že druhá t'' je na $[0,d]$ kladná, je na celém $[0,d]$ funkce t' rostoucí. Navíc již víme, že $t(0) < 0$ a $t(d) > 0$. Funkce t tedy z bodu $x = 0$ klesá do bodu $x = x_0$ a z něj pak roste do bodu $x = d$. Bod $x = x_0$ je tedy opravdu globálním minimem funkce t a dráha světelného paprsku je popsána Snellovým zákonem správně.

(294) Chceme přestěhovat žebřík chodbou širokou p metrů, která se pravoúhlou zatáčkou mění na chodbu širokou q metrů. Jaký nejdelší žebřík lze touto zatáčkou pronést ve vodorovné poloze? (Jeho šířku zanedbejte.)

Řešení:

Nejprve zadaný problém důkladně graficky znázorníme. Žebřík je na obrázku 39 znázorněn modře. Pronášíme ho ve vodorovné poloze, ale samozřejmě tak aby jeho stupy směřovaly dolů, tím bude šířka pronášeného objektu redukována na několik centimetrů. Ze zadání máme tuto šířku pro jednoduchost zanedbat. Poznamenejme, že je skutečně efektivní nejprve vyřešit takto zjednodušený případ obecně a úpravy provádět až se znalostí jeho výsledku buď obecně, nebo už pro konkrétní případ.



Obrázek 39. Průchod žebříku.

Nejprve zdůrazněme souřadnice význačných bodů:

$A = [a, 0]$	bod dotyku na vnější zdi vodorovné chodby,
$B = [0, \sqrt{l^2 - a^2}]$	bod dotyku na vnější zdi svislé chodby,
$R = [p, q]$	roh chodby o který se může žebřík zaseknout.

Pro účely výpočtu je tedy užitečné představovat si, že žebřík neseme tak, že jeho konce drhnou po vnějších zdech zatáčky. Naším úkolem je určit takovou délku žebříku l, aby se žebřík rohu R jen dotkl, ale nezasekl se.

Nejprve určíme rovnici přímky, na které leží žebřík. Její parametrický popis je (pomocí bodů A a B):

$$x = a + at,$$
$$y = 0 - \sqrt{l^2 - a^2}\,t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vyloučením parametru t získáme obecnou rovnici

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 = 0,$$

přičemž dotyk nastane pro $[x, y] = [p, q]$. Tj.

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 = 0.$$

Je zřejmé, že platí

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 > 0 \qquad \text{žebřík projde bez dotyku,}$$
$$\frac{p}{a} + \frac{q}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 < 0 \qquad \text{žebřík se zasekne.}$$

Označme levou stranu předchozích vztahů jako funkci f proměnné a. Žebřík projde zatáčkou jestliže bude tato funkce nezáporná, přitom proměnnou a má smysl uvažovat pouze v intervalu $(0, l)$. Tím jsme připraveni formulovat extremální úlohu:

$$f(a) = \frac{p}{a} + \frac{q}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 \quad \to \quad \min, \quad a \in (0, l).$$

Najděme stacionární body funkce f.

$$f'(a) = -\frac{p}{a^2} + \frac{aq}{(l^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$
$$a^3 q - p(l^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$
$$a^2 q^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}}(l^2 - a^2),$$
$$a = \pm \frac{p^{\frac{1}{3}} l}{(p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}.$$

Protože jde o délku, zajímá nás pouze kladný výsledek (záporná hodnota navíc nenáleží do intervalu $(0, l)$). Označme nalezený stacionární bod

$$a_0 = \frac{p^{\frac{1}{3}} l}{(p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}.$$

Nyní určeme pomocí druhé derivace zakřivení funkce f na intervalu $(0, l)$.

$$f''(a) = \frac{2p}{a^3} + \frac{q(l^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} + 3aq^2(l^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{(l^2 - a^2)^3} > 0, \quad \forall a \in (0, l).$$

Funkce f je tedy konvexní na celém intervalu $(0, l)$, a bod a_0 je tedy bodem minima.

Nyní zbývá jen určit maximální možnou délku žebříku. Dosaďme bod a_0 do funkce f.

$$f(a_0) = \frac{(p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{l} - 1.$$

K dotyku dojde, tedy žebřík bude nejdelší možný, jestliže $f(a_0) = 0$. Odtud

$$l = (p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Za podmínek a hodnot ze zadání je největší možná délka žebříku, který projde zatáčkou, $(p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

I. 7. Diferenciál funkce a Taylorova věta

Věta 26. *Funkce* f *má v bodě* x_0 *diferenciál (je diferencovatelná v* x_0*) právě tehdy, když existuje vlastní derivace* $f'(x_0)$. *Přitom platí*

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h, \quad \textit{píšeme též } df(x) = f'(x)\,dx.$$

Pro dostatečně malé h platí:

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h, \quad \text{též } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ pro } x \to x_0.$$

Věta 27 (Taylorova věta). *Nechť má funkce* f *v okolí bodu* x_0 *vlastní derivace až do řádu* $n+1$ *pro nějaké* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Pak pro všechna* x *z tohoto okolí platí tzv.* <u>*Taylorův vzorec*</u>

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$$\textit{kde} \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

přičemž ξ *je vhodné číslo ležící mezi* x_0 *a* x. *Chyba* $R_n(x)$ *se nazývá* <u>*zbytek*</u>

- Zbytek uvedený v Taylorově větě je v tzv. *Lagrangeově tvaru*, což není jediná možnost jeho vyjádření.
- Pokud v Taylorově vzorci vynecháme zbytek, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*.
- Pokud v Taylorově větě položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův vzorec*, resp. tzv. *Maclaurinův polynom*.

(295) Určete $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ pro $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ a $x_0 = 1$.

Řešení:

Nejdříve musíme vyčíslit derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0, tj.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{1}{\sqrt{2}},$$

proto dle definice platí

$$\mathrm{d}f(1)(h) = \frac{\sqrt{2}}{2}h.$$

(296) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\sqrt{382}$.

Řešení:

Nejdříve musíme zvolit vhodnou funkci $f(x)$, jejímž vyčíslením obdržíme $\sqrt{382}$. Zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$ (druhou možnou volbou by mohla být např. funkce $g(x) = \sqrt[x]{382}$). Nyní musíme zvolit vhodný bod x_0. Tento bod musí být zvolen tak, abychom byli bez problémů schopni vyčíslit funkci $f(x)$ v tomto bodě. Navíc, tento bod by měl být nejbližší možný k zadané hodnotě, abychom se dopustili co nejmenší chyby. Proto zvolíme $x_0 = 400$ a $h = -18$ (aby platilo $382 = x_0 + h$). Potom vyčíslíme funkci a její derivaci v bodě x_0, tj.

$$f(x) = \sqrt{x} \overset{x_0=400}{\rightsquigarrow} 20, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{x_0=400}{\rightsquigarrow} \frac{1}{40}.$$

Nyní pomocí diferenciálu funkce obdržíme

$$f(382) = f(400 - 18) = \sqrt{382} \approx 20 - \frac{18}{40} = 19,55.$$

(297) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\sqrt[5]{36}$.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 32$ a $h = 4$. Potom

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \overset{x_0=32}{\rightsquigarrow} 2, \quad f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \overset{x_0=32}{\rightsquigarrow} \frac{1}{80}.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(36) = f(32+4) = \sqrt[5]{36} \approx 2 + \frac{4}{80} = 2,05.$$

(298) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete arctg 1, 1.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$ a $h = 0,1$. Potom

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{\pi}{4}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{1}{2}.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(1,1) = f(1+0,1) = \operatorname{arctg} 1,1 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{0,1}{2} = \frac{\pi}{4} + 0,05.$$

(299) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\ln 1,3$.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ a $h = 0,3$. Potom

$$f(x) = \ln x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 1.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(1,3) = f(1+0,3) = \ln 1,3 \approx 0 + 1 \cdot 0,3 = 0,3.$$

(300) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\sin(-0,22)$.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ a $h = -0,22$. Potom

$$f(x) = \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \quad f'(x) = \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(-0,22) = f(0 - 0,22) = \sin(-0,22) \approx 0 + 1 \cdot (-0,22) = -0,22.$$

(301) Napište Taylorův polynom pro $n = 4$, $x_0 = 1$ a $f(x) = x \ln x$.

<u>**Řešení:**</u>

Než sestavíme Taylorův polynom, musíme vyčíslit funkci a všechny potřebné (tj. až do čtvrtého řádu) derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 0, \\ f'(x) &= \ln x + 1 \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 1, \\ f''(x) &= \frac{1}{x} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 1, \\ f'''(x) &= -\frac{1}{x^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} -1, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{2}{x^3} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 2. \end{aligned}$$

Proto nyní dle definice platí

$$\begin{aligned} x \ln x &= 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{2}{4!}(x-1)^4 = \\ &= x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4. \end{aligned}$$

(302) Napište Taylorův vzorec pro $n = 2$, $x_0 = 1$ a $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Řešení:

Nejdříve vyčíslíme funkci a první dvě derivace v bodě x_0 a také spočítáme (ale nevyčíslíme) třetí derivaci, tj.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{arctg} x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{\pi}{4},\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{1}{2},\\
f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{2},\\
f'''(x) &= \frac{2\left(3x^2-1\right)}{(1+x^2)^3}.
\end{aligned}
$$

Proto nyní platí

$$
\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{6\xi^2-2}{6(\xi^2+1)^3}(x-1)^3, \quad \text{kde } \xi \text{ leží mezi } x \text{ a } 1.
$$

(303) Určete maximální chybu v aproximaci z Příkladu 302, kde $x \in (0,9; 1,1)$.

Řešení:

Chyba je určena výrazem

$$R_2(x) = \frac{6\xi^2 - 2}{6(\xi^2+1)^3}(x-1)^3, \quad 0,9 < \xi < 1,1.$$

Musíme tedy vhodně omezit výraz $|R_2(x)|$ a tak určit maximální chybu aproximace. Nejdříve se zaměříme na čitatele, tj.

$$\left|6\xi^2 - 2\right| \ \Big| \ |a+b| \le |a| + |b| \ \Big| \ \le 6\,|\xi|^2 + 2 < 6 \cdot 1,1^2 + 2 = 9,26.$$

Jmenovatele omezíme takto

$$\left|6(\xi^2+1)^3\right| = 6\left(\xi^2+1\right)^3 \ge 10,86, \quad \text{neboť jistě platí } \xi^2 + 1 > 0,9^2 + 1 = 1,81.$$

Proto nyní můžeme psát

$$|R_2(x)| = \left|\frac{6\xi^2 - 2}{6(\xi^2+1)^3}\right| |(x-1)|^3 \le \frac{9,26}{10,86}\,|(x-1)|^3 \le 0,8526 \cdot 0,1^3 = 0,00085 \doteq 0,0009.$$

Maximální chyba aproximace Taylorovým polynomem druhého stupně je $0,0009$.

(304) Vyjádřete funkci $\sin\frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x-2$.

Řešení:

Takovéto vyjádření je možné pomocí Taylorova polynomu. Ze zadání plyne, že $x_0 = 2$ a že musíme polynom sestavit v obecné podobě, neboť nebyl zadán stupeň aproximace. Proto

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 1, \\ f'(x) &= \frac{\pi}{4}\cos\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0, \\ f''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \\ f'''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cos\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0, \\ f^{(4)}(x) &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} \left(\frac{\pi}{4}\right)^4. \end{aligned}$$

Z tvaru jednotlivých derivací můžeme pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ odvodit

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} \sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}, \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1} \cos\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0. \end{aligned}$$

Proto hledaný Taylorův polynom je tvaru

$$\sin\frac{x\pi}{4} = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{(x-2)^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \cdots .$$

(305) Najděte Maclaurinův vzorec pro obecné n a pro funkci $f(x) = e^x$.

Řešení:

Musíme vyčíslit funkci a všechny derivace v bodě x_0, tj.

$$f(x) = e^x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1,$$

$$f'(x) = e^x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1.$$

Navíc je zřejmé že platí $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x)$ a $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 1$. Proto můžeme sestavit Taylorův polynom ve tvaru

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde ξ leží mezi 0 a x.

(306) Najděte Maclaurinův vzorec pro obecné n a pro funkci $f(x) = \sin x$.

Řešení:

Nejdříve vyčíslíme funkci a všechny derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \\ f'(x) &= \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1, \\ f''(x) &= -\sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \\ f'''(x) &= -\cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0. \end{aligned}$$

Navíc je zřejmé, že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} f^{(2k)} &= (-1)^k \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \\ f^{(2k+1)} &= (-1)^k \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1. \end{aligned}$$

Proto můžeme napsat

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi,$$

kde ξ leží mezi 0 a x.

(307) Najděte Maclaurinův vzorec pro obecné n a pro funkci $f(x) = \cos x$.

Řešení:

Nejdříve vyčíslíme funkci a všechny derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1, \\ f'(x) &= -\sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \\ f''(x) &= -\cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} -1, \\ f'''(x) &= \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1. \end{aligned}$$

Navíc je zřejmé, že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} f^{(2k)} &= (-1)^k \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1, \\ f^{(2k+1)} &= (-1)^k \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0. \end{aligned}$$

Proto můžeme napsat

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi,$$

kde ξ leží mezi 0 a x.

(308) Užitím Maclaurinova polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.

Řešení:

Z Příkladu 305 víme, že platí

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

což pro $x = 1$ dává

$$e = 1 + x + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!},$$

kde $\xi \in (0,1)$. K tomu, abychom dosáhli chyby menší než $0,001$, musíme vyřešit nerovnici

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < 0,0001 \;\Big|\, \text{protože } \xi \in (0,1) \,\Big| \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{(n+1)!} < 0,0001 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3000 < (n+1)! \quad \Rightarrow \quad n > 5.$$

Proto musíme použít Taylorův polynom alespoň šestého stupně, tj.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2,718055556.$$

(309) Pro jaké hodnoty x platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?

Řešení:

Z Příkladu 307 pro $n = 2$ víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_2(x),$$

kde $R_2(x) = \frac{x^4 \cos \xi}{4!}$ a ξ leží mezi 0 a x. Z omezenosti funkce $\cos x$ plyne, že

$$\left| \frac{x^4 \cos \xi}{24} \right| \leq \frac{|\cos \xi| \, x^4}{24} \leq \frac{x^4}{24}.$$

Musíme proto vyřešit nerovnici

$$\frac{x^4}{24} \leq 0,0001 \quad \Rightarrow \quad x^4 \leq 0,0001.$$

Řešením tedy je $x \in [-\sqrt[4]{0,0024}, \sqrt[4]{0,0024}] \doteq [-0,222, 0,222]$, tj. $|x| \leq 0,222 = 12°30'$.

(310) Pomocí Taylorova polynomu pro $n = 3$ určete přibližně $\sqrt[3]{30}$.

Řešení:

Uvažujme funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a položme $x_0 = 27$. Vypočteme funkční hodnotu a všechny potřebné derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} 3, \\ f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} \frac{1}{27}, \\ f''(x) &= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} -\frac{2}{2187}, \\ f'''(x) &= \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} \frac{10}{177147}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat přibližnou hodnotu

$$\sqrt[3]{30} = 3 + \frac{1}{27} \cdot 3 + \frac{-\frac{8}{2187}}{2} \cdot 3^2 + \frac{\frac{10}{177147}}{6} \cdot 3^3 \doteq 3,10725.$$

(311) Pomocí Maclaurinova mnohočlenu třetího stupně, vyjádřete hodnotu $\cos 1^\circ$ (výsledek uveďte na 6 desetinných míst).

Řešení:

Z Příkladu 307 víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2},$$

proto obdržíme

$$\cos 1^\circ = \cos\frac{\pi}{180} = 1 - \frac{\frac{\pi^2}{180^2}}{2} \doteq 0,999847.$$

(312) Pomocí Maclaurinova mnohočlenu třetího stupně, vyjádřete hodnotu $\sin 2^\circ$ (výsledek uveďte na 6 desetinných míst).

Řešení:

Z Příkladu 306 víme, že platí

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6},$$

proto obdržíme

$$\sin 2^\circ = \sin \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90} - \frac{\frac{\pi^3}{90^3}}{6} \doteq 0{,}034899.$$

(313) Vypočtěte číslo $\log 11$ s přesností 10^{-5}.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \log x$ a $x_0 = 10$. Nyní vyčíslíme funkci a její derivace v bodě x_0, tj.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \log x \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} 1,\\
f'(x) &= \frac{1}{x\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} \frac{1}{10\ln 10},\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{10^2\ln 10},\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} \frac{2}{10^3\ln 10},\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} -\frac{6}{10^4\ln 10}.
\end{aligned}
$$

Obecně můžeme psát

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{10^n\ln 10}.
$$

Tedy Taylorův vzorec je tavru

$$
\begin{aligned}
\log x = 1 + \frac{1}{10\ln 10}(x-10) - \frac{\frac{1}{10^2\ln 10}}{2!}(x-10)^2 + \frac{\frac{2}{10^3\ln 10}}{3!}(x-10)^3 +\\
+ \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!10^n\ln 10}(x-10)^n + R_n(x),
\end{aligned}
$$

kde

$$
R_n(x) = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)!\xi^n\ln 10}(x-10)^{n+1}
$$

a ξ leží mezi x a 10. Abychom dosáhli požadované přesnosti, musíme vyřešit nerovnici

$$
\begin{aligned}
|R_n(11)| = \frac{1}{(n+1)\xi^{n+1}\ln 10} < 10^{-5} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1}\frac{1}{\xi^{n+1}} < 10^{-5}\ln 10 \ \Big|\ \tfrac{1}{n+1} < 1\ \Big| \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{\xi^{n+1}} < 10^{-5}\ln 10 \ \Big|\ \xi \in (10, 11)\ \Big| \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{10^{n+1}} < 10^{-5}\ln 10 \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad 10^{-n-1} < 10^{-5}\ln 10 \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad (-n-1)\ln 10 < \ln\left(10^{-5}\ln 10\right) < 5 \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad -n-1 < \frac{\ln\left(10^{-5}\ln 10\right)}{\ln 10} < -5 \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad -n < -4 \quad \Rightarrow \quad n > 4,
\end{aligned}
$$

musíme tedy použít Taylorův polynom alespoň pátého stupně, tj.

$$
\begin{aligned}
\log 11 = 1 + \frac{1}{10\ln 10} - \frac{1}{2\cdot 10^2\ln 10} + \frac{2!}{3!\cdot 10^3\ln 10} -\\
- \frac{3!}{4!\cdot 10^4\ln 10} + \frac{4!}{5!\cdot 10^5\ln 10} = 1{,}041392752.
\end{aligned}
$$

II. Integrální počet funkcí jedné proměnné

II. 1. Základní integrační metody

Definice 28. Nechť funkce f je definována na intervalu I. Funkce F se nazývá *primitivní* k funkci f na I, jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$.
Množina všech primitivních funkcí k funkci f na I se nazývá *neurčitý integrál* z funkce f a značí se $\int f(x)\,dx$, tj.

$$\int f(x)\,dx := \{F:\ F \text{ je primitivní funkce k } f \text{ na } I\}.$$

Základní vzorce pro integrování ($k \in \mathbb{R}$):

$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx.$$

Integrování elementárních funkcí ($a, b, k, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \neq 0$ jsou dané konstanty a C je integrační konstanta):

$$\int k\,dx = kx + C, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \Rightarrow \qquad \int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C.$$

Věta 29 (Integrování per-partes). *Nechť funkce u a v mají derivaci na intervalu I. Pak platí*

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx,$$

pokud alespoň jeden z uvedených integrálů existuje.

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \log_b^n x$	$\log_b^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin(kx)$	$\arcsin(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos(kx)$	$\arccos(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \operatorname{arctg}(kx)$	$\operatorname{arctg}(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \operatorname{arccotg}(kx)$	$\operatorname{arccotg}(kx)$	$P(x)$

TABULKA 1. Jak volit funkce při integrování per-partes ($P(x)$ je polynom, $k \in \mathbb{R}$).

Věta 30 (Substituční metoda). *Nechť funkce* f *má na otevřeném intervalu* J *primitivní funkci* F, *funkce* $\varphi(x)$ *má derivaci na otevřeném intervalu* I *a pro libovolné* $x \in I$ *je* $\varphi(x) \in J$. *Pak má složená funkce* $f(\varphi)\,\varphi'$ *na intervalu* I *primitivní funkci a platí*

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx \left|\begin{array}{c} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x)\,dx = du \end{array}\right| = \int f(u)\,du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

(314) Vypočtěte

$$\int x \, dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

(315) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

(316) Vypočtěte

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

(317) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{-1/3}\,dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

(318) Vypočtěte
$$\int e^{-x}\, dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo
$$\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C.$$

(319) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx.$$

Řešení:

S pomocí úpravy můžeme využít jeden ze základních vzorců, tj.

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{x^2}{3}+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

(320) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

Řešení:

S pomocí úpravy můžeme využít jeden ze základních vzorců, tj.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2} + C.$$

(321) Vypočtěte

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+2}\,dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+2}\,dx = \ln\left|x^3+x+2\right| + C.$$

(322) Vypočtěte

$$\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-3\sin 5x+2\cos\frac{x}{2}+3^x-\frac{7}{2^x}+\frac{4}{3-x}-\frac{2}{3x+2}+2\,e^{\frac{2x}{3}}\right)dx.$$

Řešení:

Aplikací základních vzorců získáme

$$\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-3\sin 5x+2\cos\frac{x}{2}+3^x-\frac{7}{2^x}+\frac{4}{3-x}-\frac{2}{3x+2}+2\,e^{\frac{2x}{3}}\right)dx=$$

$$=2\operatorname{tg}x+\frac{3}{5}\cos 5x+4\sin\frac{x}{2}+\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{7}{2^x\ln 2}-4\ln|3-x|-\frac{2}{3}\ln|3x+2|+3\,e^{\frac{2x}{3}}+C.$$

(323) Vypočtěte

$$\int \operatorname{tg}^2(au)\,du, \quad a \neq 0.$$

Řešení:

Postupným upravováním obdržíme

$$\int \operatorname{tg}^2(au)\,du = \int \frac{\sin^2(au)}{\cos^2(au)}\,du = \int \frac{1-\cos^2(au)}{\cos^2(au)}\,du = \int \frac{1}{\cos^2(au)}\,du - \int 1\,du =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{tg}(au) - u + C.$$

(324) Vypočtěte

$$\int \operatorname{tg}(bs)\,ds, \quad b \neq 0.$$

Řešení:

Ze základních vzorců získáme

$$\int \operatorname{tg}(bs)\,ds = \int \frac{\sin(bs)}{\cos(bs)}\,ds = -\frac{1}{b}\ln|\cos(bs)| + C.$$

(325) Vypočtěte

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Řešení:

S využitím metody per-partes dostaneme

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = \operatorname{tg} x & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right| = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx =$$

$$= x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

(326) Vypočtěte

$$\int x \ln x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Metodou per-partes získáme

$$\int x \ln x \,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} & v' = x \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

(327) Vypočtěte

$$\int (2x-1)\ln x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes získáme

$$\int (2x-1)\ln x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = x^2 - x & v' = 2x - 1 \end{array} \right| =$$

$$= (x^2-x)\ln x - \int \frac{1}{x}(x^2-x)\, dx = (x^2-x)\ln x - \int (x-1)\, dx =$$

$$= (x^2-x)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

(328) Vypočtěte
$$\int (x^2+1)\,e^{-x}\,dx.$$

Řešení:

S opakovaným využitím metody per-partes dostaneme
$$\int (x^2+1)\,e^{-x}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{array} \right| =$$
$$= -(x^2+1)\,e^{-x} + \int 2x\,e^{-x}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = 2x & u' = x \\ v' = -e^{-x} & v = e^{-x} \end{array} \right| =$$
$$= -(x^2+1)\,e^{-x} - 2x\,e^{-x} + \int 2\,e^{-x}\,dx =$$
$$= -(x^2+1)\,e^{-x} - 2x\,e^{-x} + -2\,e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2+2x+3) + C.$$

(329) Vypočtěte
$$\int x^2\,e^{-3x}\,dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes získáme
$$\int x^2\,e^{-3x}\,dx \left|\begin{matrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v = -\frac{1}{3}\,e^{-3x} & v' = e^{-3x}\end{matrix}\right| =$$
$$= -\frac{1}{3}x^2\,e^{-3x} + \frac{2}{3}\int x\,e^{-3x}\,dx \left|\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v = -\frac{1}{3}\,e^{-3x} & v' = e^{-3x}\end{matrix}\right| =$$
$$= -\frac{1}{3}x^2\,e^{-3x} - \frac{2}{9}x\,e^{-3x} + \frac{2}{9}\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\,e^{-3x}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right) + C.$$

(330) Vypočtěte

$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Řešení:

Po dvojnásobném použití metody per-partes dostaneme

$$\int e^x \sin x \, dx \left| \begin{array}{cc} u = e^x & u' = e^x \\ v = -\cos x & v' = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \left| \begin{array}{cc} u = e^x & u' = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx,$$

což znamená, že jsme ve výsledku obdrželi stejný integrál jako v zadání pouze s opačným znaménkem, tj.

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

(331) Vypočtěte

$$\int \cos^2 x \, dx.$$

Řešení:

S využitím metody per-partes obdržíme

$$\int \cos^2 x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) \, dx =$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) \, dx = \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx.$$

Odtud plyne

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cdot \cos x + x) + C.$$

(332) Vypočtěte

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes obdržíme

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx \left| \begin{array}{cc} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + 1 \right| + C.$$

(333) Vypočtěte

$$\int \ln x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes obdržíme

$$\int \ln x \, dx \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

(334) Vypočtěte

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Řešení:

Tento příklad je možné řešit jak substitucí, tak i per-partes.
Per-partes:

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx \left| \begin{array}{ll} u' = \frac{1}{x} & u = \ln x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - I$$

$$\Rightarrow \quad I = \ln^2 x - I \quad \Rightarrow \quad 2I = \ln^2 x \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Substitucí:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

(335) Vypočtěte

$$\int (4-7x)^{10}\,dx.$$

Řešení:

Substituční metodou obdržíme

$$\int (4-7x)^{10}\,dx \;\left|\begin{array}{c} t = 4-7x \\ dt = -7\,dx \end{array}\right| = -\frac{1}{7}\int t^{10}\,dt = -\frac{1}{7}\frac{t^{11}}{11} + C = -\frac{1}{77}(4-7x)^{11} + C.$$

(336) Vypočtěte

$$\int \sqrt{2x-5}\,dx.$$

Řešení:

Použitím substituční metody získáme

$$\int \sqrt{2x-5}\,dx \left| \begin{array}{c} t = 2x-5 \\ dt = 2\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-5)^3} + C.$$

(337) Vypočtěte

$$\int \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}\,dx.$$

Řešení:

Substituční metodou obdržíme

$$\int \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}\,dx \left| \begin{array}{l} t = 2+\sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2+\sin x} + C.$$

(338) Vypočtěte

$$\int \frac{(1+\ln x)^4}{x}\,dx.$$

Řešení:

Substituční metodou dostaneme

$$\int \frac{(1+\ln x)^4}{x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int (1+t)^4\,dt = \frac{(1+t)^5}{5}+C = \frac{(1+\ln x)^5}{5}+C.$$

(339) Vypočtěte
$$\int \sin x \cdot \cos^5 x \, dx.$$

Řešení:

Substituční metodou obdržíme
$$\int \sin x \cdot \cos^5 x \, dx \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right| = -\int u^5 \, du = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

(340) Vypočtěte

$$\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Substituční metodou získáme

$$\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ \left|\begin{array}{c} t=-x^2 \\ \mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + C = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

(341) Vypočtěte

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\, dx.$$

Řešení:

S pomocí substituční metody získáme

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\, dx \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos\, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \left| \begin{array}{c} u = t + \sqrt{1+t^2} \\ du = \left(1 + \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\right) dt = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ \frac{du}{t+\sqrt{1+t^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C = \ln\left|\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right| + C.$$

(342) Vypočtěte

$$\int x^3\, e^{-x^2}\, dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

Kombinace substituce a metody per-partes dává

$$\int x^3\, e^{-x^2}\, dx \left| \begin{array}{c} t = -x^2 \\ dt = -2x\, dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int (-t)\, e^t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int t\, e^t\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t & u' = 1 \\ v = e^t & v' = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{2} t\, e^t - \frac{1}{2}\int e^t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} t\, e^t - \frac{1}{2}\, e^t + C = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}(x^2+1) + C.$$

(343) Vypočtěte
$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

Kombinace substituce a metody per-partes dává
$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx \left|\begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array}\right| = 2\int t\,e^t\,dt \left|\begin{array}{ll} u=t & u'=1 \\ v=e^t & v'=e^t \end{array}\right| =$$
$$= 2t\,e^t - 2\int e^t\,dt = 2t\,e^t - 2\,e^t + C = 2\,e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

(344) Vypočtěte

$$\int x \arcsin x^2 \, dx.$$

Řešení:

Kombinace substituce a metody per-partes dává

$$\int x \arcsin x^2 \, dx \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \arcsin t \, dt \left| \begin{array}{cc} u = \arcsin t & u' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ v = t & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} t \arcsin t - \frac{1}{2} \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \left| \begin{array}{c} w = 1 - t^2 \\ dw = -2t \, dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} t \arcsin t + \frac{1}{4} \int \frac{dw}{\sqrt{w}} =$$

$$= \frac{1}{2} t \arcsin t + \frac{1}{4} \frac{w^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^4} + C.$$

(345) Vypočtěte pomocí per-partes i substituční metodou
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Řešení:

Tento příklad lze řešit dvěma způsoby. Metodou per-partes obdržíme
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \left| \begin{matrix} u=\sqrt{1-x^2} & u'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ v=x & v'=1 \end{matrix} \right| =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\,dx,$$
tj.
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) + C.$$
Vhodnou substitucí dostaneme tentýž výsledek, tj.
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \left| \begin{matrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt =$$
$$= \int \cos^2\,dt \overset{\text{Př. (331)}}{=} \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + \frac{\arcsin x}{2} + C =$$
$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

(346) Vypočtěte

$$\int \max\{1, x^2\}\,dx.$$

Řešení:

Pro $|x| \le 1$ platí

$$\int \max\{1, x^2\}\,dx = \int 1\,dx = x + C.$$

Je-li $|x| > 1$, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Protože výsledná funkce musí být spojitá, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\,dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C & \text{pro } x < -1, \\ x + C & \text{pro } |x| \le 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

II. 2. Integrace racionální lomené funkce

Racionální lomenou funkci je nutné rozložit na parciální zlomky. Tyto parciální zlomky se pak postupně integrují, přičemž postup pro jejich integraci je následující:

- $$\int \frac{A}{x-x_0}\,dx \left| \begin{matrix} t = x - x_0 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{A}{t}\,dt = A\ln|t| + C = A\ln|x-x_0| + C;$$
- $$\int \frac{A}{(x-x_0)^n}\,dx \left| \begin{matrix} t = x - x_0 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{A}{t^n}\,dt = \frac{A\cdot t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-x_0)^{n-1}} + C, \quad \text{kde } n \geq 2;$$
- $$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx \left| \begin{matrix} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p)\,dx \end{matrix} \right| + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \\ &= \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2}\,dx = \ln|t| + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+1} \left| \begin{matrix} u = \frac{x-x_0}{a} \\ du = \frac{1}{a}dx \end{matrix} \right| = \\ &= \ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a^2}\int \frac{a\,du}{u^2+1} = \ln\left|x^2+px+q\right| + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a^2}\cdot a\cdot \operatorname{arctg} u + C = \\ &= \ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{2a}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{a} + C; \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx \left| \begin{matrix} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p)\,dx \end{matrix} \right| + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \\ &= \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{[(x-x_0)^2+a^2]^n} = \\ &= \frac{A}{2}\cdot \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)K_n(x_0,a), \quad \text{kde } n \geq 2, \end{aligned}$$

přičemž $K_n(x_0,a) := \int \frac{dx}{[(x-x_0)^2+a^2]^n}$. K dokončení výpočtu posledního integrálu je třeba využít následující rekurentní formule

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x_0,a) &= \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-1}{2n}K_n(x_0,a) + \frac{1}{2n}\frac{x-x_0}{[(x-x_0)^2+a^2]^n}\right), \\ K_1(x_0,a) &= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{a}, \end{aligned}$$

což ve speciálním případě ($x_0 = 0$ a $a = 1$) dává

$$K_{n+1}(0,1) = \frac{2n-1}{2n} K_n(0,1) + \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n},$$

$$K_1(0,1) = \operatorname{arctg} x.$$

(347) Vypočtěte

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} =$$
$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + C.$$

(348) Vypočtěte
$$\int \frac{x^3+x}{(x^2-1)(x^2-2)}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{x^3+x}{(x^2-1)(x^2-2)}\,dx = -\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{\frac{3}{2}}{x-\sqrt{2}}\,dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x+\sqrt{2}}\,dx =$$
$$= -\ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln\left|x-\sqrt{2}\right| + \frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{2}\right| + C.$$

(349) Vypočtěte

$$\int \frac{x^6 + 2x - 1}{x^5 - x^2}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{x^6 + 2x - 1}{x^5 - x^2}\,dx = \int x\,dx - 2\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \int \frac{dx}{x^2} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{1}{x} + C.$$

(350) Vypočtěte

$$\int \frac{3x+7}{x^2-4x+15}\,dx.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+7}{x^2-4x+15}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+15}\,dx + 13\int \frac{dx}{x^2-4x+15} = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + 13\int \frac{dx}{(x-2)^2+11} = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + \frac{13}{11}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{11}}\right)^2+1} \left| \begin{array}{c} t = \frac{x-2}{\sqrt{11}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{11}}dx \end{array} \right| = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + \frac{13\sqrt{11}}{11}\int \frac{dt}{t^2+1} = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + \frac{13\sqrt{11}}{11}\operatorname{arctg} t + C = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + \frac{13}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{11}} + C.
\end{aligned}$$

(351) Vypočtěte

$$\int \frac{x^3 + 2x + x - 1}{x^2 - x + 1}\, dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 + 2x + x - 1}{x^2 - x + 1}\, dx &= \int (x+3)\, dx + \int \frac{3x-4}{x^2 - x + 1}\, dx = \\
&= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\
&= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx - \frac{10}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \left| \begin{array}{l} t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \end{array} \right| = \\
&= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx - \frac{5\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \\
&= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx - \frac{5\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} t + C = \\
&= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| - \frac{5\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

(352) Vypočtěte
$$\int \frac{x}{x^4 - x^3 - x + 1}\, dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^4 - x^3 - x + 1}\, dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} \left| \begin{array}{c} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\
&= -\frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \\
&= -\frac{1}{3(x+1)} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

(353) Vypočtěte
$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}\,dx = \frac{1}{20}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{20}\int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{3}{20}\ln|x+3| - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+2x+2}\right) =$$
$$= \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{3}{20}\ln|x+3| - \frac{1}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \quad \left| \begin{array}{c} t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{3}{20}\ln|x+3| - \frac{1}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{3}{20}\ln|x+3| - \frac{1}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

(354) Vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \left| \begin{array}{c} t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dx}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

(355) Vypočtěte
$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}\,dx.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}\,dx &= \int 1\,dx + \int \frac{2x}{x^2+x+2}\,dx = \\
&= x + \int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+x+2} = \\
&= x + \ln\left|x^2+x+2\right| - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \\
&= x + \ln\left|x^2+x+2\right| - \frac{4}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} \left| \begin{array}{c} t = \frac{2x+1}{\sqrt{7}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{7}}\,dx \end{array} \right| = \\
&= x + \ln\left|x^2+x+2\right| - \frac{2\sqrt{7}}{7}\int \frac{dx}{t^2+1} = \\
&= x + \ln\left|x^2+x+2\right| - \frac{2\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg} t + C = \\
&= x + \ln\left|x^2+x+2\right| - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

(356) Vypočtěte

$$\int \frac{dx}{(x^2-6x+8)(x^2+2x+2)}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{dx}{(x^2-6x+8)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{52}\int \frac{dx}{x-4} - \frac{1}{20}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{130}\int \frac{4x+11}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{52}\ln|x-4| - \frac{1}{20}\ln|x-2| + \frac{1}{130}\left(2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + 7\int \frac{dx}{x^2+2x+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{52}\ln|x-4| - \frac{1}{20}\ln|x-2| + \frac{2}{130}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{7}{130}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \left|\begin{array}{c} t = x+1 \\ dt = dx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{52}\ln|x-4| - \frac{1}{20}\ln|x-2| + \frac{2}{130}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{7}{130}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{52}\ln|x-4| - \frac{1}{20}\ln|x-2| + \frac{2}{130}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{7}{130}\operatorname{arctg} t =$$

$$= \frac{1}{52}\ln|x-4| - \frac{1}{20}\ln|x-2| + \frac{2}{130}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

(357) Vypočtěte

$$\int \frac{x^8}{x^8-1}\,dx.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^8}{x^8-1}\,dx &= \int 1\,dx + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1} + \\
&\quad + \frac{1}{8}\int\frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \frac{1}{8}\int\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = \\
&= x + \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + \\
&\quad + \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx - \int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) = \\
&= x + \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \frac{1}{8}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} - \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| - \frac{1}{8}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \\
&= x + \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1}\ \left|\begin{array}{c} t=\sqrt{2}x-1 \\ dt=\sqrt{2}\,dx \end{array}\right| - \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}\ \left|\begin{array}{c} w=\sqrt{2}x+1 \\ dw=\sqrt{2}\,dx \end{array}\right| = \\
&= x + \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{dt}{t^2+1} - \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| - \frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{dw}{w^2+1} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x + \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + \\
&\qquad + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2 - \sqrt{2}x + 1\right| - \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg} t - \\
&\qquad - \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2 + \sqrt{2}x + 1\right| - \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg} w + C = \\
&= x + \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + \\
&\qquad + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2 - \sqrt{2}x + 1\right| - \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x - 1\right) - \\
&\qquad - \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x^2 + \sqrt{2}x + 1\right| - \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x + 1\right) + C.
\end{aligned}
$$

(358) Vypočtěte

$$\int \frac{x-4}{5x^2+6x+3}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-4}{5x^2+6x+3}\,dx &= \frac{1}{10}\int \frac{10x+6}{5x^2+6x+3}\,dx - \frac{23}{5}\int \frac{dx}{5x^2+6x+3} = \\
&= \frac{1}{10}\ln\left|5x^2+6x+3\right| - \frac{23}{25}\int \frac{dx}{x^2+\frac{6}{5}x+\frac{3}{5}} = \\
&= \frac{1}{10}\ln\left|5x^2+6x+3\right| - \frac{23}{25}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{6}{25}} = \\
&= \frac{1}{10}\ln\left|5x^2+6x+3\right| - \frac{23}{6}\int \frac{dx}{\left(\frac{5x+3}{\sqrt{6}}\right)^2+1}\; \left| \begin{array}{c} t=\frac{5x+3}{\sqrt{6}} \\ dt=\frac{5}{\sqrt{6}}dx \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{10}\ln\left|5x^2+6x+3\right| - \frac{23\sqrt{6}}{30}\int \frac{dx}{t^2+1} = \\
&= \frac{1}{10}\ln\left|5x^2+6x+3\right| - \frac{23\sqrt{6}}{30}\operatorname{arctg} t + C = \\
&= \frac{1}{10}\ln\left|5x^2+6x+3\right| - \frac{23\sqrt{6}}{30}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{\sqrt{6}} + C.
\end{aligned}$$

(359) Vypočtěte
$$\int \frac{2x+1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx = \int \frac{2x+4}{(x^2+4x+13)^2}\,dx - 3\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2} \left| \begin{array}{l} t = x^2+4x+13 \\ dt = (12x+4)\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} - 3\int \frac{dx}{\left[(x+2)^2+9\right]^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4x+13} - 3\int \frac{dx}{9^2\left[\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1\right]^2} \left| \begin{array}{l} w = \frac{x+2}{3} \\ dw = \frac{1}{3}dx \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4x+13} - 3\frac{3}{81}\int \frac{dw}{(w^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4x+13} - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} w + \frac{1}{2}\frac{w}{w^2+1}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4x+13} - \frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} - \frac{1}{18}\frac{\frac{x+2}{3}}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} - \frac{1}{6}\frac{x+8}{x^2+4x+13} + C.$$

(360) Vypočtěte

$$\int \frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x\,(x^2-x+1)^2}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x\,(x^2-x+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+3}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{x-6}{(x^2-x+1)^2}\,dx =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx - \frac{11}{2}\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx \left|\begin{array}{c} t = x^2-x+1 \\ dt = (2x-1)dx \end{array}\right| - \frac{11}{2}\int \frac{dx}{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2} =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|\,dx + \frac{14}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \left|\begin{array}{c} w = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ dw = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx \end{array}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} - \frac{22}{3}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right) =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|\,dx + \frac{7\sqrt{3}}{3}\int \frac{dw}{w^2+1} +$$

$$- \frac{1}{2t} - \frac{44}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - \frac{11}{3}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|\,dx + \frac{7\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} w +$$

$$- \frac{1}{2(x^2-x+1)} - \frac{44}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \left|\begin{array}{c} u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ du = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx \end{array}\right| - \frac{11}{3}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|\,dx + \frac{7\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} +$$

$$- \frac{1}{2(x^2-x+1)} - \frac{22\sqrt{3}}{9}\int \frac{du}{u^2+1} - \frac{11}{3}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| \,dx + \frac{7\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} +$$
$$- \frac{22\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg} u - \frac{1}{3}\frac{11x-4}{x^2-x+1} + C =$$
$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| \,dx + \frac{7\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} +$$
$$- \frac{22\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{11x-4}{x^2-x+1} + C =$$
$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| \,dx - \frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{11x-4}{x^2-x+1} + C.$$

(361) Vypočtěte

$$\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\,dx = 5\int \frac{dx}{x^2-6x+13} + \int \frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2}\,dx =$$

$$= 5\int \frac{dx}{(x-3)^2+4} + 15\int \frac{2x-6}{(x^2-6x+13)^2}dx + 13\int \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2} =$$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} \left| \begin{array}{l} t = \frac{x-3}{2} \\ dt = \frac{1}{2}\,dx \end{array} \right| + 15\int \frac{2x-6}{(x^2-6x+13)^2}dx \left| \begin{array}{l} w = x^2-6x+13 \\ dw = (2x-6)\,dx \end{array} \right| +$$

$$+ 13\int \frac{dx}{\left[(x-3)^2+4\right]^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{dx}{t^2+1} + 15\int \frac{dw}{w^2} + \frac{13}{4}\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\frac{x-3}{x^2-6x+13}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{15}{w} + \frac{13}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + \frac{13}{8}\frac{x-3}{x^2-6x+13} + C =$$

$$= \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} - \frac{15}{x^2-6x+13} + \frac{13}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + \frac{13}{8}\frac{x-3}{x^2-6x+13} + C =$$

$$= \frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + C.$$

(362) Vypočtěte
$$\int \frac{5\ln x}{x(\ln^3 x+\ln^2 x-2)}\mathrm{d}x.$$

Řešení:

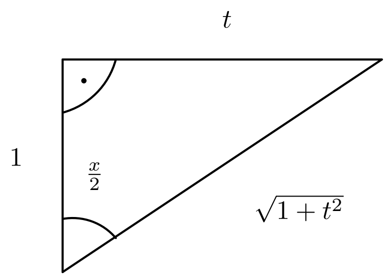
$$\int \frac{5\ln x}{x(\ln^3 x+\ln^2 x-2)}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\ln x \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int \frac{5t}{t^3+t^2-2}\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{1}{t-1}+\frac{-t+2}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2t+2}{t^2+2t+2}+\frac{3}{t^2+2t+2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2)+3\int\frac{1}{(t+1)^2+1}\mathrm{d}t \left| \begin{array}{c} s=t+1 \\ \mathrm{d}s=\mathrm{d}t \end{array}\right| =$$
$$= \ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2)+3\int\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s =$$
$$= \ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2)+3\,\mathrm{arctg}(t+1)+C =$$
$$= \ln|\ln x-1|-\frac{1}{2}\ln(\ln^2 x+2\ln x+2)+3\,\mathrm{arctg}(\ln x+1)+C.$$

II. 3. Speciální integrační metody

- Integrály typu
$$\int f\left(x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, \dots, \sqrt[r_k]{x}\right)\, dx,$$
tj. integrály obsahující proměnnou x pod odmocninou, kde $k \in \mathbb{N}$ a $r_1 \geq 2, \dots, r_k \geq 2$ jsou přirozená čísla, řešíme substitucí $t^n = x$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $r_1, \dots, r_k$. Pomocí této substituce převedeme původní integrál na integrál z racionální lomené funkce.
- Integrály typu
$$\int f\left(x, \sqrt[r]{ax+b}\right)\, dx,$$
$r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, řešíme substitucí $t^r = ax + b$. Pomocí této substituce převedeme původní integrál na integrál z racionální lomené funkce.
- Integrály typu
$$\int f\left(x, \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\, dx,$$
kde $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $ad - bc \neq 0$, řešíme substitucí $t^r = \frac{ax+b}{cx+d}$. Pomocí této substituce převedeme původní integrál na integrál z racionální lomené funkce.
- Integrály typu
$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx,$$
kde $b^2 - 4ac \neq 0$, tj. kvadratický polynom nemá dvojnásobný reálný kořen, řešíme pomocí tzv. *Eulerovy substituce*. Existuje několik variant těchto substitucí, zde uvedeme některé z nich:
  i) jestliže $a > 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, obdržíme
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 \frac{x-x_2}{x-x_1}} = \sqrt{a} \cdot |x-x_1| \sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}},$$
  což s použitím substituce $t^2 = \frac{x-x_2}{x-x_1}$ převedeme na integrál z racionální lomené funkce;
  ii) jestliže $a < 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, obdržíme
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 \frac{x_2-x}{x-x_1}} = \sqrt{-a} \cdot (x-x_1) \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}},$$
  což s použitím substituce $t^2 = \frac{x_2-x}{x-x_1}$ převedeme na integrál z racionální lomené funkce;
  iii) jestliže $a > 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$ nebo jestliže kvadratický polynom nemá reálné kořeny, můžeme použít substituci
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \cdot x \pm t,$$
  přičemž volba konkrétních znamének je zcela libovolná, čímž obdržíme integrál z racionální lomené funkce;
  iv) jestliže $c \geq 0$, můžeme zavést substituci
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x \cdot t \pm \sqrt{c},$$
  s jejíž pomocí převedeme integrál na integrál z racionální lomené funkce.
- Integrály typu
$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \qquad m, n, p \in \mathbb{Q},$$
tedy tzv. *binomický integrál*, řešíme jednou z následujících substitucí
  i) jestliže $p \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $x = t^s$, kde s je společný jmenovatel m a n;
  ii) jestliže $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $a + bx^n = t^s$, kde s je jmenovatel p;

iii) jestliže $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $ax^{-n} + b = t^s$, kde s je jmenovatel p.

- Integrály typu
$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx,$$
kde $m, n \in \mathbb{Z}$ řešíme pomocí substituce
  i) $t = \sin x$, jestliže m je liché a n sudé nebo nula;
  ii) $t = \cos x$, jestliže n je liché a m sudé nebo nula;
  iii) $t = \cos x$ nebo $t = \sin x$, jestliže m a n jsou lichá čísla;
  iv) jestliže m i n jsou sudá čísla, případně některé z nich nula, upravíme výraz pomocí vzorců $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ a $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Dále pokračujeme dle získaného výsledku krokem i)–iv).
- Integrály typu
$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx,$$
řešíme pomocí substituce
  i) jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \sin x$;
  ii) jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \cos x$;
  iii) jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \operatorname{tg} x$;
  iv) jestliže nenastane ani jedna z předchozích možností, použijeme k řešení tzv. *univerzální substituci:*
$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} x \quad \text{a} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt.$$
  Potom z obrázku



  získáme identity
$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{a} \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(363) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t^4+t+1}{t^2+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^4+t+1}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\int \left(t^3 - t^2 + t + \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + x + 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$$

(364) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^6 = x \\ 6t^5\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{1+t^3-t^2}{t^6+t^5}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{1-t^2+t^3}{t+1}\,dt =$$
$$= 6\int \left(t^2-2t+2-\frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3}-t^2+2t-\ln|t+1|\right)+C =$$
$$= 2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

(365) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx \left| \begin{array}{l} t^2 = x+1 \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t+1}{t-1}\,2t\,dt = 2\int \frac{t(t+1)}{t-1}\,dt =$$

$$= 2\int \left(t+2+\frac{2}{t-1}\right) dt = 2\left(\frac{t^2}{2}+2t+2\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C.$$

(366) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{x+1}{x-1} \\ x = \frac{1+t^2}{t^2-1} \\ dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} t \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$
$$= -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 2\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= -\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right| + \ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C =$$
$$= 2\ln\left|\sqrt{|x+1|} - \sqrt{|x-1|}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

(367) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})} \left| \begin{array}{c} t^{10}=x \\ 10t^9\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{10t^9}{t^{10}(t^5+t^4)}\,dt = 10\int \frac{dt}{t^6+t^5} =$$

$$= 10\int \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^5}-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 10\left(\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{4t^4}-\ln|t+1|\right)+C =$$

$$= \ln\frac{x}{(\sqrt[10]{x}+1)^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C.$$

(368) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^3 = 3x+1 \\ x = \frac{t^3-1}{3} \\ 3\,dx = 3t^2\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^3-1}{3}+1}{t} t^2\,dt = \int \frac{t^3-1+3}{3} t\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(t^4+2t\right)dt = \frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5}+t^2\right) + C = \frac{t^2}{3}\left(\frac{t^3}{5}+1\right) + C =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{3}\left(\frac{3x+1}{5}+1\right) + C = \sqrt[3]{(3x+1)^2}\cdot\frac{x+2}{5} + C.$$

(369) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^6 = x+1 \\ 6t^5\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{1-t^3}{1+t^2}\,6t^5\,dt =$$
$$= 6\int \left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}\right) dt =$$
$$= -\frac{6t^7}{7}+\frac{6t^5}{5}+\frac{6t^4}{4}-\frac{6t^3}{3}-\frac{6t^2}{2}+6t+6\int\left(\frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$
$$= -\frac{6t^7}{7}+\frac{6t^5}{5}+\frac{3t^4}{2}-2t^3-3t^2+6t+3\ln\left|1+t^2\right|-6\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= -\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+$$
$$+6\sqrt[6]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.$$

(370) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx \left|\begin{array}{c} t^2 = \frac{1+x}{x} \\ x = \frac{1}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt \end{array}\right| = \int (t^2-1)^2\, t\, \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt =$$

$$= -\int 2t^2\,dt = -\frac{2t^3}{3} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} + C.$$

(371) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} - 4}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} - 4} \left| \begin{array}{c} t^3 = x+2 \\ 3t^2\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{3t^2}{t^2 - 3t - 4}\,dt =$$

$$= \int \left(3 - \frac{3}{5(t+1)} + \frac{48}{5(t-4)} \right) dt = 3t - \frac{3}{5}\ln|t+1| + \frac{48}{5}\ln|t-4| + C =$$

$$= 3\sqrt[3]{x+2} - \frac{3}{5}\ln\left|\sqrt[3]{x+2}+1\right| + \frac{48}{5}\ln\left|\sqrt[3]{x+2}-4\right| + C.$$

(372) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} 2t\,dt = 2\int \frac{(1+t)\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-t^2}}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\int \left(\sqrt{1-t^2} - \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} \right) dt \overset{\text{Př. (345)}}{=}$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,dt \left| \begin{array}{c} t = \sin u \\ \arcsin t = u \\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = du \end{array} \right| =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2\int \frac{1-\sin^2 u}{1+\sin u}\,du =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2\int (1-\sin u)\,du =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2u - 2\cos u + C =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2u - 2\sqrt{1-\sin^2 u} + C =$$

$$= \sqrt{x}\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x} - 2\arcsin\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} + C =$$

$$= \left(\sqrt{x} - 2\right)\sqrt{1-x} - \arcsin\sqrt{x} + C.$$

(373) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x+1 \\ t^2-2 = x-1 \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| = 2\int \frac{t-\sqrt{t^2-2}}{t+\sqrt{t^2-2}}\,t\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t-\sqrt{t^2-2}}{t+\sqrt{t^2-2}}\,t\,\frac{\sqrt{t^2-2}}{t-\sqrt{t^2-2}}\,\frac{t-\sqrt{t^2-2}}{\sqrt{t^2-2}}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{\left(t-\sqrt{t^2-2}\right)t\sqrt{t^2-2}}{2}\,\frac{t-\sqrt{t^2-2}}{\sqrt{t^2-2}}\,dt \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{t^2-2}-t \\ -\frac{u^2+2}{2u} = t \\ du = \frac{t-\sqrt{t^2-2}}{\sqrt{t^2-2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(-u\left(-\frac{u^2+2}{2u}\right)\left(u-\frac{u^2+2}{2u}\right)\right)du =$$

$$= \int \frac{u^2+2}{2}\,\frac{u^2-2}{2u}\,du = \int \left(\frac{1}{4}u^3-\frac{1}{u}\right)du =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{u^4}{4} - \ln|u| + C = \frac{1}{16}\left(\sqrt{t^2-2}-t\right)^4 - \ln\left|\sqrt{t^2-2}-t\right| + C =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)^4 - \ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{16}\Big((x-1)^2 - 4(x-1)^{3/2}(x+1)^{1/2} + 6(x-1)(x+1) -$$

$$- 4(x-1)^{1/2}(x+1)^{3/2} + (x+1)^2\Big) - \ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{16}\Big(x^2-2x+1-4(x-1)^{3/2}(x+1)^{1/2}+6\left(x^2-1\right) -$$

$$- 4(x-1)^{1/2}(x+1)^{3/2} + x^2+2x+1\Big) - \ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right| - \frac{1}{4} + C.$$

(374) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} \;\Big|\text{ polynom } -x^2+x+2 \text{ má reálné kořeny } 2,-1 \Big| =$$

$$= \int \frac{dx}{1+(x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}} \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{2-x}{x+1} \\ x = \frac{2-t^2}{t^2+1} \\ x+1 = \frac{3}{t^2+1} \\ dx = \frac{-6t}{(t^2+1)^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{-6t}{(t^2+1)^2}}{1+\frac{3}{t^2+1}\,t}\,dt =$$

$$= \int \frac{-6t}{(t^2+1)^2}\,\frac{t^2+1}{t^2+3t+1}\,dt = -6\int \frac{t}{(t^2+1)(t^2+3t+1)}\,dt =$$

$$= \int \left(-\frac{4}{5}\frac{\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}} - \frac{2}{t^2+1} - \frac{4}{5}\frac{\sqrt{5}}{-2t-3+\sqrt{5}} \right) dt =$$

$$= -\frac{4\sqrt{5}}{5}\frac{1}{2}\ln\left|2t+3+\sqrt{5}\right| - 2\operatorname{arctg} t - \frac{4\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)\ln\left|-2t-3+\sqrt{5}\right| + C =$$

$$= -\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\left|2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+3+\sqrt{5}\right| + \frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\left|-2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}-3+\sqrt{5}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + C.$$

(375) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} \left| \begin{array}{c} \text{polynom } x^2+x+1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2+x+1} = x+t \\ x = \frac{1-t^2}{2t-1} \\ x-1 = -\frac{t^2+2t-2}{2t-1} \\ x+t = \frac{t^2-t+1}{2t-1} \\ dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{-\frac{t^2+2t-2}{2t-1}\,\frac{t^2-t+1}{2t-1}}\,dt = \int \frac{2}{t^2+2t-2}\,dt = \int \left(-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{-t-1+\sqrt{3}}\right) dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|t+1+\sqrt{3}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|-t-1+\sqrt{3}\right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x+1+\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2+x+1}-1+\sqrt{3}}\right| + C.$$

(376) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} \left| \begin{array}{c} \text{polynom } x^2-x+1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2-x+1} = t-x \\ x = \frac{t^2-1}{2t-1} \\ dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{\frac{t^2-1}{2t-1} + t - \frac{t^2-1}{2t-1}}\, dt = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2} \right) dt \left| \begin{array}{c} u = 2t-1 \\ du = 2dt \end{array} \right| = 2\ln|t| + \int \left(-\frac{3}{2u} + \frac{3}{2u^2} \right) du =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|u| - \frac{3}{2u} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2(2t-1)} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right| - \frac{1}{4x+2\sqrt{x^2-x+1}-2} + C.$$

(377) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}} \ \Big|\ \text{polynom } x^2+3x-4 \text{ má reálné kořeny } 1, -4 \ \Big| =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+4)\,|x+4|\,\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{x-1}{x+4} \\ x = \frac{4t^2+1}{1-t^2} \\ x+4 = \frac{5}{1-t^2} \\ dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}}{\left(\frac{5}{1-t^2}\right)\left|\frac{5}{1-t^2}\right| t}\,dt = \int \frac{2}{5}\frac{\left|1-t^2\right|}{1-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{5}\operatorname{sgn}\left(1-t^2\right)\int 1\,dt = \frac{2}{5}\operatorname{sgn}\left(1-t^2\right)t + C = \frac{2}{5}\operatorname{sgn}(x+4)\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C = \frac{2}{5}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3x-4}} + C.$$

(378) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} \;\Big|\, \text{polynom } x^2+3x+2 \text{ má reálné kořeny } -1,-2 \,\Big| =$$

$$= \int \frac{x\,dx}{|x+2|\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{x+1}{x+2} \\ x = \frac{2t^2-1}{1-t^2} \\ x+2 = \frac{1}{1-t^2} \\ dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2t^2-1}{1-t^2}\,\frac{2t}{(1-t^2)^2}}{\left|\frac{1}{1-t^2}\right| t}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t(2t^2-1)}{(1-t^2)^3}\,\frac{|1-t^2|}{t}\,dt = \operatorname{sgn}(1-t^2) \int \frac{4t^2-2}{(1-t^2)^2}\,dt =$$

$$= \operatorname{sgn}(1-t^2) \int \left(\frac{1}{2(t-1)^2} + \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{3}{2(t+1)} + \frac{3}{2(t-1)} \right) dt =$$

$$= \operatorname{sgn}(1-t^2) \left(-\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{3}{2}\ln|t+1| + \frac{3}{2}\ln|t-1| \right) + C =$$

$$= \operatorname{sgn}(1-t^2) \left(-\frac{1}{2}\,\frac{2t}{t^2-1} - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| \right) + C =$$

$$= -\operatorname{sgn}(1-t^2)\,\frac{t}{t^2-1} - 3\operatorname{sgn}(1-t^2)\ln\frac{\sqrt{|t+1|}}{\sqrt{|t-1|}} + C =$$

$$= \operatorname{sgn}(x+2)\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,\frac{1}{x+2} - 3\operatorname{sgn}(1-t^2)\ln\sqrt{\frac{(t+1)^2}{|t^2-1|}} + C =$$

$$= \operatorname{sgn}(x+2)\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,\frac{1}{x+2} - 3\operatorname{sgn}(1-t^2)\ln\frac{|t+1|}{\sqrt{|t^2-1|}} + C =$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2} - 3\operatorname{sgn}(x+2)\ln\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}+1}{\sqrt{\left|-\frac{1}{x+2}\right|}} + C =$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2} - 3\operatorname{sgn}(x+2)\ln\left(\frac{\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x+2|}}{\sqrt{|x+2|}}\sqrt{|x+2|} \right) + C =$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2} - 3\operatorname{sgn}(x+2)\ln\left(\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x+2|} \right) + C.$$

(379) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}} \left| \begin{array}{c} \text{polynom } x^2+x-1 \text{ má reálné kořeny } -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x^2+x-1} = x+t \\ x = \frac{t^2+1}{1-2t} \\ x+t = \frac{-(t^2-t-1)}{1-2t} \\ dx = \frac{-2(t^2-t-1)}{(1-2t)^2}\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^2-t-1)}{(t^2+1-t^2+t+1)(1-2t)}\, dt = \int \left(1 - \frac{2}{t+2} - \frac{1}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right) dt =$$

$$= t - 2\ln|t+2| - \frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right| + C =$$

$$= \sqrt{x^2+x-1} - x - 2\ln\left|\sqrt{x^2+x-1}-x+2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+x-1}-x-\frac{1}{2}\right| + C.$$

(380) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+16x-15}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+16x-15}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{-x^2+4x-\frac{15}{4}}} \;\left|\text{ polynom } x^2+x-1 \text{ má reálné kořeny } \tfrac{5}{2} \text{ a } \tfrac{3}{2}\right| =$$

$$= \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(\frac{5}{2}-x\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}} = \int \frac{dx}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{\frac{5}{2}-x}{x-\frac{3}{2}}}} \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{\frac{5}{2}-x}{x-\frac{3}{2}} \\ x = \frac{5+3t^2}{2t^2+2} \\ x-\frac{3}{2} = \frac{1}{t^2+1} \\ dx = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{-2t}{(t^2+1)^2}}{2\frac{1}{t^2+1}\,t}\,dt =$$

$$= -\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\operatorname{arctg} t + C = -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5-2x}{2x-3}} + C.$$

(381) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \sqrt[3]{x}(7+5x^4)^2\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \sqrt[3]{x}(7+5x^4)^2\,dx \;\Big|\, p=2\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=t^3,\;\; dx=3t^2\,dt \,\Big| \;=$$

$$= \int t(7+5t^{12})^2 3t^2\,dt = 3\int t^3(49+70t^{12}+25t^{24})\,dt =$$

$$= 3\int 49t^3+70t^{15}+25t^{27}dt = \frac{3t^4}{56}(686+245t^{12}+50t^{24})+C =$$

$$= \frac{3}{56}x\sqrt[3]{x}(686+245x^4+50x^8)+C.$$

(382) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{(2+5x)^3}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \frac{(2+5x)^3}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{4}}(2+5x)^3\,dx \;\Big|\; p = 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = t^4,\ dx = 4t^3\,dt \;\Big|\; =$$

$$= \int t^{-3}(2+5t^4)^3 4t^3 dt = 4\int (2+5t^4)^3 dt =$$

$$= 4\int \left(8 + 60t^4 + 150t^8 + 125t^{12}\right) dt = 4\left(8t + 12t^5 + \frac{50}{3}t^9 + \frac{125}{13}t^{13}\right) + C =$$

$$= \frac{4}{39}\sqrt[4]{x}(312 + 468x + 650x^2 + 375x^3) + C.$$

(383) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int x\sqrt{2-3\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int x\sqrt{2-3\sqrt{x}}dx \left| \begin{array}{c} p=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}, \frac{m+1}{n}=4\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow 2-3\sqrt{x}=t^2, \sqrt{x}=\frac{2-t^2}{3}, \\ -3\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=2t\,dt, x^{-\frac{1}{2}}\,dx=-\frac{4}{3}t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{2-t^2}{3}\right)^3 \sqrt{2-3\frac{2-t^2}{3}}\left(-\frac{4}{3}t\right)dt = -\frac{4}{3^4}\int (2-t^2)^3 t^2\,dt =$$

$$= -\frac{4}{3^4}\int 8t^2-12t^4+6t^6-t^8\,dt = -\frac{4}{3^4}t^3\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{5}t^2+\frac{6}{7}t^4-\frac{1}{9}t^6\right)+C =$$

$$= -\frac{4}{81}(2-3\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}\left[\frac{8}{3}-\frac{12}{5}(2-3\sqrt{x})+\frac{6}{7}(2-3\sqrt{x})^2-\frac{1}{9}(2-3\sqrt{x})^3\right]+C.$$

(384) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}\,dx \left| \begin{array}{c} p=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3,\ x=(t^3-1)^4, \\ dx=4(t^3-1)^3 3t^2\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (t^3-1)^{-2} t 12t^2 (t^3-1)^3\,dt = 12\int t^3(t^3-1)\,dt = 12\int t^6-t^3\,dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = 12(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1+x^{\frac{1}{4}}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

(385) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \sqrt{x}\sqrt[7]{\left(\frac{\sqrt{x^3}}{27}-3\right)^2}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \sqrt{x}\sqrt[7]{\left(\frac{\sqrt{x^3}}{27}-3\right)^2}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(-3+\tfrac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{7}}dx$$

$$\left|\begin{array}{c} p=\frac{2}{7}\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=1\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow -3+\frac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}=t^7, x=9(t^7+3)^{\frac{2}{3}}, \\ dx=42(t^7+3)^{-\frac{1}{3}}t^6\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int 3(t^7+3)^{\frac{1}{3}}t^2 42(t^7+3)^{-\frac{1}{3}}t^6\,dt =$$

$$= 126\int t^8\,dt = 14t^9+C = 14\left(\tfrac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}-3\right)^{\frac{9}{7}}+C.$$

(386) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,dx = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx$$

$$\left| \begin{array}{c} p = -\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow 1x^{-4} + 1 = t^4,\ x = (t^4-1)^{-\frac{1}{4}}, \\ 1 + x^4 = t^4x^4 = t^4(t^4-1)^{-1}, \\ dx = -\frac{1}{4}(t^4-1)^{\frac{5}{4}}4t^3\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t^{-1}(t^4-1)^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right)(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}4t^3\,dt = -\int \frac{t^2}{t^4-1}\,dt =$$

$$= -\int \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}\,dt = -\int \left(\frac{\frac{1}{4}}{t-1} - \frac{\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{4}(\ln|t-1| - \ln|t+1| + 2\operatorname{arctg} t) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\ln(\sqrt[4]{x^{-4}+1} - 1) - \ln(\sqrt[4]{x^{-4}+1} + 1) + 2\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{x^{-4}+1})\right] + C.$$

(387) Pomocí vhodné substituce převeďte binomický integrál na integrál z racionální lomené funkce.
$$\int \sqrt{2x^2 + x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \sqrt{2x^2+x}\,dx = \int \sqrt{x(1+2x)}\,dx$$
$$\left| \begin{array}{c} p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} + p = 2 \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow 1x^{-1} + 2 = t^2, x = (t^2-2)^{-1}, \\ 1 + 2x = t^2 x = t^2(t^2-2)^{-1}, \\ dx = -2t(t^2-2)^{-2}\,dt \end{array} \right| =$$
$$= \int (t^2-2)^{\frac{1}{2}} t (t^2-2)^{\frac{1}{2}} (-2t)(t^2-2)^{-2}\,dt = -2\int \frac{t^2}{(t^2-2)^3}\,dt.$$

(388) Pomocí vhodné substituce převeďte binomický integrál na integrál z racionální lomené funkce.

$$\int x\sqrt[3]{8-7x^3}\,dx.$$

Řešení:

$$\int x\sqrt[3]{8-7x^3}\,dx$$

$$\left|\begin{array}{c} p=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}, \frac{m+1}{n}=\frac{2}{3}\notin\mathbb{Z}, \frac{m+1}{n}+p=1\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow 8x^{-3}-7=t^3, x=2(t^3+7)^{-\frac{1}{3}}, \\ 8-7x^3=t^3x^3=t^3 8(t^3+7)^{-1}, \\ dx=-2t^2(t^3+7)^{-\frac{4}{3}}\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int 2(t^3+7)^{-\frac{1}{3}}t2(t^3+7)^{-\frac{1}{3}}(-2)t^2(t^3+7)^{-\frac{4}{3}}\,dt = -8\int \frac{t^3}{(t^3+7)^2}\,dt.$$

(389) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \, dx.$$

Řešení:

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \cdot \sin^2 x \, dx \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| =$$
$$= \int \left(1 - t^2\right)^2 t^2 \, dt = \int \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right) dt = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C =$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2 \sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

(390) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^4 x \, dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^4 x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \cdot \sin^4 x \, dx \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| =$$
$$= \int \left(1 - t^2\right)^2 t^4 \, dt = \int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$
$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

(391) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \int -\frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} =$$
$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| + C == \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2\tfrac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right| + C.$$

(392) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\, dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\, dx \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{1 + 4t^2 + 3 - 3t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{t^2 + 4 - 5}{t^2 + 4}\, dt = \int \left(1 - 5\frac{1}{t^2 + 4}\right) dt = t - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C =$$

$$= \cos x - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2} + C.$$

(393) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\, dt = \int \frac{1}{1+2t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

(394) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

(395) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{5}{4+\sin x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{5}{4+\sin x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\operatorname{tg} x \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{5}{4+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{10}{4+4t^2+2t}\,dt =$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{t}{2}+1} = \frac{5}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}} = \frac{5}{2}\,\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} + C =$$
$$= \frac{10}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4t+1}{\sqrt{15}} + C = \frac{2\sqrt{15}}{3}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}} + C.$$

(396) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{2-\cos x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{2-\cos x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{3t^2+1}\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

(397) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1+t| + C = -\ln|1+\cos x| + C.$$

(398) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{2-t}\,dt = \int \left(2+t+\frac{3}{t-2}\right)\,dt =$$

$$= 2t+\frac{t^2}{2}+3\ln|t-2|+C = 2\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+3\ln|\sin x-2|+C.$$

(399) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\, dx.$$

__Řešení:__

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}\, dx \;\left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array}\right| = \int \frac{t}{t-1}\, \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}\, dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{1}{2}\, \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1}\, dt + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{4} \ln\left|t^2+1\right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{4} \ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 1\right| + \frac{x}{2} + C.$$

(400) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2+2t^2-2t}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 4\int \frac{t^2-t+1}{(1+t^2)(t^2+3)}\,dt = 2\int \frac{2+t}{t^2+3}\,dt - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + 4\int \frac{dt}{t^2+3} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \ln\left|t^2+3\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \ln\left|1+t^2\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

(401) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx.$$

Řešení:

Tento příklad je jedním z mála příkladů, které lze řešit jiným způsobem než univerzální substitucí $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ale právě využití této substituce je nejvýhodnější. (Porovnejte s Příkladem 391.)

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx \;\left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right| + C.$$

(402) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Tento příklad je možné řešit substitucí $t = 2x$ a následně substitucí $z = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Výhodnější je ale následující způsob.

$$\int \frac{1}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{1+2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t+1} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + C.$$

(403) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,y \\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dy \end{array} \right| = \int \frac{1}{\frac{3}{4}(y^2+1)}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dy = \frac{2\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg} y + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(404) Pomocí vhodné substituce převeďte daný integrál na integrál racionální lomené funkce.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1 + 2\operatorname{cotg} x}\,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + 2\frac{1-t^2}{2t}}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2})}\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 31. Po rozkladu na parciální zlomky, integraci racionálních lomených funkcí a vrácení substituce vyjde

$$\cdots = \frac{8\sqrt{5}}{25}\operatorname{arctgh}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}-1)\right] - \frac{2}{5}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} + C =$$
$$= -\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x - \frac{8\sqrt{5}}{25}\operatorname{arctgh}\left[\frac{\sqrt{5}\,(\sin x + 2\cdot\cos x - 2)}{5\sin x}\right] + C.$$

II. 4. Určitý a nevlastní integrál

Určitý integrál

Věta 32 (Newtonova–Leibnizova formule). *Nechť f je integrovatelná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť F je její primitivní funkce. Pak platí, že*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Základní vzorce pro integrování ($k \in \mathbb{R}$):

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Věta 33 (Metoda per-partes pro určitý integrál). *Nechť funkce u a v mají na intervalu $\langle a, b\rangle$ derivace u' a v', které jsou na tomto intervalu integrovatelné. Pak platí*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Věta 34 (Substituční metoda pro určitý integrál). *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť funkce φ má derivaci φ' na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, která je na tomto intervalu integrovatelná. Dále nechť platí $a \le \varphi \le b$ pro $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$ (tzn., že funkce $\varphi(x)$ zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ do intervalu $\langle a, b\rangle$). Potom platí (přesněji „z existence integrálu nalevo plyne existence integrálu napravo a jejich rovnost“)*

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Nevlastní integrál

Definice 35. Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ se nazývá *nevlastní* pokud alespoň jedno z čísel a, b je rovno $\pm\infty$, nebo je funkce f neomezená na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ (tedy alespoň v jednom bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ má funkce f singulární bod – nemusí jít nutně o krajní bod a nebo b, ale singulární bod může ležet i uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$).

Definice 36. Nechť existuje $\lim_{c\to+\infty} F(c) = I$, $I \in \mathbb{R}$. Pak řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konverguje* a jeho hodnota je I. Tedy

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} F(c),$$

kde $F(c) := \int_a^c f(x)\,dx$. V opačném případě, tj. když $\lim_{c\to+\infty} F(c)$ je nevlastní nebo neexistuje, řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverguje*.

(405) Vypočtěte
$$\int_1^2 x^2\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

(406) Vypočtěte

$$\int_0^1 x\,(x^2-1)^3\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_0^1 x\,(x^2-1)^3\,dx \left| \begin{array}{c} t = x^2-1 \\ dt = 2x\,dx \\ 0 \rightsquigarrow -1 \\ 1 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 t^3\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}.$$

(407) Vypočtěte

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \, dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2} \, dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} 1 \, dt - \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} \, dt =$$

$$= [t - \operatorname{arctg} t]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}.$$

(408) Vypočtěte
$$\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{2x}+3} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$$

Řešení:

Využijeme aditivity integrálu a pro přehlednost zadaný integrál rozdělíme na dvě části.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \\ 1 \rightsquigarrow e \\ 0 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^e \frac{1}{t^2+3}\,dt = \frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt \left| \begin{array}{c} s = \frac{t}{\sqrt{3}} \\ ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\,dt \\ e \rightsquigarrow \frac{e}{\sqrt{3}} \\ 1 \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{e}{\sqrt{3}}} \frac{1}{s^2+1}\,ds = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{arctg} s\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{e}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{e\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = [\operatorname{tg} x]_0^1 = \operatorname{tg} 1.$$

Celkem tedy
$$\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{2x}+3} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{e\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} 1.$$

(409) Vypočtěte

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx, \quad a, b \in \mathbb{R}, a < 0, b > 0.$$

Řešení:

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx = \int_a^0 (-1) \, dx + \int_0^b 1 \, dx = [-x]_a^0 + [x]_0^b = a + b.$$

(410) Vypočtěte

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-3)^5}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-3)^5}\,dx \left| \begin{array}{c} t = x-3 \\ dt = dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ 0 \rightsquigarrow -3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-3}^{\infty} \frac{1}{t^5}\,dt = -\frac{1}{4}[t^{-4}]_{-3}^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\lim_{a\to\infty} a^{-4} - (-3)^{-4}\right) = -\frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{3^4}\right) = \frac{1}{324}.$$

(411) Vypočtěte

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx \left| \begin{array}{c} t = x+2 \\ dt = dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ 0 \rightsquigarrow 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2[\sqrt{t}]_2^{\infty} =$$

$$= 2\left(\lim_{a\to\infty} \sqrt{a} - \sqrt{2}\right) = 2(\infty - \sqrt{2}) = \infty.$$

(412) Vypočtěte

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ 1 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_1^\infty e^{-t}\,dt = 2[-e^{-t}]_1^\infty =$$

$$= -2\left(\lim_{t\to\infty} e^{-t} - e^{-1}\right) = \frac{2}{e}.$$

(413) Vypočtěte

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = [\operatorname{arctg} x]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(414) Vypočtěte

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}.$$

Řešení:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

(415) Vypočtěte
$$\int_0^\infty \sin x \, dx.$$

Řešení:

$$\int_0^\infty \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty} \cos x + \cos 0 \quad \text{limita neexistuje} \;\Rightarrow\; \text{integrál diverguje.}$$

(416) Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx.$$

Řešení:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = [e^x]_{-\infty}^{0} = 1 - \lim_{x \to -\infty} e^x = 1.$$

(417) Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu vzhledem k číslu $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx.$$

Řešení:

Buď $\alpha = -1$, potom
$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_1^\infty = \infty.$$
Nyní uvažujme $\alpha \neq -1$, potom
$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^\infty = \frac{1}{\alpha+1} \left(\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} - 1 \right).$$
Pro $\alpha > -1$, tj. $\alpha + 1 > 0$, platí $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} = \infty$. Dále pro $\alpha < -1$, tj. $\alpha + 1 < 0$, platí $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} = 0$. To znamená, že
$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} \text{diverguje}, & \alpha \geq -1, \\ -\frac{1}{\alpha+1}, & \alpha < -1. \end{cases}$$

(418) Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu vzhledem k číslu $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty e^{\alpha x}\, dx.$$

Řešení:

Buď $\alpha = 0$, potom

$$\int_1^\infty 1\, dx = [x]_0^\infty = \infty.$$

Nyní uvažujme $\alpha \neq 0$, potom

$$\int_0^\infty e^{\alpha x}\, dx = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}\left(\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} - 1\right).$$

Pro $\alpha > 0$ platí $\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} = \infty$. Dále pro $\alpha < 0$ platí $\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} = 0$. To znamená, že

$$\int_0^\infty e^{\alpha x}\, dx = \begin{cases} \text{diverguje}, & \alpha \geq 0, \\ -\frac{1}{\alpha}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

(419) Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu vzhledem k číslu $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ e \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_1^\infty t^\alpha \overset{\text{Př. (417)}}{=} \begin{cases} \text{diverguje}, & \alpha \geq -1, \\ -\frac{1}{1+\alpha}, & \alpha < 1. \end{cases}$$

(420) Vypočtěte

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4+x^2}.$$

Řešení:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4+x^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2\,(x^2+1)} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty - [\operatorname{arctg} x]_1^\infty = 0 + 1 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(421) Vypočtěte

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx \left| \begin{matrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{matrix} \right| = \\
&= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{matrix} \right| = \\
&= -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} - 2\left[x\, e^{-x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \\
&= 0 - 2\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} - 2\left[e^{-x}\right]_0^\infty = 2\left(\lim_{x\to\infty} e^{-x} - 1\right) = 2.
\end{aligned}$$

(422) Vypočtěte

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx \left| \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{1}{1+x^2}\,dx = dt \\ \infty \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \\ 1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}.$$

(423) Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

__Řešení:__

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}\, dx \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x\, dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ -\infty \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = [\operatorname{arctg} t]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

(424) Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx \left| \begin{array}{c} t = x^3 \\ dt = 3x^2\,dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ -\infty \rightsquigarrow -\infty \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\left[\operatorname{arctg} t\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{3}.$$

(425) Vypočtěte

$$\int_0^2 \frac{dx}{x}.$$

Řešení:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_0^2 = \ln 2 - \lim_{x \to 0} \ln x = \infty \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

(426) Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu vzhledem k číslu $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 x^\alpha dx.$$

Řešení:

Rozdělme problém na tři případy.

(i) $\alpha \geq 0$

V tomto případě není integrál nevlastní a můžeme snadno spočítat, že

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

(ii) $\alpha = -1$

Počítejme

$$\int_0^1 x^{-1} dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \lim_{x\to 0^+} \ln x = 0 - (-\infty) = \infty.$$

(iii) $\alpha < 0, \alpha \neq -1$

Počítejme

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha > -1, \\ \infty, & \alpha < -1. \end{cases}$$

Celkem tedy

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha > -1, \\ \infty, & \alpha \leq -1. \end{cases}$$

(427) Vypočtěte

$$\int_{-1}^{1} \ln|x| \, dx.$$

Řešení:

$$\int_{-1}^{1} \ln|x| \, dx = \int_{-1}^{0} \ln(-x) \, dx + \int_{0}^{1} \ln x \, dx = 2\int_{0}^{1} \ln x \, dx$$

$$\left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = 2\left([x \ln x]_0^1 - \int_0^1 1 dx \right) = 2\left([x \ln x]_0^1 - [x]_0^1 \right) =$$

$$= 2\left(1 \ln 1 - \lim_{a \to 0} (a \ln a) - 1 + 0\right) = -2 - \lim_{a \to 0} (a \ln a) \; \left| 0 \cdot \infty \right| \; =$$

$$= -2 - \lim_{a \to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} \; \left| \tfrac{\infty}{\infty} \right| \; \overset{\text{l'H.p.}}{=} -2 - \lim_{a \to 0} (-a) = -2.$$

(428) Vypočtěte

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \left| \begin{array}{c} 1-x^2=t \\ -2x\,dx=dt \\ 1 \rightsquigarrow 0 \\ 0 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_1^0 \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{-1/2}\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_1^0 = -\left[\sqrt{t}\right]_1^0 = 1.$$

(429) Vypočtěte

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Řešení:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

(430) Vypočtěte

$$\int_0^2 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\, dx.$$

Řešení:

$$\int_0^2 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\, dx = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx + \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| \right]_1^2 =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| \right) + 0 + \frac{4}{2} + 0 - \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + (-\infty) + 2 - \frac{1}{2} - (-\infty) \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

(431) Vypočtěte

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Řešení:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} - 1 - 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty + \infty - 2 \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

Rozdělení na dva integrály je nutné, neboť jinak

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2,$$

tedy záporný výsledek pro integrál z kladné funkce, což je spor.

(432) Vypočtěte

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\, dx \\ 1 \rightsquigarrow 0 \\ 2 \rightsquigarrow \ln 2 \end{array} \right| = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t} = [\ln t]_0^{\ln 2} =$$

$$= \ln(\ln 2) - \lim_{t \to 0} \ln t = \ln(\ln 2) + \infty \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

(433) Vypočtěte

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx.$$

Řešení:

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx \left| \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}\, dt \\ 0 \rightsquigarrow -\infty \\ -1 \rightsquigarrow -1 \end{array} \right| = -\int_{-1}^{-\infty} t\, e^t\, dt \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v = e^t & v' = e^t \end{array} \right| = -\left[t\, e^t\right]_{-1}^{-\infty} + \int_{-1}^{-\infty} e^t\, dt =$$

$$= -\left[t\, e^t\right]_{-1}^{-\infty} + \left[e^t\right]_{-1}^{-\infty} = -\lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} - \frac{1}{e} + \lim_{t\to-\infty} e^t - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}.$$

(434) Vypočtěte

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Řešení:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \left| \begin{array}{c} t = x + \sqrt{x^2 - a^2} \\ dt = \left(1 + \frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) dx \\ a \rightsquigarrow a \\ b \rightsquigarrow b + \sqrt{b^2 - a^2} \end{array} \right| = \int_a^{b+\sqrt{b^2-a^2}} \frac{1}{t}\, dt =$$

$$= \left[\ln|t| \right]_a^{b+\sqrt{b^2-a^2}} = \ln\left(b + \sqrt{b^2 - a^2}\right) - \ln a = \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}.$$

(435) Vypočtěte

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\, e^{-x^2}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení:

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\, e^{-x^2}\, dx \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \\ 0 \rightsquigarrow 0 \\ \infty \rightsquigarrow \infty \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t^n & u' = nt^{n-1} \\ v = -\, e^{-t} & v' = e^t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[-t^n\, e^{-t}\right]_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-t}\, dt \right) =$$

$$= \frac{n}{2}\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-t}\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t^{n-1} & u' = (n-1)t^{n-2} \\ v = -\, e^{-t} & v' = e^t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{n}{2}\left(\left[-t^{n-1}\, e^{-t}\right]_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}\, e^{-t}\, dt \right) = \cdots =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots 2}{2}\int_0^\infty t\, e^{-t}\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t & u' = 1 \\ v = -\, e^{-t} & v' = e^t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{n!}{2}\left(\left[-t\, e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\, dt \right) = \frac{n!}{2}\left[-\, e^{-t}\right]_0^\infty = \frac{n!}{2}(-0+1) = \frac{n!}{2}.$$

II. 5. Aplikace integrálního počtu

Geometrické aplikace

- Určitý integrál
$$S = \int_a^b |f(x)| \, dx$$
lze geometricky interpretovat jako *obsah plochy vymezené grafem funkce* f v intervalu $[a, b]$.
- *Obsah obrazce ohraničeného uzavřenou křivkou* o parametrických souřadnicích $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$:
$$S = -\int_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t) \, dt = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, \psi'(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [\varphi(t)\, \psi'(t) - \psi(t)\, \varphi'(t)] \, dt.$$
Křivka je orientována kladně, tzn., že plocha leží nalevo od křivky.
- *Obsah plochy vymezené grafy funkcí* f a g v intervalu $[a, b]$ vypočteme pomocí určitého integrálu
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$
- *Délka grafu funkce* f pro $x \in [a, b]$:
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$
- *Délka křivky* zadané parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$:
$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \, dt.$$
- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojité nezáporné funkce f, $x \in [a, b]$ kolem osy x:
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$
- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojité nezáporné funkce f, $x \in [a, b]$, $a > 0$, kolem osy y
$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$
- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) \geq 0$, kolem osy x:
$$V_x = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \cdot |\varphi'(t)| \, dt.$$
- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) \geq 0$, kolem osy y:
$$V_y = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi(t)\, |\varphi'(t)| \, dt.$$
- *Obsah pláště rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojitě diferencovatelné nezáporné funkce f, $x \in [a, b]$ kolem osy x:
$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

- *Obsah pláště rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) \geq 0$, kolem osy x:

$$Q_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Fyzikální aplikace

Funkce $s(t)$ udává *délkovou hustotu* v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$ pro křivku zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom M vyjadřuje *hmotnost křivky* a

$$\left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right]$$

jsou souřadnice jejího *těžiště*, kde S_x a S_y jsou tzv. *statické momenty* křivky vzhledem k ose x, resp. y. Přičemž platí

$$\begin{aligned} M &= \int_\alpha^\beta s(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt, \\ S_x &= \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt, \\ S_y &= \int_\alpha^\beta s(t)\varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \end{aligned}$$

Nechť nyní funkce $s(x)$ udává *délkovou hustotu* v bodě $[x, f(x)]$ pro křivku grafem funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$. Potom platí

$$\begin{aligned} M &= \int_a^b s(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx, \\ S_x &= \int_a^b s(x)f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx, \\ S_y &= \int_a^b xs(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \end{aligned}$$

Funkce $S(t)$ udává *hustotu* obrazce vymezeného křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom M vyjadřuje jeho *hmotnost* a

$$\left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right]$$

jsou souřadnice jeho *těžiště*. Přičemž platí

$$\begin{aligned} M &= \int_\alpha^\beta S(t)\psi(t)\varphi'(t)\, dt, \\ S_x &= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta S(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\, dt, \\ S_y &= \int_\alpha^\beta S(t)\psi(t)\varphi(t)\varphi'(t)\, dt. \end{aligned}$$

Nechť nyní funkce $S(t)$ udává *hustotu* obrazce vymezeného křivkou určenou grafem funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$, a osou x. Potom M vyjadřuje jeho *hmotnost* a

$$\left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right]$$

jsou souřadnice jeho *těžiště*. Přičemž platí

$$M = \int_a^b S(x)f(x)\,dx,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int_a^b S(x)f^2(x)\,dx,$$

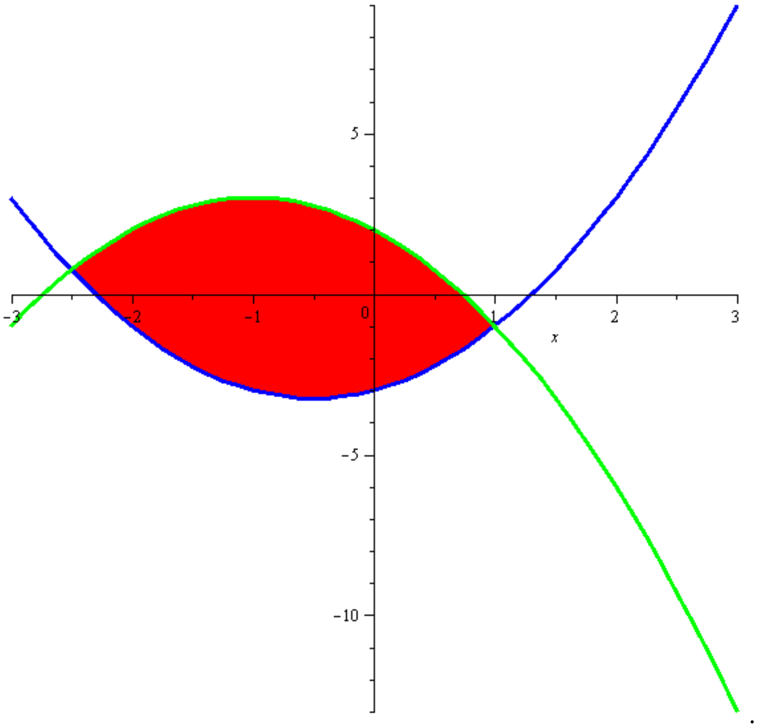
$$S_y = \int_a^b xS(x)f(x)\,dx.$$

(436) Určete obsah plochy vymezené grafy funkcí $f(x) = x^2 + x - 3$ a $g(x) = -x^2 - 2x + 2$.

Řešení:

Nejdříve musíme určit průsečík obou funkcí, tj. vyřešit rovnici $f(x) = g(x)$, tzn. že

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{5}{2} \text{ a } x_2 = 1.$$



Navíc, v intervalu $[-\frac{5}{2}, 1]$ platí $g(x) > f(x)$, proto hledaný obsah vypočteme s pomocí následujícího integrálu

$$S = \int_{-\frac{5}{2}}^{1} \left[(-x^2 - 2x + 2) - (x^2 + x - 3)\right] \, dx = \int_{-\frac{5}{2}}^{1} \left(-2x^2 - 3x + 5\right) \, dx =$$

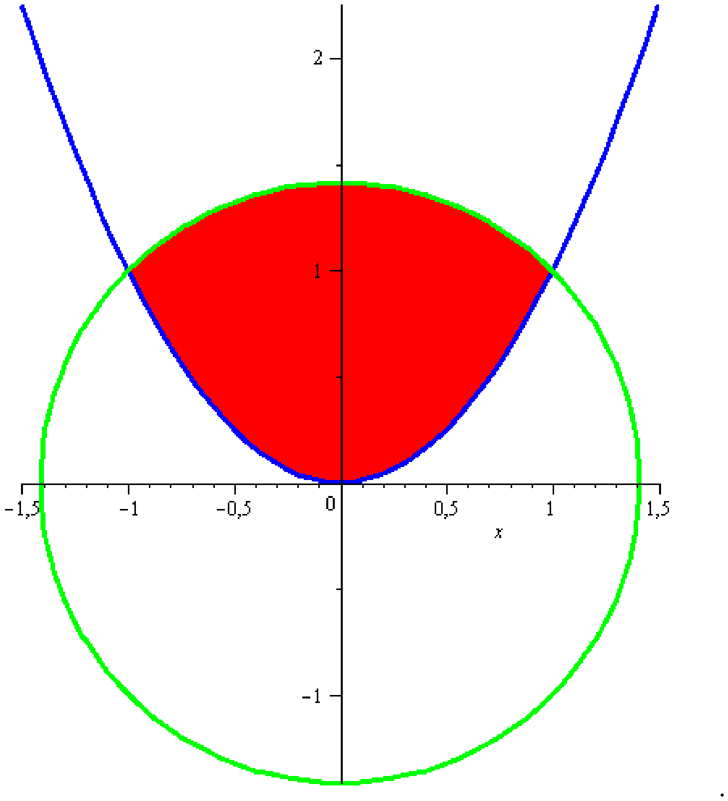
$$= \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right]_{-\frac{5}{2}}^{1} = -\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 5 - \left(\frac{250}{54} - \frac{75}{8} - \frac{25}{2}\right) = \frac{343}{24}.$$

(437) Určete obsah plochy ohraničené křivkami $x^2 + y^2 = 2$ a $y = x^2$.

Řešení:

Nejdříve musíme určit průsečík obou funkcí, tj.

$$y + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2 \text{ a } y_2 = 1.$$



Vzhledem k podmínce $y = x^2$ je pro nás zajímavá pouze hodnota y_2. Potom $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Navíc, na intervalu $[-1, 1]$ platí $\sqrt{2 - x^2} > x^2$, proto hledaný obsah dostaneme pomocí integrálu

$$S = \int_0 1 \left(\sqrt{2 - x^2} - x^2\right) dx = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Při výpočtu jsme využili následující integrál

$$\int \sqrt{2 - x^2}\, dx \left| \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{2}} = \sin t \\ \frac{dx}{\sqrt{2}} = \cos t\, dt \end{array} \right| = \int \sqrt{2 - 2\sin^2 t}\,\sqrt{2}\cos t\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{1 - \sin^2 t}\,\sqrt{2}\cos t\, dt = 2\int \cos^2 t\, dt \;\left|\; \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \;\right| =$$

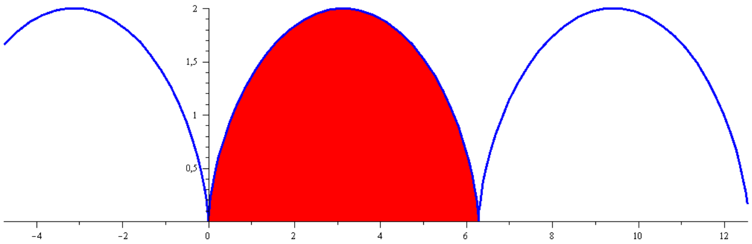
$$= 2\int \left(\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\right) dt = \int (\cos 2t + 1)\, dt = \frac{1}{2}\sin 2t + t + C =$$

$$= \sin t \cos t + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

(438) Určete obsah oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení:



Dosazením do vzorce pro obsah plochy mezi parametricky zadanými křivkami obdržíme

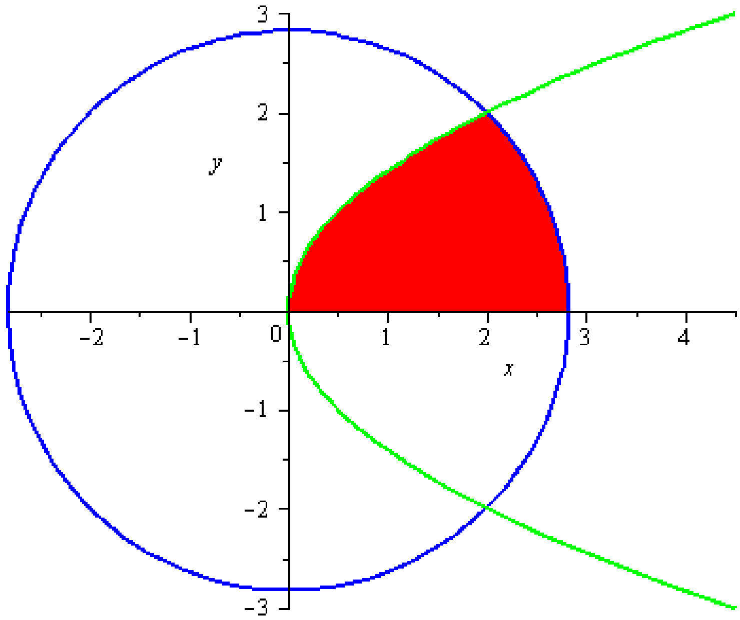
$$S = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt \;\left|\; \cos^2 t = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2t \;\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi.$$

(439) Určete, v jakém poměru dělí křivka $P: y^2 = 2x$ plochu kruhu $K: x^2 + y^2 = 8$.

Řešení:

Zadání je znázorněno na následujícím obrázku.



.

Z obrázku je zřejmé, že ve stejném poměru, jako dělí parabola kuh, dělí horní větev paraboly $y = \sqrt{2x}$ horní půlkruh $y = \sqrt{8 - x^2}$. Pro výpočet budeme potřebovat souřadnice průsečíku horní větve paraboly a horního půlkruhu. Poznamenejme, že nás zajímá pouze průsečík v I. kvadrantu, což nám umožní volnější úpravy.

$$
\begin{aligned}
y &= y, \\
\sqrt{2x} &= \sqrt{8 - x^2}, \\
2x &= 8 - x^2, \\
x^2 + 2x - 8 &= 0, \\
x &= 2.
\end{aligned}
$$

Průsečík má tedy souřadnice $[2, 2]$. Nyní spočítáme obsah červeně vyznačené plochy.

$$S = \int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{8}{3} + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{8}\sin t \\ dx = \sqrt{8}\cos t\,dt \\ \sqrt{8} \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} = \\ 2 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \frac{8}{3} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8 - 8\sin^2 t}\sqrt{8}\cos t\,dt =$$

$$= \frac{8}{3} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^2 t\,dt = \frac{8}{3} + 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{8}{3} + 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t\,dt = \frac{8}{3} + 4\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{8}{3} + 4\left(\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} + \pi.$$

Z rovnice kruhu vidíme, že jde o kruh o poloměru $\sqrt{8}$. Protože červená plocha má obsah $\frac{2}{3} + \pi$, zbytek horního půlkruhu má obsah $4\pi - \left(\frac{2}{3} + \pi\right) = 3\pi - \frac{2}{3}$. Hledaný poměr je tedy

$$\left(3\pi - \frac{2}{3}\right) : \left(\pi + \frac{2}{3}\right),$$

neboli

$$(9\pi - 2) : (3\pi + 2).$$

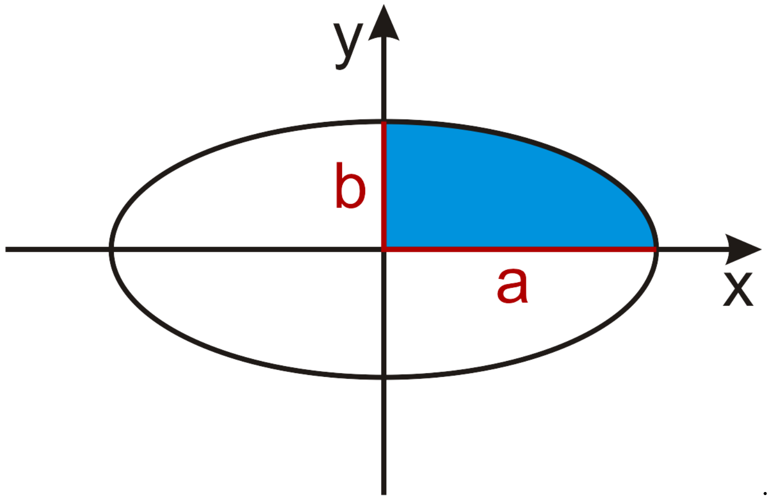
(440) Odvoďte vzorec pro výpočet plochy elipsy s poloosami a a b.

Řešení:

Obecná rovnice zadané elipsy je tvaru

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tato rovnice zadává implicitně funkci horní a dolní půlelipsy. Příklad vyřešíme tak, že si z rovnice elipsy explicitně vyjádříme funkci horní půlelipsy a pomocí ní pak spočítáme obsah čtvrtiny elipsy, která se nachází v I. kvadrantu.



Horní půlelipsa je dána funkcí

$$f : y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Interval, na kterém tato funkce zadává čtvrtelipsu v I. kvadrantu je $x \in [0, a]$. Můžeme tedy počítat

$$\frac{S}{4} = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx \left| \begin{array}{c} \frac{x}{a} = \sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ a \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \\ 0 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}.$$

Vzorec pro obsah elipsy s poloosami a a b je tedy

$$S = \pi ab.$$

(441) Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln x$ pro $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$.

Řešení:

Dosazením do vzorce dostaneme

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\,dx \left|\begin{array}{c} t^2 = x^2 + 1 \\ 2t\,dt = 2x\,dx \\ \sqrt{3} \rightsquigarrow 2 \\ \sqrt{15} \rightsquigarrow 4 \end{array}\right| =$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{t^2}}{t^2 - 1}\,t\,dt = \int_2^4 \frac{t^2}{t^2 - 1}\,dt = \int_2^4 \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1}\,dt = \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt =$$

$$= \int_2^4 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{t + 1}\right) dt = \left[t + \frac{1}{2}\ln|t - 1| - \frac{1}{2}\ln|t + 1|\right]_2^4 =$$

$$= 4 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 - 2 - \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 3 = 2 + \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5.$$

(442) Určete délku oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení:

Aplikací odpovídajícího vzorce obdržíme

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (1 - \cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt \ \left| \ 1 - \cos t = 2\sin^2 \tfrac{t}{2} \ \right| =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = \left[-4\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8.$$

(443) Určete délku oblouku řetězovky $f(x) = a\cosh\frac{x}{a}$, $I = [-1, 1]$.

Řešení:

Připomeňme, že platí

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2\tfrac{x}{a}}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2\tfrac{x}{a}}\,dx \;\Big|\, \text{cosh je všude kladný} \,\Big| =$$
$$= \int_{-1}^{1} \cosh\tfrac{x}{a}\,dx = \left[a\sinh\tfrac{x}{a}\right]_{-1}^{1} = a\left(\sinh\tfrac{1}{a} - \sinh\tfrac{-1}{a}\right) =$$
$$= a(e^{\frac{1}{a}} - e^{-\frac{1}{a}}).$$

(444) Vypočtěte délku oblouku křivky $f(x) = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ pro $x \in [1, 2]$.

Řešení:

Nejdříve vypočteme a upravíme výrazy potřebné pro výpočet integrálu, tj.

$$f'(x) = \frac{-2\,e^x}{(e^x+1)\,(e^x-1)} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{\frac{e^{4x}+2\,e^{2x}+1}{(e^x+1)^2\,(e^x-1)^2}} = \frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}.$$

Proto můžeme spočítat

$$l = \int_2^1 \frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dt = \int_2^1 \left(\frac{1}{e^{2x}-1} + \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right) dx = \left[-x + \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right|\right]_1^2 =$$

$$= \left(-2 + \ln\left(e^4-1\right) + 1 - \ln\left(e^2-1\right)\right) = -1 + \ln\frac{\left(e^2-1\right)\left(e^2+1\right)}{e^2-1} = \ln\left(e^2+1\right) - 1 = \ln\frac{e^2+1}{e},$$

přičemž jsem využili následující dva integrály

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-1} \left| \begin{array}{c} t = 2x \\ dt = 2\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{e^t-1} = \frac{1}{2}\int \frac{e^t}{e^{2t}-e^t}\,dt \left| \begin{array}{c} e^t = u \\ e^t\;dt = du \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-u} = \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{1+u}\right) du = -\frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2}\ln|u-1| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln\left|e^t-1\right| + C = -x + \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| + C;$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx \left| \begin{array}{c} t = e^{2x} \\ dt = 2\,e^{2x}\;dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{2}\ln|t-1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| + C.$$

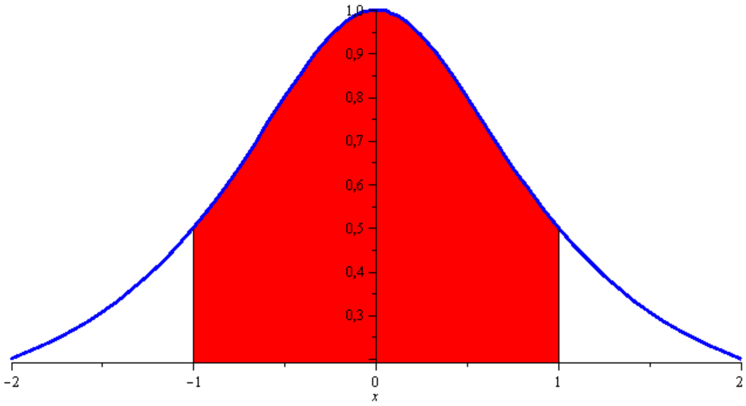
(445) Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin 3x$, $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}]e$, kolem osy x.

Řešení:

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} \left(1 + \frac{1}{2}\sin 3x\right)^2 dx = \\
&= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} \left(1 + \sin 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x\right) dx \ \Big|\ \sin^2 3x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 6x) \ \Big|\ = \\
&= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} \left(1 + \sin 3x + \frac{1}{8}(1 - \cos 6x)\right) dx = \\
&= \pi \left[x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{48}\sin 6x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} = \frac{33\pi^2}{16} - \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(446) Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kolem osy x.

Řešení:



Poněvadž funkce f je sudá, můžeme spočítat poloviční objem na intervalu $[0, 1]$. Proto

$$V_x = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = 2\pi \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}(\pi + 2),$$

neboť

$$\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = K_2(0, 1) = \frac{1}{2}K_1(0, 1) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C.$$

(447) Určete objem tělesa, které vznikne rotací prvního oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, kolem osy x.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 (1-\cos t)\,dt = \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,dt = \\
&= \pi \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)^3 dt = \\
&= \pi \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = \pi\,(2\pi + 3\pi) = 5\pi^2,
\end{aligned}
$$

neboť platí

$$
\begin{aligned}
&\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C; \\
&\int \cos^3 t\,dt = \int \left(1 - \sin^2 t\right)\cos t\,dt \left| \begin{array}{c} u = \sin t \\ du = \cos t\,dt \end{array} \right| = \int \left(1-u^2\right)\,du = \\
&\qquad = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + C.
\end{aligned}
$$

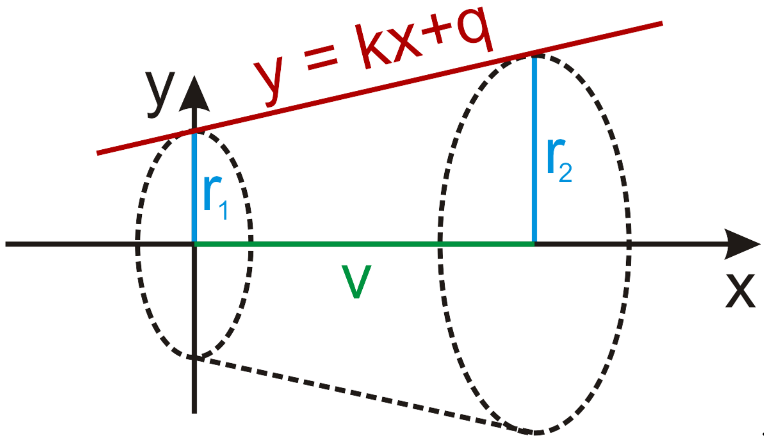
(448) Najděte vzorec pro výpočet objemu komolého kužele s poloměrem podstav r_1, r_2 a výškou v. Jaký je objem „nekomolého" kužele?

Řešení:

Komolý kužel lze vytvořit tak, že necháme rotovat lichoběžník s vrcholy

$$[0,0], \quad [v,0], \quad [v,r_2], \quad [0,r_1]$$

kolem osy x.



K výpočtu ovšem potřebujeme funkční předpis přímky dané body $[0,r_1]$ a $[v,r_2]$. Ten najdeme ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$. Dosazením bodu $[0,r_1]$ do rovnice přímky ihned dostaneme, že $q = r_1$. Pomocí této znalosti a dosazením bodu $[v,r_2]$ do rovnice přímky dostaneme směrnici $k = \frac{r_2-r_1}{v}$. Úsečka, jejíž rotací vznikne plášť studovaného komolého kužele je tedy dána předpisem

$$y = \frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1, \qquad x \in [0,v].$$

Nyní použijeme známý vzorec

$$V_x = \pi \int_0^v \left(\frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1\right)^2 dt.$$

Umocním závorky a jednoduchou integrací polynomu obdržíme výsledek

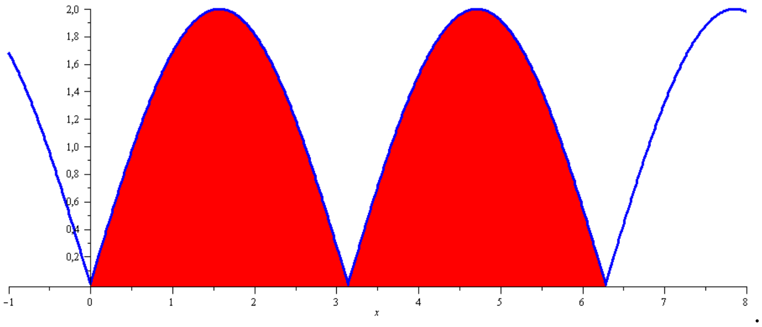
$$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Obyčejný kužel je speciální případ kužele komolého s nulovým poloměrem jedné podstavy. Tedy položíme-li např. $r_1 = 0, r_2 = r$, získáme vzorec pro objem „obyčejného" kužele ve tvaru

$$V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

(449) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 2|\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$, kolem osy x.

Řešení:



Oba oblouky cykloidy jsou stejné, můžeme se omezit pouze na interval $[0, \pi]$, proto

$$Q_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^{2\pi} \left(2\sin x\sqrt{1+4\cos^2 x}\right) dx \left| \begin{array}{c} 2\cos x = t \\ -2\sin x\, dx = dt \\ 0 \rightsquigarrow 2 \\ \pi \rightsquigarrow -2 \end{array} \right| =$$

$$= -4\pi \int 2^{-2}\sqrt{1+t^2}\, dt = 8\int_0^2 \sqrt{1+t^2}\, dt = 8\pi \left[\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}\right]_0^2 =$$

$$= 8\left(\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) + \sqrt{5}\right) = 4\pi\ln(2+\sqrt{5}) + 8\pi\sqrt{5}.$$

Při výpočtu jsme využili následující výpočet primitivní funkce

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt \left| \begin{array}{c} t = \sinh u \\ dt = \cosh u\, du \end{array} \right| = \int \cosh^2 u\, du \ \left|\ \cosh 2u = 2\cosh^2 u - 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cosh 2u + 1}{2}\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh 2u}{2} + u\right) + C =$$

$$= \frac{\sinh u \cosh u}{2} + \frac{u}{2} + C \ \left|\ \cosh^2 u - \sinh^2 = 1 \Rightarrow \cosh u = \sqrt{\sinh^2 u + 1} \right| =$$

$$= \frac{t\sqrt{t^2+1}}{2} + \frac{\operatorname{arcsinh} u}{2} + C.$$

Navíc přímým výpočtem ověříme, že

$$\operatorname{arcsinh} u = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|.$$

Položme $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$, potom

$$\begin{aligned}
\ln\left|y + \sqrt{y^2+1}\right| &= \ln\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + 1}\right| = \\
&= \ln\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}}\right| = \\
&= \ln\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}\right| = \\
&= \ln\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| = \ln|e^x| = x = \operatorname{arcsinh} y.
\end{aligned}$$

(450) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 4+x$, $x \in [-4, 2]$, kolem osy x.

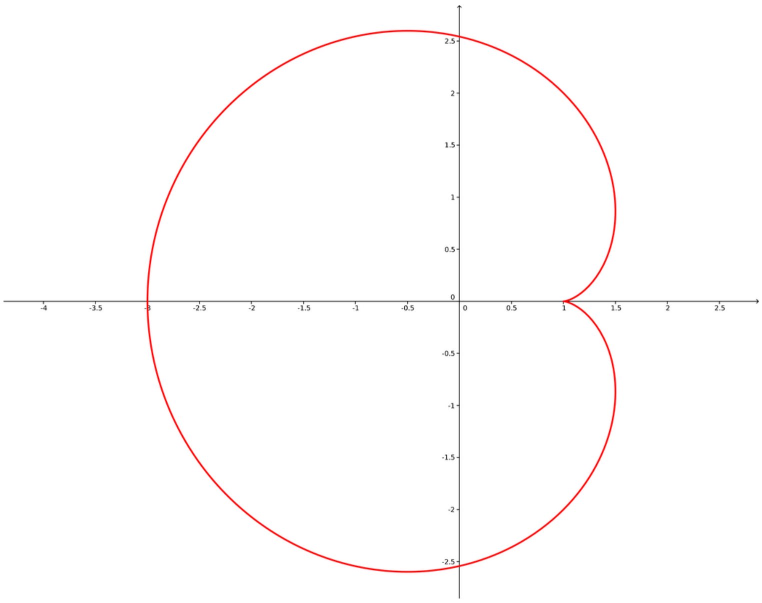
Řešení:

$$Q_x = 2\pi \int_{-4}^{2} (4+x)\sqrt{1+1}\,dx = 2\sqrt{2}\pi \int_{-4}^{2} (4+x)\ dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left[4x + \frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{2} = 2\sqrt{2}\pi \left(8 + \frac{4}{2}16 - \frac{16}{2}\right) = 36\sqrt{2}\pi.$$

(451) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací kardioidy (srdcovky) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $t \in [0, \pi]$, kolem osy x.

Řešení:



$$Q = 2\pi \int_0^{\pi} (2\sin t - \sin 2t)\sqrt{(-2\sin t + 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (2\sin t - \sin 2t)\sqrt{8}\sqrt{-\sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t}\, dt \left| \begin{array}{c} \sin 2t = 2\sin t \cos t \\ \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (2\sin t - \sin 2t)\sqrt{8}\sqrt{1 - \cos t}\, dt = 2\sqrt{8}\pi \int_0^{\pi} 2\sin t\,(1 - \cos t)^{3/2}\, dt =$$

$$= 4\sqrt{8}\pi \int_0^{\pi} \sin t\,(1 - \cos t)^{3/2}\, dt \left| \begin{array}{c} u = 1 - \cos t \\ du = \sin t\, dt \\ 0 \rightsquigarrow 0 \\ \pi \rightsquigarrow 2 \end{array} \right| = 4\sqrt{8}\pi \int_0^{2} 2u^{3/2}\, du =$$

$$= 4\sqrt{8}\pi \left[\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right]_0^2 = 4\sqrt{8}\pi \left(\frac{2^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right) = 4\sqrt{8}\pi \frac{2}{5} 4\sqrt{2} = \frac{128}{5}\pi.$$

(452) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací prvního oblouku cykoidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, kolem osy x.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
Q_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{3/2}\,dt \ \left| \, 1-\cos t = \sin^2 \tfrac{t}{2} \, \right| \ = \\
&= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sin^3 \frac{t}{2}\,dt = 8\pi \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2}\,dt \ \left| \begin{array}{c} \cos \frac{t}{2} = u \\ \frac{1}{2}\sin \frac{t}{2}\,dt = du \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ 2\pi \rightsquigarrow -1 \end{array} \right| = \\
&= -8\pi 2 \int_1^{-1} \left(1-u^2\right) du = 16\pi \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 16\pi \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

(453) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní půlkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$.

Řešení:

Podle příslušných vzorců obdržíme

$$M = \sigma \int_0^\pi \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \sigma r \int_0^\pi dt = \pi\sigma r,$$

$$S_x = \sigma \int_0^\pi r\sin t \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \sigma r^2 \int_0^\pi \sin t\, dt = \sigma r^2 \left[-\cos t\right]_0^\pi = 2\sigma r^2,$$

$$S_y = \sigma \int_0^\pi r\cos t \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \sigma r^2 \int_0^\pi \cos t\, dt = \sigma r^2 \left[\sin t\right]_0^\pi = 0.$$

Proto souřadnice těžiště jsou

$$T = \left[\frac{0}{\pi\sigma r}, \frac{2\sigma r^2}{\pi\sigma r}\right] = \left[0, \frac{2r}{\pi}\right].$$

(454) Vypočtěte hmotnost a souřadnice těžiště křivky $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$, $x, y \geq 0$, kde délková hustota v bodě $s(x)$ v bodě $[x(t), y(t)]$ je přímo úměrná x-ové souřadnici bodu.

Řešení:

Podle příslušných vzorců obdržíme

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka\cos^3 t\sqrt{\left(3a\cos^2 t\,(-\sin t)^2\right) + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka\cos^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka\cos^3 t\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,dt = \\
&= 3ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin t\,dt \left|\begin{array}{c} \cos t = u \\ -\sin t\,dt = du \\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \\ 0 \rightsquigarrow 1 \end{array}\right| = -3ka^2\int_1^0 u^4\,du = \\
&= -3ka^2\left[\frac{u^5}{5}\right]_1^0 = -3ka^2\left(0 - \frac{1}{5}\right) = \frac{3ka^2}{5}, \\
S_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3ka^3\cos^4 t\sin^4 t\,dt = 3ka^3\left[-\frac{1}{128}\sin 4t + \frac{3}{128}t + \frac{1}{1024}\sin 8t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 3ka^3\frac{3}{128}\frac{\pi}{2} = 3ka^3\frac{3\pi}{256},
\end{aligned}
$$

kde jsme využili následující primitivní funkce

$$
\begin{aligned}
&\int \cos^2 t\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C, \\
&\int \cos^2 2t\,dt \left|\begin{array}{c} 2t = u \\ 3\,dt = du \end{array}\right| \frac{1}{2}\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right) + C = \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C, \\
&\int \sin^4 t\cos^4 t\,dt \;\left|\; \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \;\right| = \frac{1}{16}\int (1 - \cos 2t)^2\,(1\cos 2t)^2\,dt = \\
&= \frac{1}{16}\int \left(1 - 2\cos^2 2t + \cos^4 2t\right)\,dt \left|\begin{array}{c} 2t = u \\ 3\,dt = du \end{array}\right| = \frac{1}{16}\left(t - t - \frac{\sin 4t}{4} + \frac{1}{2}\int \cos^4 u\,du\right) = \\
&= -\frac{1}{64}\sin 4t + \frac{1}{32}\int \frac{1}{4}(1 + \cos 2u)^2\,du = -\frac{1}{64}\sin 4t + \frac{1}{128}\int \left(1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u\right)\,du = \\
&= -\frac{1}{64}\sin 4t + \frac{1}{128}u + \frac{1}{64}\frac{1}{2}\sin 2u + \frac{1}{128}\left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 4u}{8}\right) + C = \\
&= \frac{3}{128}t - \frac{1}{128}\sin 4t + \frac{1}{1028}\sin 8t + C.
\end{aligned}
$$

Dále platí

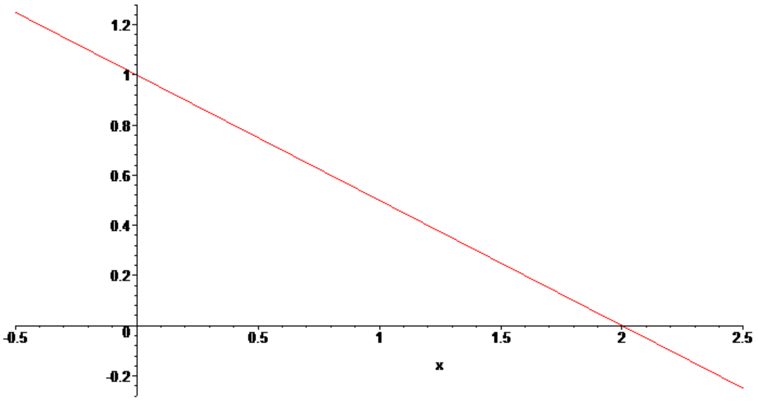
$$
S_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3ka^3\cos^7 t\sin t\,dt \left|\begin{array}{c} u = \cos t \\ du = -\sin t\,dt \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \end{array}\right| = -3ka^3\int_1^0 u^7\,du = -3ka^3\left[\frac{u^8}{8}\right]_1^0 = \frac{3ka^3}{8}.
$$

Proto těžiště má souřadnice

$$T = \left[\frac{3ka^3}{8} \frac{5}{3ka^2}, 3ka^3 \frac{3\pi}{256} \frac{5}{3ka^2} \right] = \left[\frac{5a}{8}, \frac{15\pi a}{256} \right].$$

(455) Vypočtěte souřadnice těžiště trojúhelníku s vrcholy $O = [0, 0]$, $A = [0, 1]$ a $B = [2, 0]$.

Řešení:



$$M = \sigma \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \sigma \left[x - \frac{x^2}{4}\right] = \sigma\,(2-1) = \sigma,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\sigma \int_0^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\sigma \left(2 - 2 + \frac{8}{12}\right) = \frac{\sigma}{3},$$

$$S_y = \sigma \int_0^2 x \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \sigma \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \sigma \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \sigma \left(2 - \frac{8}{6}\right) = \frac{2}{3}\sigma.$$

Souřadnice těžiště tedy jsou

$$T = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

(456) Vypočtěte hmotnost a souřadnice těžiště rovinné homogenní plochy omezené křivkou $y = 2\sin 3x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ a osou x.

Řešení:

$$M = \sigma \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin 3x \, dx = \frac{2}{3}\sigma \left[-\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}\sigma,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2 3x \, dx = 2\sigma \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12}\right] = \frac{\sigma\pi}{3},$$

$$S_y = \sigma \int_0^{\frac{\pi}{3}} x 2\sin 3x \, dx = \frac{2}{9}\sigma \left[\sin 3x - 3x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sigma\pi}{9},$$

kde jsem využili

$$\int \sin^2 3x \, dx \left| \begin{array}{c} t = 3x \\ dt = 3\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \sin^2 t \, dt = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= \frac{t}{6} - \frac{\sin 2t}{12} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C,$$

$$\int x \sin 3x \, dx \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x & v' = \sin 3x \end{array} \right| = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x \, dx =$$

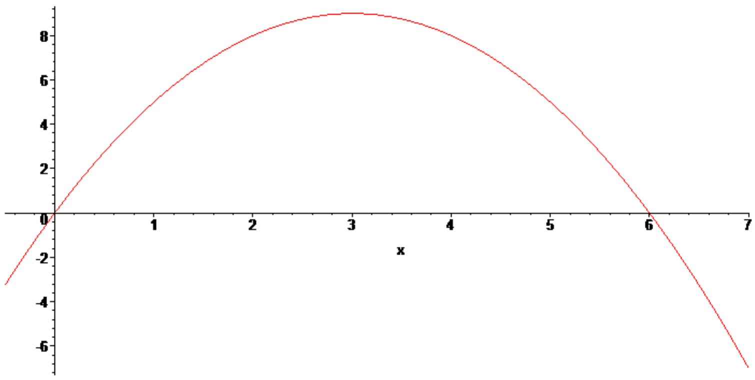
$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C = \frac{1}{9}\left(\sin 3x - 3x\cos 3x\right) + C.$$

Proto těžiště souřadnice jsou dány

$$T = \left[\frac{2\sigma\pi}{9}\frac{3}{4\sigma}, \frac{\sigma\pi}{3}\frac{3}{4\sigma}\right] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right].$$

(457) Vypočtěte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou danou předpisem $y = 6x - x^2$ a osou x.

Řešení:



$$M = \sigma \int_0^6 (6x - x^2)\, dx = \sigma \left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = \sigma\,(108 - 2 \cdot 36) = 36\sigma,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_0^6 (6x - x^2)^2\, dx = \frac{1}{2}\sigma \int_0^6 (36x^2 - 12x^3 + x^4)\, dx = \frac{1}{2}\sigma \left[\frac{36x^3}{3} - \frac{12x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^6 = \frac{648}{5}\sigma,$$

$$S_y = \sigma \int_0^6 x\,(6x - x^2)\, dx = \sigma \int_0^6 (6x^2 - x^3)\, dx = \sigma \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 = 108\sigma.$$

Těžiště má tedy souřadnice

$$T = \left[3, \frac{18}{5}\right].$$

(458) Vypočtěte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného cykloidou $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ a osou x.

Řešení:

$$M = \sigma \int_0^{2\pi} 3\,(1-\cos t)\,3\,(1-\cos t)\ dt = 9\sigma \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\ dt \overset{\text{Př. (438)}}{=} 9\sigma 4\pi = 27\sigma\pi,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_0^{2\pi} 9\,(1-\cos t)^2\, 3\,(1-\cos t)\ dt = \frac{27}{2}\sigma \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\ dt =$$

$$= \frac{27}{2}\sigma \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)\ dt \overset{\text{Př. (447)}}{=}$$

$$\overset{\text{Př. (447)}}{=} \frac{27}{2}\sigma \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}\left(\cos t \cdot \sin t + t\right) - \sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{27}{2}\sigma\,(5\pi) = \frac{135}{2}\pi\sigma,$$

$$S_y = \sigma \int_0^{2\pi} 3(t - \sin t) 3\,(1-\cos t)\,3\,(1-\cos t)\ dt =$$

$$= 27\sigma \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)(t - \sin t)\, dt =$$

$$= 27\sigma \int_0^{2\pi} \left(t - \sin t - 2t\cos t + 2\cos t \sin t + t\cos^2 t - \cos^2 t \sin t\right)\ dt =$$

$$= 27\sigma \left[\frac{t^2}{2} + \cos t - 2t\sin t - 2\cos t - \cos^2 t + \frac{t}{2}\left(\cos t \cdot \sin t + t\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{t}{2}\left(-\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{t^2}{2}\right) - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 27\sigma\left(2\pi^2 + 2\pi^2 + \frac{1}{4} - \pi^2 - \frac{1}{4}\right) = 27\sigma 3\pi^2,$$

k čemuž jsme v posledním integrálu využili

$$\int t\cos^2 t\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t & u' = 1 \\ v \overset{\text{Př. (447)}}{=} \frac{1}{2}\left(\cos t \cdot \sin t + t\right) & v' = \cos^2 t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos t \cdot \sin t + t\right) - \frac{1}{2}\int \left(\cos t \cdot \sin t + t\right)\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos t \cdot \sin t + t\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos^2 t}{2} - \frac{t^2}{2}\right) + C,$$

$$\int t\cos t\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t & u' = 1 \\ v = \sin t & v' = \cos t \end{array} \right| = t\sin t - \int \sin t\, dt = t\sin t + \cos t + C,$$

$$\int \cos t \sin t\, dt \left| \begin{array}{c} u = \cos t \\ du = -\sin t\, dt \end{array} \right| = -\int u\, du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 t}{2} + C,$$

$$\int \cos^2 t \sin t\, dt \left| \begin{array}{c} u = \cos t \\ du = -\sin tdt \end{array} \right| = -\int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 t}{3}.$$

Proto souřadnice těžiště jsou dány

$$T = T = \left[\frac{27\sigma 3\pi^2}{27\sigma\pi}, \frac{135\pi\sigma}{2 \cdot 27\sigma\pi}\right] = \left[3\pi, \frac{5}{2}\right].$$

Seznam použité literatury

[1] B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

[2] Z. Došlá, J. Kuben, *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Masarykova univerzita, Brno, 2004. ISBN 80-210-3121-2.

[3] O. Došlý, P. Zemánek, *Integrální počet v R*, Masarykova univerzita, Brno, 2011. ISBN 978-80-210-5635-0.

[4] Š. Hošková, J. Kuben, P. Račková, *Integrální počet funkcí jedné proměnné*, Vysoká škola báňská — Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2006. ISBN 80-248-1191-X.

[5] Z. Hrnčiřík, *Aplikace diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné ve slovních úlohách*, Diplomová práce, Masarykova univerzita, Brno, 2008.

[6] V. Jarník, *Diferenciální počet I*, 7. vydání, Academia, Praha, 1984.

[7] V. Jarník, *Integrální počet I*, 6. vydání, Academia, Praha, 1984.

[8] V. Novák, *Integrální počet v* $\mathbb{R}$, 3. vydání, Masarykova univerzita, Brno, 2001. ISBN 80-210-2720-7.

[9] J. Kuben, P. Šarmanová, *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Vysoká škola báňská — Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2006. ISBN 80-248-1192-8.

[10] D. C. Arangno, M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Advanced Calculus*, McGraw Hill, New York, 2000.

[11] I. Černý, *Úvod od inteligentního kalkulu: 1000 příkladů z elementární analýzy*, Academia, Praha, 2002. ISBN 80-200-1017-3.