I. 7. Diferenciál funkce a Taylorova věta

Věta 26. *Funkce* f *má v bodě* x_0 *diferenciál (je diferencovatelná v* x_0*) právě tehdy, když existuje vlastní derivace* $f'(x_0)$. *Přitom platí*

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h, \quad \textit{píšeme též } df(x) = f'(x)\, dx.$$

Pro dostatečně malé h platí:

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h, \quad \text{též } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ pro } x \to x_0.$$

Věta 27 (Taylorova věta). *Nechť má funkce* f *v okolí bodu* x_0 *vlastní derivace až do řádu* $n+1$ *pro nějaké* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Pak pro všechna* x *z tohoto okolí platí tzv.* *Taylorův vzorec*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$
$$\textit{kde} \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

přičemž ξ *je vhodné číslo ležící mezi* x_0 *a* x. *Chyba* $R_n(x)$ *se nazývá* *zbytek*

- Zbytek uvedený v Taylorově větě je v tzv. *Lagrangeově tvaru*, což není jediná možnost jeho vyjádření.
- Pokud v Taylorově vzorci vynecháme zbytek, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*.
- Pokud v Taylorově větě položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův vzorec*, resp. tzv. *Maclaurinův polynom*.

(295) Určete $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ pro $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ a $x_0 = 1$.

Řešení:

Nejdříve musíme vyčíslit derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0, tj.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{1}{\sqrt{2}},$$

proto dle definice platí

$$\mathrm{d}f(1)(h) = \frac{\sqrt{2}}{2}h.$$

(296) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\sqrt{382}$.

Řešení:

Nejdříve musíme zvolit vhodnou funkci $f(x)$, jejímž vyčíslením obdržíme $\sqrt{382}$. Zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$ (druhou možnou volbou by mohla být např. funkce $g(x) = \sqrt[x]{382}$). Nyní musíme zvolit vhodný bod x_0. Tento bod musí být zvolen tak, abychom byli bez problémů schopni vyčíslit funkci $f(x)$ v tomto bodě. Navíc, tento bod by měl být nejbližší možný k zadané hodnotě, abychom se dopustili co nejmenší chyby. Proto zvolíme $x_0 = 400$ a $h = -18$ (aby platilo $382 = x_0 + h$). Potom vyčíslíme funkci a její derivaci v bodě x_0, tj.

$$f(x) = \sqrt{x} \overset{x_0=400}{\rightsquigarrow} 20, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{x_0=400}{\rightsquigarrow} \frac{1}{40}.$$

Nyní pomocí diferenciálu funkce obdržíme

$$f(382) = f(400-18) = \sqrt{382} \approx 20 - \frac{18}{40} = 19,55.$$

(297) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\sqrt[5]{36}$.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 32$ a $h = 4$. Potom

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \overset{x_0=32}{\rightsquigarrow} 2, \quad f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \overset{x_0=32}{\rightsquigarrow} \frac{1}{80}.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(36) = f(32+4) = \sqrt[5]{36} \approx 2 + \frac{4}{80} = 2,05.$$

(298) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\operatorname{arctg} 1,1$.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$ a $h = 0,1$. Potom

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{\pi}{4}, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{1}{2}.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(1,1) = f(1+0,1) = \operatorname{arctg} 1,1 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{0,1}{2} = \frac{\pi}{4} + 0,05.$$

(299) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\ln 1,3$.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ a $h = 0,3$. Potom

$$f(x) = \ln x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 1.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(1,3) = f(1+0,3) = \ln 1,3 \approx 0 + 1 \cdot 0,3 = 0,3.$$

(300) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\sin(-0,22)$.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ a $h = -0,22$. Potom

$$f(x) = \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \quad f'(x) = \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(-0,22) = f(0 - 0,22) = \sin(-0,22) \approx 0 + 1 \cdot (-0,22) = -0,22.$$

(301) Napište Taylorův polynom pro $n = 4$, $x_0 = 1$ a $f(x) = x \ln x$.

Řešení:

Než sestavíme Taylorův polynom, musíme vyčíslit funkci a všechny potřebné (tj. až do čtvrtého řádu) derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 0, \\ f'(x) &= \ln x + 1 \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 1, \\ f''(x) &= \frac{1}{x} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 1, \\ f'''(x) &= -\frac{1}{x^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} -1, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{2}{x^3} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 2. \end{aligned}$$

Proto nyní dle definice platí

$$\begin{aligned} x \ln x &= 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{2}{4!}(x-1)^4 = \\ &= x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4. \end{aligned}$$

(302) Napište Taylorův vzorec pro $n = 2$, $x_0 = 1$ a $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Řešení:

Nejdříve vyčíslíme funkci a první dvě derivace v bodě x_0 a také spočítáme (ale nevyčíslíme) třetí derivaci, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg} x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{\pi}{4}, \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{2}, \\ f'''(x) &= \frac{2\left(3x^2-1\right)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Proto nyní platí

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{6\xi^2-2}{6(\xi^2+1)^3}(x-1)^3, \quad \text{kde } \xi \text{ leží mezi } x \text{ a } 1.$$

(303) Určete maximální chybu v aproximaci z Příkladu 302, kde $x \in (0,9; 1,1)$.

Řešení:

Chyba je určena výrazem

$$R_2(x) = \frac{6\xi^2 - 2}{6(\xi^2+1)^3}(x-1)^3, \quad 0,9 < \xi < 1,1.$$

Musíme tedy vhodně omezit výraz $|R_2(x)|$ a tak určit maximální chybu aproximace. Nejdříve se zaměříme na čitatele, tj.

$$\left|6\xi^2 - 2\right| \;\Big|\; |a+b| \le |a| + |b| \;\Big|\; \le 6\,|\xi|^2 + 2 < 6 \cdot 1,1^2 + 2 = 9,26.$$

Jmenovatele omezíme takto

$$\left|6(\xi^2+1)^3\right| = 6\left(\xi^2+1\right)^3 \ge 10,86, \quad \text{neboť jistě platí } \xi^2 + 1 > 0,9^2 + 1 = 1,81.$$

Proto nyní můžeme psát

$$|R_2(x)| = \left|\frac{6\xi^2 - 2}{6(\xi^2+1)^3}\right| |(x-1)|^3 \le \frac{9,26}{10,86}\,|(x-1)|^3 \le 0,8526 \cdot 0,1^3 = 0,00085 \doteq 0,0009.$$

Maximální chyba aproximace Taylorovým polynomem druhého stupně je $0,0009$.

(304) Vyjádřete funkci $\sin \frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x-2$.

Řešení:

Takovéto vyjádření je možné pomocí Taylorova polynomu. Ze zadání plyne, že $x_0 = 2$ a že musíme polynom sestavit v obecné podobě, neboť nebyl zadán stupeň aproximace. Proto

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin \frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 1,\\
f'(x) &= \frac{\pi}{4} \cos \frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0,\\
f''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin \frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,\\
f'''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cos \frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0,\\
f^{(4)}(x) &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \sin \frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} \left(\frac{\pi}{4}\right)^4.
\end{aligned}
$$

Z tvaru jednotlivých derivací můžeme pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ odvodit

$$
\begin{aligned}
f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} \sin \frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k},\\
f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1} \cos \frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Proto hledaný Taylorův polynom je tvaru

$$
\sin \frac{x\pi}{4} = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{(x-2)^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \cdots .
$$

(305) Najděte Maclaurinův vzorec pro obecné n a pro funkci $f(x) = e^x$.

Řešení:

Musíme vyčíslit funkci a všechny derivace v bodě x_0, tj.

$$f(x) = e^x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1,$$

$$f'(x) = e^x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1.$$

Navíc je zřejmé že platí $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x)$ a $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 1$. Proto můžeme sestavit Taylorův polynom ve tvaru

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kde ξ leží mezi 0 a x.

(306) Najděte Maclaurinův vzorec pro obecné n a pro funkci $f(x) = \sin x$.

Řešení:

Nejdříve vyčíslíme funkci a všechny derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0,\\
f'(x) &= \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1,\\
f''(x) &= -\sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0,\\
f'''(x) &= -\cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} -1,\\
f^{(4)}(x) &= \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0.
\end{aligned}$$

Navíc je zřejmé, že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\begin{aligned}
f^{(2k)} &= (-1)^k \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0,\\
f^{(2k+1)} &= (-1)^k \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1.
\end{aligned}$$

Proto můžeme napsat

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos \xi,$$

kde ξ leží mezi 0 a x.

(307) Najděte Maclaurinův vzorec pro obecné n a pro funkci $f(x) = \cos x$.

Řešení:

Nejdříve vyčíslíme funkci a všechny derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \overset{x_0=0}{\leadsto} 1, \\ f'(x) &= -\sin x \overset{x_0=0}{\leadsto} 0, \\ f''(x) &= -\cos x \overset{x_0=0}{\leadsto} -1, \\ f'''(x) &= \sin x \overset{x_0=0}{\leadsto} 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \overset{x_0=0}{\leadsto} 1. \end{aligned}$$

Navíc je zřejmé, že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} f^{(2k)} &= (-1)^k \cos x \overset{x_0=0}{\leadsto} 1, \\ f^{(2k+1)} &= (-1)^k \sin x \overset{x_0=0}{\leadsto} 0. \end{aligned}$$

Proto můžeme napsat

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi,$$

kde ξ leží mezi 0 a x.

(308) Užitím Maclaurinova polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.

Řešení:

Z Příkladu 305 víme, že platí

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

což pro $x = 1$ dává

$$e = 1 + x + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!},$$

kde $\xi \in (0,1)$. K tomu, abychom dosáhli chyby menší než $0,001$, musíme vyřešit nerovnici

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < 0,0001 \; \Big| \text{ protože } \xi \in (0,1) \Big| \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{(n+1)!} < 0,0001 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3000 < (n+1)! \quad \Rightarrow \quad n > 5.$$

Proto musíme použít Taylorův polynom alespoň šestého stupně, tj.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2,718055556.$$

(309) Pro jaké hodnoty x platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?

Řešení:

Z Příkladu 307 pro $n = 2$ víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_2(x),$$

kde $R_2(x) = \frac{x^4 \cos \xi}{4!}$ a ξ leží mezi 0 a x. Z omezenosti funkce $\cos x$ plyne, že

$$\left| \frac{x^4 \cos \xi}{24} \right| \leq \frac{|\cos \xi| \, x^4}{24} \leq \frac{x^4}{24}.$$

Musíme proto vyřešit nerovnici

$$\frac{x^4}{24} \leq 0,0001 \quad \Rightarrow \quad x^4 \leq 0,0001.$$

Řešením tedy je $x \in [-\sqrt[4]{0,0024}, \sqrt[4]{0,0024}] \doteq [-0,222, 0,222]$, tj. $|x| \leq 0,222 = 12°30'$.

(310) Pomocí Taylorova polynomu pro $n = 3$ určete přibližně $\sqrt[3]{30}$.

Řešení:

Uvažujme funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a položme $x_0 = 27$. Vypočteme funkční hodnotu a všechny potřebné derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} 3, \\ f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} \frac{1}{27}, \\ f''(x) &= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} -\frac{2}{2187}, \\ f'''(x) &= \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} \frac{10}{177147}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat přibližnou hodnotu

$$\sqrt[3]{30} = 3 + \frac{1}{27} \cdot 3 + \frac{-\frac{8}{2187}}{2} \cdot 3^2 + \frac{\frac{10}{177147}}{6} \cdot 3^3 \doteq 3,10725.$$

(311) Pomocí Maclaurinova mnohočlenu třetího stupně, vyjádřete hodnotu $\cos 1^\circ$ (výsledek uveďte na 6 desetinných míst).

Řešení:

Z Příkladu 307 víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2},$$

proto obdržíme

$$\cos 1^\circ = \cos \frac{\pi}{180} = 1 - \frac{\frac{\pi^2}{180^2}}{2} \doteq 0,999847.$$

(312) Pomocí Maclaurinova mnohočlenu třetího stupně, vyjádřete hodnotu $\sin 2^\circ$ (výsledek uveďte na 6 desetinných míst).

Řešení:

Z Příkladu 306 víme, že platí

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6},$$

proto obdržíme

$$\sin 2^\circ = \sin \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90} - \frac{\frac{\pi^3}{90^3}}{6} \doteq 0,034899.$$

(313) Vypočtěte číslo $\log 11$ s přesností 10^{-5}.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \log x$ a $x_0 = 10$. Nyní vyčíslíme funkci a její derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log x \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} 1,\\
f'(x) &= \frac{1}{x\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} \frac{1}{10\ln 10},\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{10^2\ln 10},\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} \frac{2}{10^3\ln 10},\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} -\frac{6}{10^4\ln 10}.
\end{aligned}$$

Obecně můžeme psát

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n\ln 10} \overset{x_0=10}{\rightsquigarrow} (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{10^n\ln 10}.$$

Tedy Taylorův vzorec je tavru

$$\begin{aligned}
\log x = 1 + \frac{1}{10\ln 10}(x-10) - \frac{\frac{1}{10^2\ln 10}}{2!}(x-10)^2 + \frac{\frac{2}{10^3\ln 10}}{3!}(x-10)^3 +\\
+\dots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!10^n\ln 10}(x-10)^n + R_n(x),
\end{aligned}$$

kde

$$R_n(x) = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)!\xi^n\ln 10}(x-10)^{n+1}$$

a ξ leží mezi x a 10. Abychom dosáhli požadované přesnosti, musíme vyřešit nerovnici

$$\begin{aligned}
|R_n(11)| = \frac{1}{(n+1)\xi^{n+1}\ln 10} < 10^{-5} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1}\frac{1}{\xi^{n+1}} < 10^{-5}\ln 10 \ \Big|\ \tfrac{1}{n+1} < 1 \ \Big| \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{\xi^{n+1}} < 10^{-5}\ln 10 \ \Big|\ \xi \in (10,11) \ \Big| \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{10^{n+1}} < 10^{-5}\ln 10 \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad 10^{-n-1} < 10^{-5}\ln 10 \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad (-n-1)\ln 10 < \ln\left(10^{-5}\ln 10\right) < 5 \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad -n-1 < \frac{\ln\left(10^{-5}\ln 10\right)}{\ln 10} < -5 \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad -n < -4 \quad \Rightarrow \quad n > 4,
\end{aligned}$$

musíme tedy použít Taylorův polynom alespoň pátého stupně, tj.

$$\begin{aligned}
\log 11 = 1 + \frac{1}{10\ln 10} - \frac{1}{2\cdot 10^2\ln 10} + \frac{2!}{3!\cdot 10^3\ln 10} -\\
- \frac{3!}{4!\cdot 10^4\ln 10} + \frac{4!}{5!\cdot 10^5\ln 10} = 1{,}041392752.
\end{aligned}$$