

I. 3. Derivace funkce

Definice 9. Buď $f(x)$ funkce a $x_0 \in D(f)$. Existuje-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce* $f(x)$ v *bodě* x_0 a značíme $f'(x_0)$. Je-li tato limita vlastní, hovoříme o *vlastní derivaci*. Je-li tato limita nevlastní, hovoříme o *nevlastní derivaci*.

Základní vzorce pro počítání s derivacemi (f a g jsou funkce, $k \in \mathbb{R}$):

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (k \cdot f)' = k \cdot f', \quad (f \cdot g)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Derivace elementárních funkcí ($k, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$):

$$\begin{aligned} (k)' &= 0, & (\cos x)' &= -\sin x, \\ (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\ (e^x)' &= e^x, & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, \\ (a^x)' &= a^x \cdot \ln a, & (\operatorname{arcsin} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}, & (\operatorname{arccos} x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\log_b x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln b}, & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \\ (\sin x)' &= \cos x, & (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Věta 10. Nechť funkce $f: x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I . Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak inverzní funkce $f^{-1}: y = f^{-1}(x)$ má v bodě $x_0 = f(y_0)$ derivaci a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}, & \text{je-li } f'(y_0) \neq 0, \\ +\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ rostoucí,} \\ -\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ klesající.} \end{cases}$$

Rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě dotyku $(x_0, f(x_0))$:

$$t: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Pokud $f'(x_0) = \pm\infty$ a pokud je funkce f v tomto bodě spojitá, pak je tečna v tomto bodě rovnoběžná s osou y a její rovnice tedy je

$$t: x = x_0.$$

Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě dotyku $(x_0, f(x_0))$:

$$\begin{aligned} n: y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), & \text{je-li } f'(x_0) \neq 0, \\ n: x &= x_0, & \text{je-li } f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Pokud $f'(x_0) = \pm\infty$ a pokud funkce f v tomto bodě spojitá, pak je normála v tomto bodě rovnoběžná s osou x a její rovnice tedy je

$$n: y = f(x_0).$$

(149) Z definice vypočtete hodnotu $f'(0)$, kde $f(x) = \sin x$.

Řešení:

Z definice platí

$$f'(0) = (\sin x)'_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(150) Z definice vypočtěte hodnotu $f'(0)$, kde $f(x) = |\sin x|$.

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1, \end{cases} \Rightarrow \text{derivace neexistuje.}$$

(151) Z definice vypočtete hodnotu $f'(\sqrt{5})$, kde $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 2}{x - \sqrt{5}} &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^2 - 1 - 4}{(x - \sqrt{5})(\sqrt{x^2 - 1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{(x - \sqrt{5})(\sqrt{x^2 - 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x + \sqrt{5}}{\sqrt{x^2 - 1} + 2} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

(152) Z definice určete derivaci funkce $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}(\sinh x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(x+h) - \sinh x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x+h} - e^{-(x+h)}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x - e^{-x-h} + e^{-x}}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^x e^h - e^x}{h} + \frac{e^{-x} e^{-h} - e^{-x}}{-h} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(e^x \frac{e^h - 1}{h} + e^{-x} \frac{e^{-h} - 1}{-h} \right) = \frac{1}{2} \left(e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} + e^{-x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-h} - 1}{-h} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (e^x \cdot 1 + e^{-x} \cdot 1) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \\ &= \cosh x.\end{aligned}$$

(153) Zderivujte

$$f(x) \equiv 1.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$(1)' = 0.$$

(154) Zderivujte

$$f(x) = 6x.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$(6x)' = 6.$$

(155) Zderivujte

$$f(x) = x^2.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$(x^2)' = 2x.$$

(156) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(157) Zderivujte

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

(158) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt[4]{x^7}.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$\left(\sqrt[4]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}.$$

(159) Zderivujte

$$f(x) = x^3 + 2x - \sin x + 2.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$(x^3 + 2x - \sin x + 2)' = 3x^2 + 2 - \cos x.$$

(160) Zderivujte

$$f(x) = -2 \cos x + 4 e^x + \frac{1}{3} x^7.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$\left(-2 \cos x + 4 e^x + \frac{1}{3} x^7\right)' = 2 \sin x + 4 e^x + \frac{7}{3} x^6.$$

(161) Zderivujte

$$f(x) = x e^x.$$

Řešení:

Pomocí vzorce pro derivaci součinu funkcí obdržíme

$$(x e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) e^x.$$

(162) Zderivujte

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}.$$

Řešení:

Derivováním podílu odstaneme

$$\left(\frac{3x - 2}{x^2 + 1}\right)' = \frac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3x - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 1)^2}.$$

(163) Zderivujte

$$f(x) = \frac{x \ln x}{\arcsin x + \operatorname{arctg} x}.$$

Řešení:

Kombinací derivování podílu a součinu získáme přímo

$$\left(\frac{x \ln x}{\arcsin x + \operatorname{arctg} x} \right)' = \frac{(\ln x + 1)(\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \right)}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2}.$$

(164) Zderivujte

$$f(x) = x^7 + 4\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}(3x + 1) + \sin x^2 + 2^x + \arcsin 7x + \ln(1 + x^2) + x^2 e^{1-10x}.$$

Řešení:

Aplikováním základních vzorců, derivováním složené funkce a součinu dostaneme

$$\begin{aligned} & \left(x^7 + 4\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}(3x + 1) + \sin x^2 + 2^x + \arcsin 7x + \ln(1 + x^2) + x^2 e^{1-10x} \right)' = \\ & = 7x^6 + 4 \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' + \frac{1}{(3x + 1)^2 + 1} \cdot (3x + 1)' + (\cos x^2) \cdot (x^2)' + 2^x \ln 2 + \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{1 - (7x)^2}} \cdot (7x)' + \frac{1}{1 + x^2} \cdot (x^2)' + 2x \cdot e^{1-10x} + x^2 \cdot e^{1-10x} \cdot (1 - 10x)' = \\ & = 7x^6 + \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{9x^2 + 6x + 2} + 2x \cos x^2 + 2^x \ln 2 + \frac{7}{\sqrt{1 - 49x^2}} + \frac{2x}{1 + x^2} + \\ & \quad + 2x e^{1-10x} - 10x^2 e^{1-10x}. \end{aligned}$$

(165) Zderivujte

$$f(x) = (3x^2 - 2x + 10)^{10}.$$

Řešení:

$$[(3x^2 - 2x + 10)^{10}]' = 10(3x^2 - 2x + 10)^9 (3x^2 - 2x + 10)' = 10(3x^2 - 2x + 10)^9(6x - 2).$$

(166) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Řešení:

$$\left(\sqrt{4 - x^2}\right)' = \left[(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot (4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 - x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

(167) Zderivujte

$$f(x) = \ln \sin x.$$

Řešení:

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cotg x.$$

(168) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{\sin 3x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\sin 3x})' &= [(\sin 3x)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2} (\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\sin 3x)' = \frac{1}{2} (\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = \\ &= \frac{1}{2} (\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot 3 = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}. \end{aligned}$$

(169) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2} \left(\sqrt{x} - \frac{2}{5x^2} + 6\sqrt[5]{x^3} \right).$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{2}{5}} \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}x^{-2} + 6x^{\frac{3}{5}} \right) = x^{\frac{9}{10}} - \frac{2}{5}x^{-\frac{8}{5}} + 6x, \\ f'(x) &= \frac{9}{10}x^{-\frac{1}{10}} - \frac{2}{5} \left(-\frac{8}{5} \right) x^{-\frac{13}{5}} + 6 = \frac{9}{10\sqrt[10]{x}} + \frac{16}{25\sqrt[5]{x^{13}}} + 6 = \\ &= \frac{9}{10\sqrt[10]{x}} + \frac{16}{25x^2\sqrt[5]{x^3}} + 6 = \frac{9\sqrt[10]{x^9}}{10x} + \frac{16\sqrt[5]{x^2}}{25x^3} + 6. \end{aligned}$$

(170) Zderivujte

$$f(x) = x^2 e^x \sin x.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^2(e^x \sin x)]' = 2x(e^x \sin x) + x^2(e^x \sin x)' = \\ &= 2x e^x \sin x + x^2(e^x \sin x + e^x \cos x) = x e^x(2 \sin x + x \sin x + x \cos x). \end{aligned}$$

(171) Zderivujte

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = (\ln^{-1} x)' = -1 \ln^{-2} x \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln^2 x}.$$

(172) Zderivujte

$$f(x) = \operatorname{arccotg} 2x.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{-1}{1 + (2x)^2} \cdot 2 = \frac{-2}{1 + 4x^2}.$$

(173) Zderivujte

$$f(x) = (2x + 6)4^x.$$

Řešení:

$$f'(x) = 2 \cdot 4^x + (2x + 6)4^x \ln 4 = 2 \cdot 4^x [1 + (x + 3) \ln 4].$$

(174) Zderivujte

$$f(x) = 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \ln 7 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x - \sqrt{x} \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \ln 7 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\ln^2 x} = \\ &= 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \ln 7 \cdot \frac{\ln x - 2}{2\sqrt{x} \ln^2 x}. \end{aligned}$$

(175) Zderivujte

$$f(x) = x \sin^2(2x).$$

Řešení:

$$f'(x) = 1 \sin^2 2x + x 2 \sin 2x \cos 2x 2 = \sin^2 2x + 2x 2 \sin x \cos x = \sin^2 2x + 2x \sin 4x.$$

(176) Zderivujte

$$f(x) = \frac{-2}{\ln \cos x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2[(\ln \cos x)^{-1}]' = -2(-1)(\ln \cos x)^{-2} \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = \\ &= -2 \frac{\sin x}{\cos x (\ln \cos x)^2} = \frac{-2 \operatorname{tg} x}{\ln^2 \cos x}. \end{aligned}$$

(177) Zderivujte

$$f(x) = 7^{2x^3+x-9}.$$

Řešení:

$$f'(x) = 7^{2x^3+x-9} \ln 7(6x^2 + 1).$$

(178) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}} \cdot \frac{(-1)(x^2+1) - (1-x)2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}} \cdot \frac{x^2-2x-1}{2(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

(179) Zderivujte

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{1 + \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{2x^2+2}{x^4+2x^2+1} = \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

(180) Zderivujte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}x}{1-x^2}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{5}x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{5}(1-x^2) - \sqrt{5}x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{\sqrt{5}(x^2+1)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{\frac{(1-x^2)^2+5x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}. \end{aligned}$$

(181) Zderivujte

$$f(x) = x^5 + 5^x.$$

Řešení:

$$f'(x) = 5x^4 + 5^x \ln 5.$$

(182) Zderivujte

$$f(x) = 5x^5 \sqrt[5]{5^x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot 5x^4 \sqrt[5]{5^x} + 5x^5 \frac{1}{5} (5^x)^{-\frac{4}{5}} 5^x \ln 5 = 25x^4 \sqrt[5]{5^x} + x^5 \sqrt[5]{5^x} \ln 5 = \\ &= x^4 \sqrt[5]{5^x} (25 + x \ln 5). \end{aligned}$$

(183) Zderivujte

$$f(x) = \ln \ln(x-3) + \arcsin \frac{x-5}{2}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln(x-3)} \frac{1}{x-3} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-5}{2}\right)^2}} \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{(x-3) \ln(x-3)} + \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 10x - 21}}. \end{aligned}$$

(184) Zderivujte

$$f(x) = \arccos \log_{\frac{2}{3}} x^2.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \log_{\frac{2}{3}}^2 x^2}} \frac{1}{x^2 \ln \frac{2}{3}} 2x = \\ &= \frac{-2}{x \ln \frac{2}{3} \sqrt{1 - \log_{\frac{2}{3}}^2 x^2}}. \end{aligned}$$

(185) Zderivujte

$$f(x) = \ln^2 \cos^3 x^5.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \ln \cos^3 x^5 \cdot \frac{1}{\cos^3 x^5} \cdot 3 \cos^2 x^5 (-\sin x^5) 5x^4 = -30 \frac{\ln \cos^3 x^5 \cdot \cos^2 x^5 \cdot \sin x^5 \cdot x^4}{\cos^3 x^5} = \\ &= -30x^4 \cdot \ln \cos^3 x^5 \cdot \operatorname{tg} x^5. \end{aligned}$$

(186) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln \cos \frac{2x+1}{4}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \left(\ln \cos \frac{2x+1}{4} \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\cos \frac{2x+1}{4}} \left(-\sin \frac{2x+1}{4} \right) \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(\ln \cos \frac{2x+1}{4})^2}} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}. \end{aligned}$$

(187) Zderivujte

$$f(x) = x^x.$$

Řešení:

Poněvadž se proměnná x vyskytuje v základu i v exponentu, musíme využít exponenciální funkci, tj.

$$\begin{aligned}(x^x)' &= (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = \\ &= e^{x \ln x} (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x).\end{aligned}$$

Zkuste výsledek porovnat s tím, který byste obdrželi aplikováním vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$ a/nebo $(a^x)' = a^x \ln a$.

(188) Zderivujte

$$f(x) = x^{x^2}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} (x^{x^2})' &= (e^{x^2 \ln x})' = e^{x^2 \ln x} (x^2 \ln x)' = e^{x^2 \ln x} \left(2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) = \\ &= x^{x^2} (2x \cdot \ln x + x) = x^{x^2+1} (2 \ln x + 1) \end{aligned}$$

(189) Zderivujte

$$f(x) = x^{\sin x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} (x^{\sin x})' &= (e^{\sin x \cdot \ln x})' = e^{\sin x \cdot \ln x} (\sin x \cdot \ln x)' = \\ &= e^{\sin x \cdot \ln x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right). \end{aligned}$$

(190) Zderivujte

$$f(x) = (\sin x)^{\ln x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} [(\sin x)^{\ln x}]' &= (e^{\ln x \cdot \ln \sin x})' = e^{\ln x \cdot \ln \sin x} (\ln x \cdot \ln \sin x)' = \\ &= e^{\ln x \cdot \ln \sin x} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \sin x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right) = \\ &= (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{\ln \sin x}{x} + \frac{\cos x \cdot \ln x}{\sin x} \right). \end{aligned}$$

(191) Zderivujte

$$f(x) = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [e^{\operatorname{tg} x \ln \ln x}]' = e^{\operatorname{tg} x \ln \ln x} (\operatorname{tg} x \ln \ln x)' = (\ln x)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \ln \ln x + \operatorname{tg} x \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} \right) = \\ &= (\ln x)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln \ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x \ln x} \right). \end{aligned}$$

(192) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} \right)' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}} \cdot \frac{-e^x(1+e^x) - (1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}} \cdot \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} = \sqrt{\frac{(1+e^x)^2}{1-e^{2x}}} \cdot \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = \\ &= \frac{-e^x}{(1+e^x)\sqrt{1-e^{2x}}}. \end{aligned}$$

(193) Zderivujte

$$f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{arctg} x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} [(x^2 + 1)^{\operatorname{arctg} x}]' &= \left(e^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2 + 1)} \right)' = e^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2 + 1)} [\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2 + 1)]' = \\ &= e^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2 + 1)} \left[\frac{1}{1 + x^2} \cdot \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \right] = \\ &= (x^2 + 1)^{\operatorname{arctg} x - 1} [2x \operatorname{arctg} x + \ln(x^2 + 1)]. \end{aligned}$$

(194) Zderivujte

$$f(x) = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

Řešení:

$$\left(\ln \frac{e^x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2 + 1}} \cdot \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{e^x} \cdot \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}.$$

(195) Zderivujte

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \left(\ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \right)' &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + 1) - \sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{x(x + 1) - x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

(196) Zderivujte

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \left(\ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \right)' &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}} \cdot \frac{-\cos x(1 + \sin x) - (1 - \sin x)\cos x}{(1 + \sin x)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \cdot \frac{-2 \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\cos x}{1 - \sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

(197) Zderivujte

$$f(x) = \ln \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \left(\ln \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x} \right)' &= \frac{x}{x+2-2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{2}{2\sqrt{x+1}}\right) \cdot x - x - 2 + 2\sqrt{x+1}}{x^2} = \\ &= \frac{(\sqrt{x+1}-1)x - x\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + 2x + 2}{x^2\sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+1} - 2x^2 - 2x} = \\ &= \frac{2+x-2\sqrt{x+1}}{x(x+2-2\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

(198) Zderivujte

$$f(x) = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right)' &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arccos x}{x^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1 + \sqrt{1 - x^2}) - (1 - \sqrt{1 - x^2}) \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2} = \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - x}{1 - 1 + x^2} = \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} = \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\arccos x}{x^2}. \end{aligned}$$

(199) Zderivujte

$$f(x) = (x - 2)\sqrt{1 + e^x} - \ln \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \left[(x - 2)\sqrt{1 + e^x} - \ln \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right]' &= \sqrt{1 + e^x} + (x - 2) \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} - \\ &- \frac{\sqrt{1 + e^x} + 1}{\sqrt{1 + e^x} - 1} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} \frac{(\sqrt{1 + e^x} + 1) - (\sqrt{1 + e^x} - 1) \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}}{(\sqrt{1 + e^x} + 1)^2} = \\ &= \sqrt{1 + e^x} + \frac{(x - 2)e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} - \frac{e^x + \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} - e^x + \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}}{1 + e^x - 1} = \\ &= \sqrt{1 + e^x} + \frac{(x - 2)e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} - \frac{\frac{2e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}}{e^x} = \\ &= \sqrt{1 + e^x} + \frac{(x - 2)e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} - \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} = \\ &= \frac{1 + e^x + \frac{x e^x}{2} - e^x - 1}{\sqrt{1 + e^x}} = \frac{x e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}. \end{aligned}$$

(200) Zderivujte

$$f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \left(\arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x-1+x}{1+x}}} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \\ &= -\sqrt{\frac{1+x}{2x}} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = \\ &= -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x-2x^2}}. \end{aligned}$$

(201) Určete první a druhou derivaci funkce

$$f(x) = x^2 \sin \sqrt{x}.$$

Řešení:

$$(x^2 \sin \sqrt{x})' = 2x \sin \sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x},$$

$$\begin{aligned} (x^2 \sin \sqrt{x})'' &= \left(2x \sin \sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \right)' = \\ &= 2 \sin \sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} = \\ &= 2 \sin \sqrt{x} + \frac{7}{4} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \frac{1}{4} x \sin \sqrt{x}. \end{aligned}$$

(202) Určete první a druhou derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{tg}^2 x.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg}^2 x)' &= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)' = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \\ &= \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \cdot \sin x}{\cos^3 x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg}^2 x)'' &= \left(\frac{2 \cdot \sin x}{\cos^3 x} \right)' = \frac{2 \cdot \cos x \cdot \cos^3 x - 2 \cdot \sin x \cdot 3 \cdot \cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x} = \\ &= \frac{2 \cdot \cos^4 x + 6 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^6 x} = \\ &= \frac{2 \cdot \cos^2 x + 6 \cdot \sin^2 x}{\cos^4 x}. \end{aligned}$$

(203) Určete hodnotu derivace dané funkce v bodě x_0 .

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 8, \quad x_0 = -1.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x + 2, \\ f'(-1) &= 6(-1) + 2 = -4. \end{aligned}$$

(204) Určete hodnotu derivace dané funkce v bodě x_0 .

$$f(x) = \ln \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{12}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}, \\ f'\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4. \end{aligned}$$

- (205) Určete funkční hodnotu dané funkce v bodě x_0 a dále v tomto bodě určete hodnotu první a druhé derivace této funkce.

$$f(x) = \sqrt{3x^4 + 1}, \quad x_0 = -1.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^4 + 1)^{-\frac{1}{2}}12x^3 = \frac{6x^3}{\sqrt{3x^4 + 1}},$$

$$f''(x) = \frac{18x^2\sqrt{3x^4 + 1} - 6x^3 \frac{6x^3}{\sqrt{3x^4 + 1}}}{3x^4 + 1},$$

$$f(-1) = \sqrt{3 + 1} = 2,$$

$$f'(-1) = \frac{-6}{2} = -3,$$

$$f''(-1) = \frac{18 \cdot 2 - \frac{36}{2}}{4} = \frac{9}{2}.$$

- (206) Určete funkční hodnotu dané funkce v bodě x_0 a dále v tomto bodě určete hodnotu první a druhé derivace této funkce.

$$f(x) = x \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Řešení:

$$f'(x) = 1 \sin 2x + x \cos 2x \cdot 2 = \sin 2x + 2x \cos 2x,$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x + 2 \cos 2x + 2x(-\sin 2x) \cdot 2 = 4 \cos 2x - 4x \sin 2x,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 0 = 1,$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 - 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = -\pi.$$

(207) Pomocí inverzní funkce určete derivaci funkce $\arccos x$.

Řešení:

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

(208) Pomocí inverzní funkce určete derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$.

Řešení:

$$(\sqrt[3]{x})' \mid \sqrt[3]{x} = y \mid = \frac{1}{(y^3)'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

(209) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$$

v bodě $x_0 = 2$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = 2$, tj.

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 11}} \stackrel{x=2}{\rightsquigarrow} \frac{1}{6}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11} \stackrel{x=2}{\rightsquigarrow} 3.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} t: y - 3 &= \frac{1}{6}(x - 2), & n: y - 3 &= -6(x - 2), \\ y &= \frac{x}{6} + \frac{8}{3}, & y &= -6x + 15. \end{aligned}$$

(210) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$$

v bodě $x_0 = \sqrt{2}$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = \sqrt{2}$, tj.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2-1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \stackrel{x=\sqrt{2}}{\rightsquigarrow} \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} \stackrel{x=\sqrt{2}}{\rightsquigarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} \text{t: } y - \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (x - \sqrt{2}), & \text{n: } y - \frac{\pi}{4} &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot (x - \sqrt{2}), \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1 + \frac{\pi}{4}, & y &= -\frac{2}{\sqrt{2}}x + 2 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(211) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = 4 - x^2$$

v dotykovém bodě x_0 , jenž je průsečíkem grafu funkce $f(x)$ s kladnou částí osy x .

Řešení:

Nejdříve určíme bod x_0 . Funkce $f(x)$ má s osou x průsečíky v bodech, které jsou řešením kvadratické rovnice $f(x) = 0$. Tato řešení jsou ± 2 , proto $x_0 = 2$. Nyní spočítáme funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = 2$, tj.

$$f'(x) = -2x \xrightarrow{x=2} -4, \quad f(x) = 4 - x^2 \xrightarrow{x=2} 0.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} \text{t: } y - 0 &= -4(x - 2), & \text{n: } y - 0 &= \frac{1}{4} \cdot (x - 2), \\ y &= -4x + 8, & y &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(212) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

v bodě $x_0 = 1$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = 1$, tj.

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{2x}{2}\right) \stackrel{x=1}{\rightsquigarrow} 0, \quad f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \stackrel{x=1}{\rightsquigarrow} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} \text{t: } y - e^{-\frac{1}{2}} &= 0(x - 1), & \text{n: } x &= 1, \\ y &= e^{-\frac{1}{2}}, & x &= 1. \end{aligned}$$

(213) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = x^2 \log_2(x^2 - 7).$$

v bodě $x_0 = -3$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = -3$, tj.

$$f'(x) = 2x \log_2(x^2 - 7) + \frac{2x^3}{(x^2 - 7) \ln 2} \stackrel{x=-3}{\rightsquigarrow} -6 - \frac{27}{\ln 2},$$

$$f(x) = x^2 \log_2(x^2 - 7) \stackrel{x=-3}{\rightsquigarrow} 9.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: y - 9 = \left(-6 - \frac{27}{\ln 2}\right)(x + 3),$$

$$y = -\left(6 + \frac{27}{\ln 2}\right)x + 9 - 3\left(6 + \frac{27}{\ln 2}\right),$$

$$n: y - 9 = \frac{1}{6 + \frac{27}{\ln 2}}(x + 3),$$

$$y = \frac{\ln 2}{6 \ln 2 + 27}x + 9 + 3 \frac{\ln 2}{6 \ln 2 + 27}.$$

(214) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}.$$

v bodě $x_0 = -2$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = -2$, tj.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x^2 - 3)^2} \stackrel{x=-2}{\rightsquigarrow} 11,$$

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3} \stackrel{x=-2}{\rightsquigarrow} 3.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: y - 3 = 11(x + 2),$$

$$y = 11x + 25,$$

$$n: y - 3 = -\frac{1}{11}(x + 2),$$

$$y = -\frac{x}{11} + \frac{31}{11}.$$

(215) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = 2x + \sin x.$$

v bodě $x_0 = \pi$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = \pi$, tj.

$$f'(x) = 2 + \cos x \stackrel{x=\pi}{\rightsquigarrow} 1,$$

$$f(x) = 2x + \sin x \stackrel{x=\pi}{\rightsquigarrow} 2\pi.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: y - 2\pi = 1(x - \pi),$$

$$y = x + \pi,$$

$$n: y - 2\pi = -1(x - \pi),$$

$$y = -x + 3\pi.$$

(216) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 4x + 11}.$$

v bodě $x_0 = -1$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = -1$, tj.

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 10x^2 + 23x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 11}} \stackrel{x=-1}{\rightsquigarrow} -\frac{19}{2},$$

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 4x + 11} \stackrel{x=-1}{\rightsquigarrow} 8.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: y - 8 = -\frac{19}{2}(x + 1),$$

$$y = -\frac{19}{2}x - \frac{3}{2},$$

$$n: y - 8 = \frac{2}{19}(x + 1),$$

$$y = \frac{2}{19}x + \frac{154}{19}.$$