I. 6. Aplikace diferenciálního počtu ve slovních úlohách

Definice 23. Buď funkce $f(x)$ definovaná na množině M. Existuje-li největší (nejmenší) hodnota funkce $f(x)$, nazýváme ji *absolutním maximem* (*absolutním minimem*) funkce $f(x)$ na M. Absolutní minima a maxima souhrnně nazýváme *absolutními extrémy*.

Jestliže tedy $x_0 \in M$ a platí $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce $f(x)$ má na M absolutní maximum v bodě x_0. Podobně pro absolutní minimum.

Poznámka 24. Funkce nabývá absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu (případně žádného globálního extrému nenabývá).

(284) Obdélník má obvod o, určete jeho strany a, b tak, aby jeho obsah byl maximální.

Řešení:

Ze zadání plyne, že platí

$$o = 2(a+b) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{o-2b}{2}.$$

Obsah obdélníku je roven $S = a \cdot b$, což můžeme pomocí předchozího vztahu vyjádřit jako funkci proměnné b, tj.

$$S(b) = \frac{o-2b}{2} \cdot b = \frac{o}{2} \cdot b - b^2,$$

pro niž hledáme maximum. Proto musí platit

$$S'(b) = \frac{o}{2} - 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{o}{4}.$$

Ověříme, že nalezený bod je skutečně maximem, tj.

b	$\left(0, \frac{o}{4}\right)$	$\left(\frac{o}{4}, \frac{o}{2}\right)$
$\operatorname{sgn} S'$	$+$	$-$
S	$\nearrow$	$\searrow$

Dopočítáme druhý rozměr obdélníku. Proto $a = \frac{o-2b}{2} = \frac{o}{4}$. Což znamená, že obdélník s maximálním obsahem při pevně zadaném obvodu je právě čtverec.

(285) Určete takové nenulové reálné číslo x, že jeho rozdíl s převrácenou hodnotou druhé mocniny tohoto čísla je maximální.

Řešení:

Ze zadání plyne, že hledáme maximum funkce

$$f(x) = x - \frac{1}{x^2}.$$

Proto musí platit

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt[3]{2}.$$

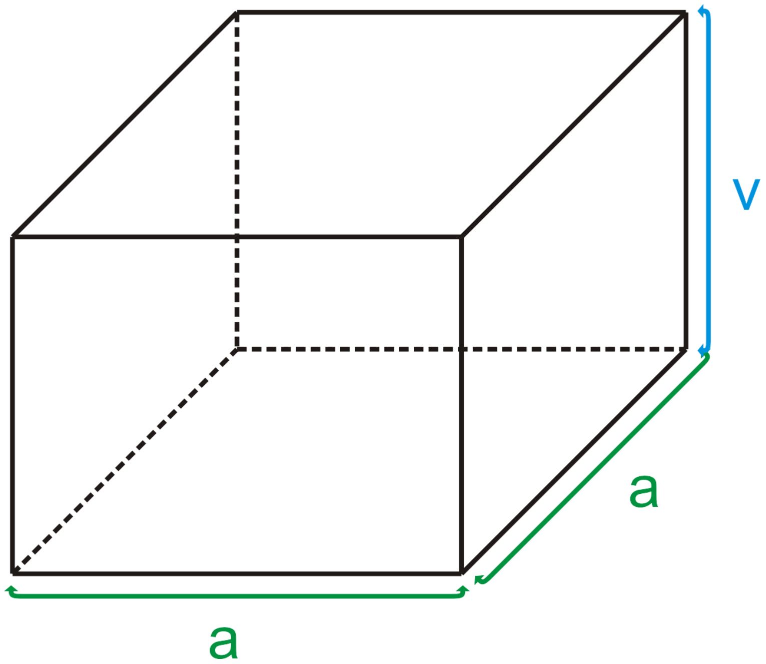
Z následující tabulky plyne, že nalezený bod je skutečně maximum, tj.

x	$\left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right)$	$\left(-\sqrt[3]{2}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

(286) Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu $32\,\mathrm{m}^3$ tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo minimum materiálu.

Řešení:

Mějme takovýto bazén



Potom ze zadaného objemu můžeme vyjádřit výšku bazénu, tj.

$$V = a^2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V}{a^2}.$$

Funkce určující obsah dna a stěn je

$$S = a^2 + 4 \cdot v \cdot a \quad \Rightarrow \quad S(a) = a^2 + \frac{4V}{a},$$

kterou chceme minimalizovat. To znamená, že

$$S'(a) = 2a - \frac{4V}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{2V} \quad \overset{V=32}{\Rightarrow} \quad a = 4, \ v = 2.$$

Získali jsem skutečně hledané minimu, neboť

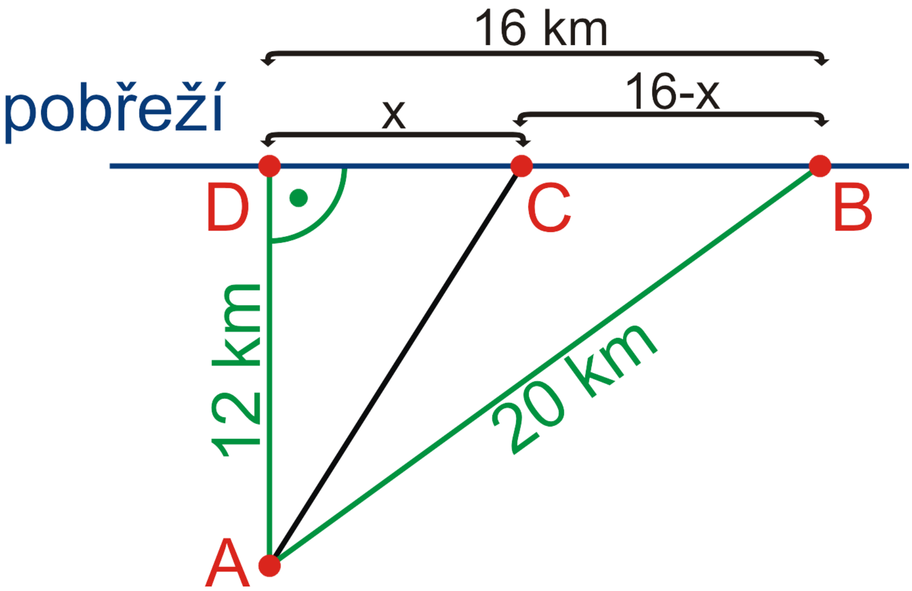
a	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$\operatorname{sgn} S'$	$-$	$+$
S	$\searrow$	$\nearrow$

Rozměry optimálního bazénu tedy jsou $4 \times 4 \times 2$.

(287) Muž v loďce je vzdálen 12 km od pobřeží (majícího tvar přímky). Chce se dostat co nejrychleji do místa na pobřeží, které je od něj vzdáleno 20 km. Rozhodněte, kde se má vylodit, víte-li, že dokáže veslovat rychlostí 6 km/h a po břehu se pohybovat rychlostí 10 km/h.

Řešení:

Situaci ze zadání lze znázornit takto



Přičemž bod A jeho výchozí pozice a bod C je místo vylodění, které může být v kterémkoli bodě na pláži, tj. v rozmezí bodů D až B včetně. Platí tedy

$$|AC|^2 = 12^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad |AC| = \sqrt{144 + x^2}.$$

Hledaný čas je součtem doby jízdy na lodi a dobou, kterou muž půjde po pláži, tj. (čas $= \frac{\text{dráha}}{\text{rychlost}}$)

$$t = t_1 + t_2 = \frac{|AC|}{6} + \frac{|CB|}{10} \quad \Rightarrow \quad t(x) = \frac{\sqrt{144 + x^2}}{6} + \frac{16 - x}{10}.$$

Standardním postupem najdeme stacionární bod(y), tj.

$$t'(x) = \frac{2x}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{144 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{6\sqrt{144 + x^2}} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 10x = 6\sqrt{144 + x^2} \quad \Rightarrow \quad 100x^2 = 36(144 + x^2) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 64x^2 = 5184 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 9$$

je zřejmé, že platí $x \in [0, 16]$, proto máme jediný stacionární bod $x = 9$ (hodnota $x = -9$ by odpovídala zrcadlové situaci na levé straně a dostali jsme ji díky použití neekvivalentní úpravy při řešení předchozí rovnice). Ověříme, zda jsme obdrželi skutečně extrém

x	$[0, 9)$	$(9, 16]$
$\operatorname{sgn} t'$	$-$	$+$
t	$\searrow$	$\nearrow$

Poněvadž hodnota x může nabývat i mezní hodnoty intervalu, našli jsme lokální(!) minimum. Musíme porovnat funkční hodnoty v lokálním minimu a v krajních bodech, tj.

$$t(9) = \frac{16}{5}, \quad t(0) = \frac{18}{5}, \quad t(16) = \frac{10}{3}.$$

Neboť platí $t(9) < t(16) < t(0)$, nalezli jsme globální minimum pro $x = 9$. Proto se muž musí vylodit ve vzdálenosti 7 km od cílového místa.

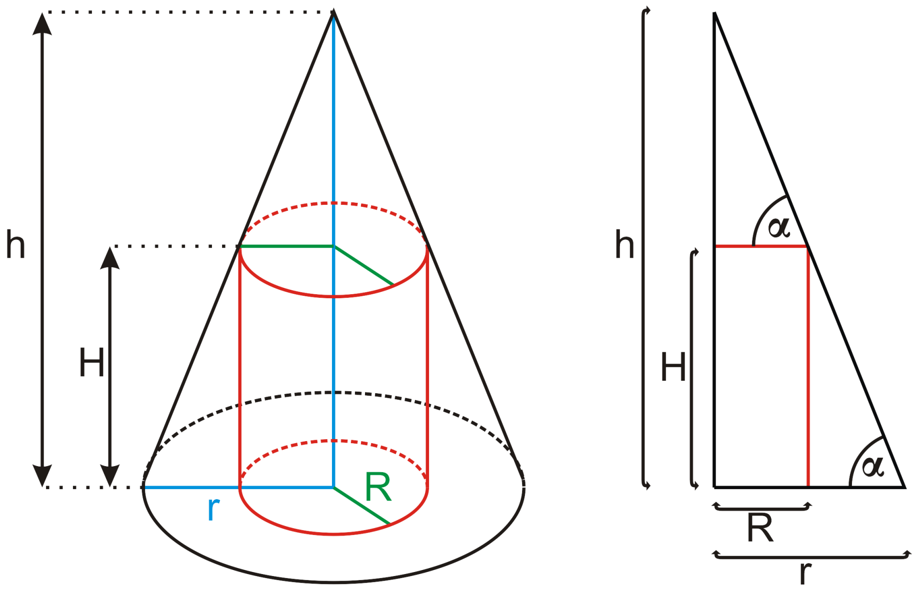
(288) Do rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce h vepište válec (s poloměrem R a výškou H), který má:

i) největší objem;

ii) největší obsah pláště.

<u>**Řešení:**</u>

i) Situaci znázorníme na obrázku



ze kterého plyne, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{r} = \frac{H}{r-R} = \frac{h-H}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{h}{r} = \frac{H}{r-R} = \frac{h-H}{R} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{R}{h-H} = \frac{r}{h} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{r(h-H)}{h}.$$

Protože objem válce je dán vztahem $V = \pi R^2 H$, získáme funkci proměnné H ve tvaru

$$V(H) = \pi\frac{r^2(h-H)^2}{h^2}H.$$

Nyní určíme stacionární body, tj.

$$V'(H) = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[2(h-H)\cdot(-1)H + (h-H)^2\right] =$$
$$= \frac{\pi r^2}{h^2}(h-H)\left[-2H + h - H\right] = \frac{\pi r^2}{h^2}(h-H)\left[-3H + h\right] = 0,$$

což dává dva stacionární body $H = h$ (tato hodnota ovšem dává válec s maximální možnou výškou a nulovým poloměrem, tedy není potřeba tento stacionární bod uvažovat) a $H = \frac{h}{3}$, který je skutečně hledaným maximem, neboť platí

H	$(0, \frac{h}{3})$	$(\frac{h}{3}, h)$
$\operatorname{sgn} V'$	$+$	$-$
V	$\nearrow$	$\searrow$

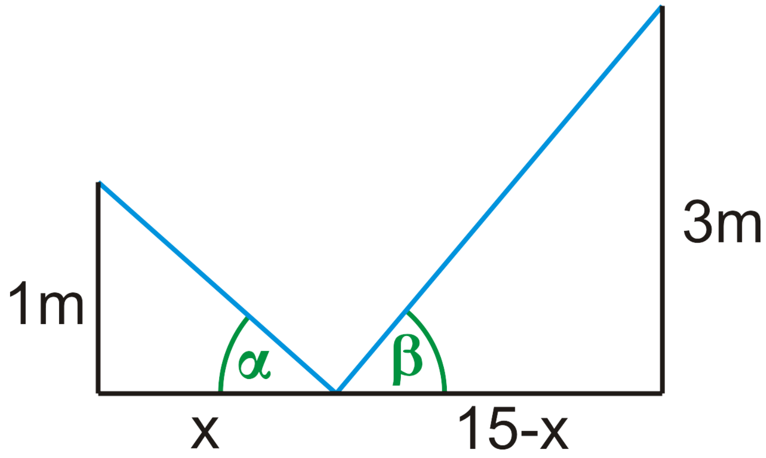
Našli jsme tedy válec o rozměrech $H = \frac{h}{3}$ a $R = \frac{r\left(h-\frac{h}{3}\right)}{h} = \frac{2r}{3}$ o maximálním objemu $V = \frac{4\pi r^2 h}{27}$.

ii) Obsah pláště válce je dán vztahem $Q = 2\pi RH$, což s využitím předchozích výpočtů znamená
$$Q(H) = 2\pi \frac{r(h-H)}{h} H.$$
Deriovováním
$$Q'(H) = \frac{2\pi r}{h}(h - 2H) = 0$$
najdeme stacionární bod, kterým je hodnota $H = \frac{h}{2}$ (jedná se skutečně o maximum). Hledaný válec má rozměry $H = \frac{h}{2}$ a $R = \frac{r}{2}$ a maximálním obsahu pláště $Q = \frac{\pi rh}{2}$.

(289) („Problém líného kosa“) Na plotě, jehož výška je 1 m, sedí kos. Ve vzdálenosti 15 m od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 m. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozsety žížaly. V jaké vzdálenosti od plotu má kos sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot $\longrightarrow$ žížala $\longrightarrow$ strom po přímkách a po nejkratší dráze?

Řešení:

Situaci znázorníme na obrázku (vzdálenost x je místo sezobnutí žížaly)



z něhož je patrné, že vzdálenost, kterou kos musí uletět, je dána funkcí

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(15-x)^2+9}.$$

Ve stacionárním bodě jistě platí

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x-30}{2\sqrt{(15-x)^2+9}} = 0,$$

a proto

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+9}} = \cos\beta.$$

To ovšem znamená, že $\alpha = \beta$. Nyní již z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$\frac{x}{1} = \frac{15-x}{3} \quad \Rightarrow \quad 3x = 15 - x \quad \Rightarrow \quad x = 3,75.$$

Nalezený bod je skutečně minimum, neboť platí

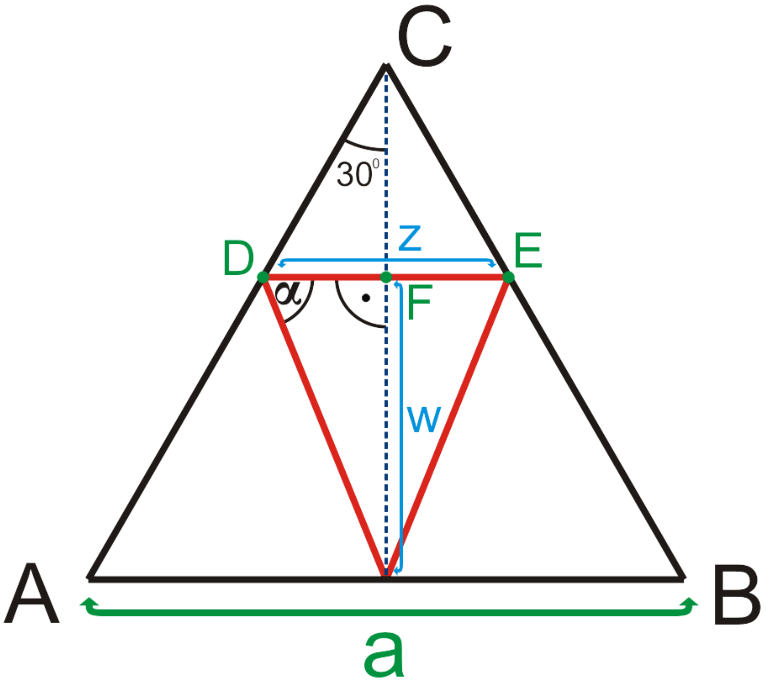
x	$(0; 3,75)$	$(3,75; 15)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Proto aby kos sezobnul žížalu a přitom urazil nejkratší dráhu, musí ji sezobnout 3,75m od plotu.

(290) Do rovnostranného trojúhelníku o straně a vepište rovnoramenný trojúhelník maximálního obsahu tak, aby vrchol proti jeho základně ležel ve středu strany rovnostranného trojúhelníku.

Řešení:

Znázorníme si oba trojúhelníky na obrázku



Je známo, že v rovnostranném trojúhelníku platí $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, z čehož plyne $|CF| = v - w = \frac{\sqrt{3}}{2}a - w$. Proto můžeme v trojúhelníku CDF spočítat

$$\operatorname{tg} 30 = \frac{\frac{z}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - w} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{2} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}w.$$

Proto můžeme obsah hledaného trojúhelníku vyjádřit pomocí w ve tvaru

$$S(w) = \frac{zw}{2} = \frac{aw}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}w^2.$$

Nyní najdeme stacionární bod

$$S'(w) = \frac{a}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{3a}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{4}.$$

Nalezli jsme skutečně maximum, viz

w	$\left(0, \frac{\sqrt{3}a}{4}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}a}{4}, v\right)$
$\operatorname{sgn} S'$	$+$	$-$
S	$\nearrow$	$\searrow$

Dopočítáme druhý rozměr trojúhelníku

$$z = 2\left(\frac{a}{2} - \frac{3}{12}a\right) = \frac{a}{2}.$$

Ještě musíme ověřit, že nalezený trojúhelník je rovnoramenný, to ovšem plyne z výpočtu

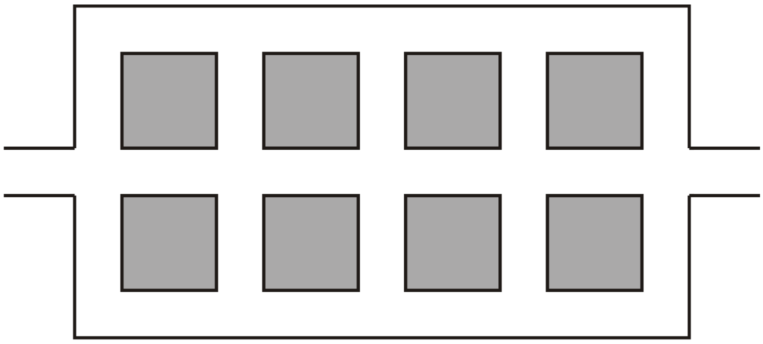
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w}{\frac{z}{2}} = \frac{2w}{z} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ.$$

Tedy, hledaný trojúhelník má výšku $\frac{\sqrt{3}a}{4}$ a délku strany $\frac{a}{2}$.

(291) Váš přítel, pozemní inženýr, se na Vás obrátil s prosbou o pomoc. Dostal za úkol vyprojektovat uprostřed pozemku tvaru čtverce o straně 1,5 km 8 sousedících parcel určených ke stavbě luxusních vil. Parcely musí být obdélníkové, ve dvou řadách po čtyřech a výměra každé z nich musí činit 120 arů (tj. celkem 960 arů). Kolem každé parcely musí Váš přítel nechat postavit cesty. Přitom dlouhá spojovací cesta mezi řadami po čtyřech bude na obě strany vyvedena mimo pozemek a napojena na silniční síť oblasti. Tyto napojovací cesty budou financovány plně z fondu EU, takže jejich cenu není potřeba uvažovat. Jaké rozměry parcel poradíte, aby se za stavbu cest co nejvíce ušetřilo?

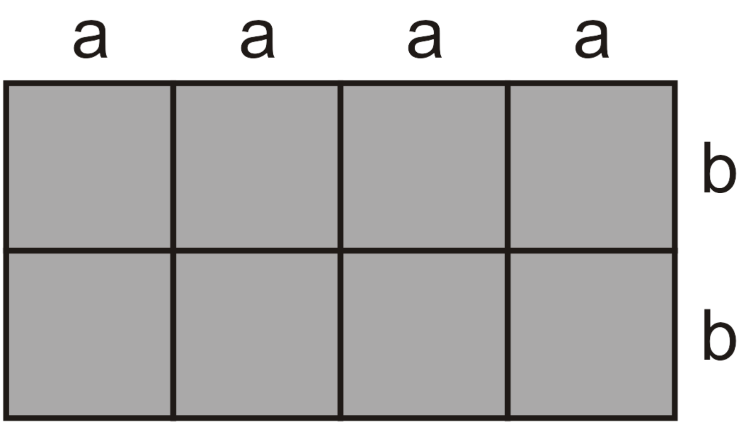
Řešení:

Problém, který musíme vyřešit je znázorněn na Obrázku 35.



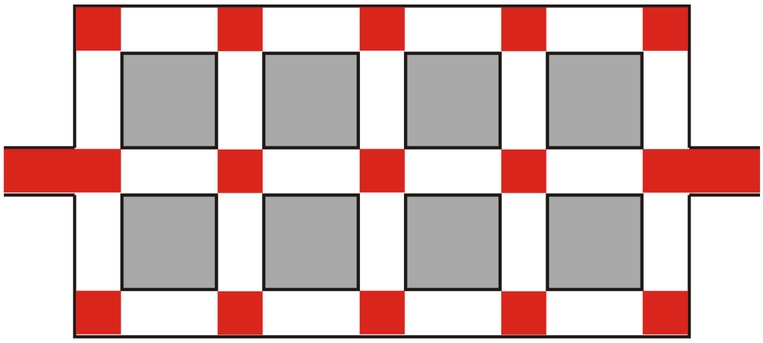
Obrázek 35. Parcely a cesty.

Je zřejmé, že délka cesty (a tím i její cena) bude minimální, bude-li minimální délka cest po stranách jednotlivých parcel. Tím se nám problém zjednodušil na následující.



Obrázek 36. Parcely bez cest.

Na Obrázku 36 jsou znázorněny jednotlivé parcely a je přitom zanedbána šířka cesty. To můžeme provést, neboť plochy cesty vyznačené červeně na Obrázku 37 je nutné vybudovat vždy, ať už je poměr stran parcel jakýkoli, resp. jde o napojovací cesty financované z EU.



Obrázek 37. Neměnné části cest.

Budeme tedy vycházet z Obrázku 36. Celková plocha parcel je dle zadání 960 arů, tedy

$$S = 4a \cdot 2b = 8ab = 960.$$

Naším cílem je minimalizovat délku cest z Obrázku 36, tj.

$$O = 12a + 10b \quad \longrightarrow \quad \min.$$

Ze vztahu pro obsah plochy snadno dostaneme, že

$$b = \frac{120}{a},$$

což dosadíme do vztahu pro délku cest („obvod" parcel). Tím získáme funkci jedné proměnné a můžeme formulovat extremální úlohu

$$O(a) = 12a + \frac{1200}{a} \quad \longrightarrow \quad \min.$$

Mějme přitom na paměti, že pozemek, na kterém pracujeme, má tvar čtverce o straně 1,5 km, tj. 1500 m a poznamenejme, že jednotky, které používáme jsou ary (1 ar = $100\mathrm{m}^2$), tedy všechny výpočty délek provádíme v desítkách metrů. Odtud

$$\begin{aligned} 2b &< 150, \\ 2\frac{120}{a} &< 150, \\ 150a &> 240, \\ a &> \frac{8}{5}. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 4a &< 150, \\ a &< \frac{75}{2}. \end{aligned}$$

Hledáme tedy globální minimum na intervalu $\left[\frac{8}{5}, \frac{75}{2}\right]$. Funkci O zderivujeme a najdeme její stacionární body.

$$\begin{aligned} O'(a) = 12 - \frac{1200}{x^2} &= 0, \\ 12a^2 &= 1200, \\ a &= \pm 10. \end{aligned}$$

Protože $-10 \notin \left[\frac{8}{5}, \frac{75}{2}\right]$, tento bod nás nezajímá. Porovnejme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu a hodnotu ve stacionárním bodě.

$$\begin{aligned} O\left(\tfrac{8}{5}\right) &= \tfrac{3846}{5} = 769,2, \\ O\left(\tfrac{75}{2}\right) &= 482, \\ O(10) &= 240. \end{aligned}$$

Hledaným minimem je tedy náš stacionární bod. Nyní snadno dopočítáme rozměr b.

$$b = \frac{120}{a} = \frac{120}{10} = 12.$$

Za daných podmínek jsou tedy nejlepší volbou parcely o rozměrech $100 \times 120m$, přičemž větší rozměr je vertikální.

Poznámka 25. Cílem Příkladu 291 bylo naznačit způsob, jakým je možné reálné zadání zjednodušit za účelem zpřehlednění výpočtů. Poznamenejme, že jakékoli zjednodušování by vždy mělo být řádně zdůvodněno a samozřejmě nesmí nijak ovlivnit výsledek.

(292) V továrně na výrobu kalkulaček zjistili, že pokud vyjádří výnos a náklady jako funkci proměnné x reprezentující počet kalkulaček (v tisících) vyrobených za hodinu, obdrží funkce:

$$r(x) = 9x \qquad \text{pro výnos,}$$
$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x \qquad \text{pro náklady.}$$

Určete při jakém objemu výroby bude mít továrna největší zisky.

Řešení:

Nejprve naformulujme problém. Protože

$$\text{zisk} = \text{výnos} - \text{náklady},$$

obdržíme pro zisk funkci

$$p(x) = r(x) - c(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x$$

a hledáme její maximum.

$$p'(x) = -3x^2 + 12x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Zjistěme nyní, pro která x daná funkce roste a pro která klesá. Vzhledem k tomu, že nelze vyrobit záporný počet kalkulaček, zajímá nás její chování jen na intervalu $[0, \infty)$. (Samozřejmě není reálná ani výroba a prodej nekonečného počtu kalkulaček, ale horní omezující podmínka pro nás není dostupná. Výsledek musíme vhodně interpretovat a případně omezující podmínku najít, nebo požadovat od zadavatele problému.)

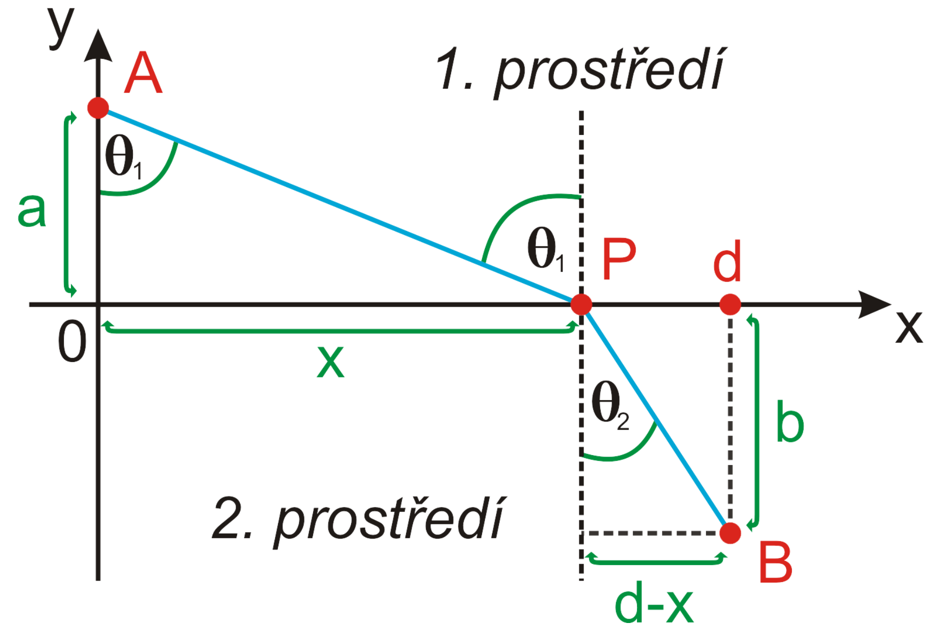
x	$(0, 2-\sqrt{2})$	$(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$	$(2+\sqrt{2}, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Největšího zisku tedy továrna dosáhne při výrobě $2 + \sqrt{2}$ tisíc kalkulaček za hodinu (tj. cca 3 414 kalkulaček za hodinu).

(293) Popište dráhu světelného paprsku z bodu A v prostředí s rychlostí šíření světla c_1 do bodu B s rychlostí šíření světla c_2. Hranici mezi prostředími uvažujte rovnou.

Řešení:

Nejprve zadaný problém důkladně graficky znázorníme. Přitom využijeme faktu, že příroda se chová vždy efektivně, takže světelný paprsek využije trasu, která je nejméně časově náročná. Dráhou tedy bude lomená čára. Na Obrázku 38 je znázorněna modře.



Obrázek 38. Dráha světelného paprsku.

Z Obrázku 38 je zřejmé, že popis dráhy provedeme pomocí úhlu dopadu θ_1 a úhlu lomu θ_2. Přitom jsme jako bod P označili bod, ve kterém světelný paprsek prochází z prvního do druhého prostředí. Přitom souřadnice důležitých bodů jsou:

$$A = [0, a], \qquad P = [0, x], \qquad B = [-b, d].$$

Dokážeme-li tedy popsat vztah úhlů θ_1 a θ_2, budeme schopni např. ze znalosti polohy zdroje světla a úhlu dopadu dopočítat bod B, nebo ze znalosti poloh bodů A a B dopočítat vzdálenost x a tedy polohu bodu P apod. Zdůrazněme, že osa x se kryje s hranicí daných prostředí. Jedním z nejzákladnějších fyzikálních vztahů je vzorec

$$v = s \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{s}{v},$$

kde s značí dráhu, v rychlost a t čas. Označme čas, který potřebuje světlo pro cestu z bodu A do bodu P jako t_1 a čas, který potřebuje světlo pro cestu z bodu P do bodu B jako t_2. Z Obrázku 38 je zřejmé, že platí

$$t_1 = \frac{|AP|}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1},$$
$$t_2 = \frac{|PB|}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_1}.$$

Celkový čas je samozřejmě roven součtu $t_1 + t_2$ a je závislý na pozici bodu P, tj. na velikosti x. Naformulujme extremální problém:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_1} \quad \to \quad \min, \qquad x \in [0, d].$$

Najděme nyní vztah popisující stacionární bod funkce t a dokažme, že jde o globální minimum. Nejprve ji zderivujeme podle proměnné x.

$$t'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Všimněme si, že (opět viz Obrázek 38)

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \qquad \sin\theta_2 = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Celkem jsme dostali, že pro hledaný stacionární bod platí

$$t'(x) = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2} = 0.$$

Tedy

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}. \tag{1}$$

Tento vztah je ve fyzice znám jako *Snellův zákon* (Willebrord Snellius rozený Willebrord Snel van Royen, 1580 – 1626, Leiden, Nizozemsko; prvním objevitelem tohoto zákona je Abu Sa'd al-'Ala' ibn Sahl, cca 940 – 1000, Bagdád).

Abychom byli zcela korektní, musíme ovšem ještě dokázat, že popsaný stacionární bod existuje a že jde skutečně o globální minimum. Dosadíme-li do původního vztahu pro derivaci funkce t body 0 a d, zjistíme, že

$$t'(0) = \frac{0}{c_1\sqrt{a^2+0^2}} - \frac{d-0}{c_2\sqrt{b^2+(d-0)^2}} = -\frac{d}{c_2\sqrt{b^2+d^2}} < 0,$$
$$t'(d) = \frac{d}{c_1\sqrt{a^2+d^2}} - \frac{d-d}{c_2\sqrt{b^2+(d-d)^2}} = \frac{d}{c_1\sqrt{a^2+d^2}} > 0.$$

Protože je $t'(x)$ funkce spojitá na intervalu $[0,d]$ a ukázali jsme, že má v krajních bodech tohoto intervalu opačná znaménka, existuje (dle první Bolzanovy věty) takové $x_0 \in [0,d]$, že $t'(x_0) = 0$. Tedy stacionární bod existuje. Spočtěme nyní druhou derivaci funkce t a pokusme se určit, zda je na intervalu $[0,d]$ konvexní, nebo konkávní.

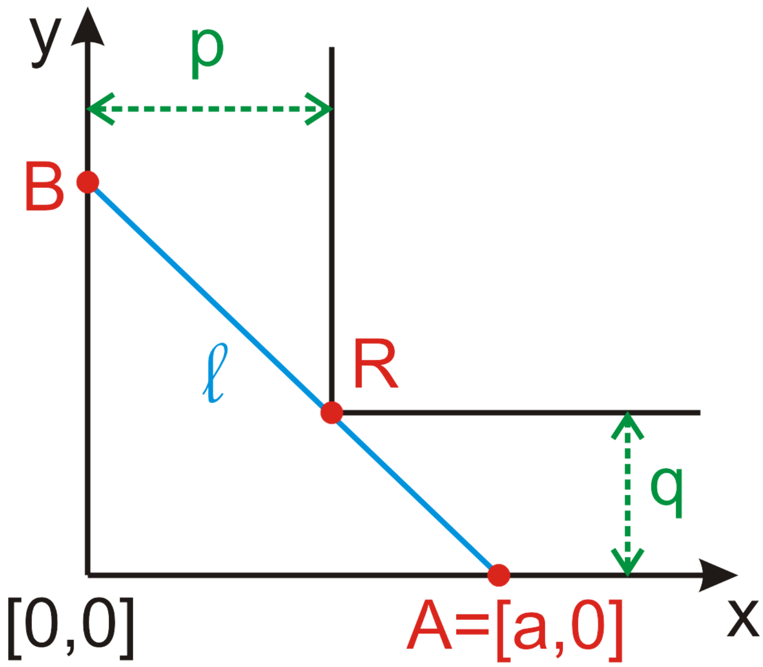
$$t''(x) = \frac{a^2}{c_1(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{c_2\left[b^2+(d-x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad \forall x \in [0,d],$$

takže funkce t je na intervalu $[0,d]$ konvexní. Odtud plyne, že stacionární bod popsaný Snellovým zákonem je jediným lokálním minimem funkce t. Vzhledem k tomu, že druhá t'' je na $[0,d]$ kladná, je na celém $[0,d]$ funkce t' rostoucí. Navíc již víme, že $t(0) < 0$ a $t(d) > 0$. Funkce t tedy z bodu $x = 0$ klesá do bodu $x = x_0$ a z něj pak roste do bodu $x = d$. Bod $x = x_0$ je tedy opravdu globálním minimem funkce t a dráha světelného paprsku je popsána Snellovým zákonem správně.

(294) Chceme přestěhovat žebřík chodbou širokou p metrů, která se pravoúhlou zatáčkou mění na chodbu širokou q metrů. Jaký nejdelší žebřík lze touto zatáčkou pronést ve vodorovné poloze? (Jeho šířku zanedbejte.)

Řešení:

Nejprve zadaný problém důkladně graficky znázorníme. Žebřík je na obrázku 39 znázorněn modře. Pronášíme ho ve vodorovné poloze, ale samozřejmě tak aby jeho stupy směřovaly dolů, tím bude šířka pronášeného objektu redukována na několik centimetrů. Ze zadání máme tuto šířku pro jednoduchost zanedbat. Poznamenejme, že je skutečně efektivní nejprve vyřešit takto zjednodušený případ obecně a úpravy provádět až se znalostí jeho výsledku buď obecně, nebo už pro konkrétní případ.



Obrázek 39. Průchod žebříku.

Nejprve zdůrazněme souřadnice významných bodů:

$A = [a, 0]$	bod dotyku na vnější zdi vodorovné chodby,
$B = [0, \sqrt{l^2 - a^2}]$	bod dotyku na vnější zdi svislé chodby,
$R = [p, q]$	roh chodby o který se může žebřík zaseknout.

Pro účely výpočtu je tedy užitečné představovat si, že žebřík neseme tak, že jeho konce drhnou po vnějších zdech zatáčky. Naším úkolem je určit takovou délku žebříku l, aby se žebřík rohu R jen dotkl, ale nezasekl se.

Nejprve určíme rovnici přímky, na které leží žebřík. Její parametrický popis je (pomocí bodů A a B):

$$x = a + at,$$
$$y = 0 - \sqrt{l^2 - a^2}\,t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vyloučením parametru t získáme obecnou rovnici

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 = 0,$$

přičemž dotyk nastane pro $[x, y] = [p, q]$. Tj.

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 = 0.$$

Je zřejmé, že platí

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 > 0 \qquad \text{žebřík projde bez dotyku,}$$
$$\frac{p}{a} + \frac{q}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 < 0 \qquad \text{žebřík se zasekne.}$$

Označme levou stranu předchozích vztahů jako funkci f proměnné a. Žebřík projde zatáčkou jestliže bude tato funkce nezáporná, přitom proměnnou a má smysl uvažovat pouze v intervalu $(0, l)$. Tím jsme připraveni formulovat extremální úlohu:

$$f(a) = \frac{p}{a} + \frac{q}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 \quad \to \quad \min, \quad a \in (0, l).$$

Najděme stacionární body funkce f.

$$f'(a) = -\frac{p}{a^2} + \frac{aq}{(l^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$
$$a^3 q - p(l^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$
$$a^2 q^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}}(l^2 - a^2),$$
$$a = \pm \frac{p^{\frac{1}{3}} l}{(p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}.$$

Protože jde o délku, zajímá nás pouze kladný výsledek (záporná hodnota navíc nenáleží do intervalu $(0, l)$). Označme nalezený stacionární bod

$$a_0 = \frac{p^{\frac{1}{3}} l}{(p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}.$$

Nyní určeme pomocí druhé derivace zakřivení funkce f na intervalu $(0, l)$.

$$f''(a) = \frac{2p}{a^3} + \frac{q(l^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} + 3aq^2(l^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{(l^2 - a^2)^3} > 0, \quad \forall a \in (0, l).$$

Funkce f je tedy konvexní na celém intervalu $(0, l)$, a bod a_0 je tedy bodem minima.

Nyní zbývá jen určit maximální možnou délku žebříku. Dosaďme bod a_0 do funkce f.

$$f(a_0) = \frac{(p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{l} - 1.$$

K dotyku dojde, tedy žebřík bude nejdelší možný, jestliže $f(a_0) = 0$. Odtud

$$l = (p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Za podmínek a hodnot ze zadání je největší možná délka žebříku, který projde zatáčkou, $(p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.