I. 4. l'Hospitalovo pravidlo

Věta 11 (l'Hospitalovo pravidlo). *Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z podmínek*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,
- $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, pak existuje také* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

V roce 1921 bylo dokázáno, že autorem tohoto pravidla je *Johann I. Bernoulli* (1667–1748), jehož byl *Guillaume Francois Antoine de l'Hospital* (1661–1704) žákem. Na základě poznámek z Bernoulliových přednášek vydal l'Hospital v roce 1696 první tištěnou učebnici diferenciálního počtu *Analýza nekonečně malých veličin.*

Výpočet limit s neurčitými výrazy pomocí l'Hospitalova pravidla:

- $$\infty - \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \Rightarrow \frac{0}{0};$$
- $$-\infty + \infty \Rightarrow \text{analogicky jako předchozí úprava;}$$
- $$0 \cdot \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \Rightarrow \frac{0}{0};$$
- $$0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0}(g(x)\ln f(x))}$$
  $$\Rightarrow \text{ předchozí případ } \Rightarrow \frac{0}{0}.$$

(217) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} \left| \tfrac{0}{0} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2x-1} = \frac{4}{3}.$$

(218) Pro $a > 0$ vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} \left| \tfrac{0}{0} \right| \stackrel{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a}{1} = \ln a.$$

(219) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{1}{2}.$$

(220) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2} \;\Big|\, \tfrac{0}{0} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi\sin(\pi x)}{2(x-1)} \;\Big|\, \tfrac{0}{0} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(221) Následující příklad ukazuje, že ne vždy je vhodné použít l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \;\Big|\, \frac{\infty}{\infty} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \;\Big|\, \frac{\infty}{\infty} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

čímž jsme se dostali zpět k zadání. Řešení příkladu bez použití l'Hospitalova pravidla vede k výsledku

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

(222) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} \operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} \operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x) \; \left| \infty\cdot 0 \right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}} \; \left| \tfrac{0}{0} \right| =$$

$$\overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} -\frac{\operatorname{tg}^2 2x \cos^2 2x}{2 \operatorname{tg} x \cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} -\frac{\sin^2 2x}{2 \sin x \cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} -\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} \sin 2x = -1.$$

(223) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} \left| \tfrac{0}{0} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\sin x}\cos x}{4\cos 4x} = \frac{1}{4}.$$

(224) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\,\mathrm{tg}\, x.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\,\mathrm{tg}\, x \;\left|\, 0\cdot\infty \,\right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\mathrm{cotg}\, x} \;\left|\, \tfrac{0}{0} \,\right| =$$

$$\overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x = 0.$$

(225) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)\ \big|\,\infty-\infty\,\big|\ =\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}\ \big|\tfrac{0}{0}\big|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}\ \big|\tfrac{0}{0}\big|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}\ \big|\tfrac{0}{0}\big|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x+4\cos x-4x\sin x-x2x\sin x-x^2\cos x}=\frac{1}{6}.$$

(226) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\ \Big|\infty-\infty\Big|\ =\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{(e^x-1)\sin x}\ \Big|\tfrac{0}{0}\Big|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{e^x\sin x+(e^x-1)\cos x}\ \Big|\tfrac{0}{0}\Big|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-(e^x-1)\sin x}=\frac{1}{2}.$$

(227) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\ \left|\,\infty-\infty\,\right|\ =\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}\ \left|\,\tfrac{0}{0}\,\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\ \left|\,\tfrac{0}{0}\,\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$$

(228) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)\ \left|-\infty+\infty\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\left(e^{2x}-1\right)+2x}{2x^2\left(e^{2x}-1\right)}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+2x\,e^{2x}-1-2\,e^{2x}+2}{4x\left(e^{2x}-1\right)+4x^2\,e^{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{2x}+2x\,e^{2x}+1}{4x\,e^{2x}-4x+4x^2\,e^{2x}}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\,e^{2x}+2\,e^{2x}+4x\,e^{2x}}{4\,e^{2x}+8x\,e^{2x}-4+8x\,e^{2x}+8x^2\,e^{2x}}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\,e^{2x}+8x\,e^{2x}}{8\,e^{2x}+16x\,e^{2x}+32x\,e^{2x}+16x\,e^{2x}+16x^2\,e^{2x}} = \frac{1}{6}.$$

(229) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)\ \left|\infty-\infty\right|\ =\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

(230) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\ln x}-\frac{1}{x^2-1}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\ln x}-\frac{1}{x^2-1}\right)\ \left|\infty-\infty\right|\ =\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-2\ln x}{2(x^2-1)\ln x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-\frac{2}{x}}{4x\ln x+\frac{2(x^2-1)}{x}}\cdot\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{4x^2\ln x+2x^2-2}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{8x\ln x+4x+4x}=\frac{1}{2}.$$

(231) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right).$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)\ \Big|\pm\infty\mp\infty\Big|\ =\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}\ \Big|\tfrac{0}{0}\Big|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\\
&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{1+x}{1+x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{(1+x)\ln(1+x)+x}\ \Big|\tfrac{0}{0}\Big|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\ln(1+x)+1+1}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(232) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x \ \Big| \ 0\cdot(-\infty) \ \Big| = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \ \Big| \ \tfrac{-\infty}{\infty} \ \Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

(233) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to\infty} (\pi - 2\,\mathrm{arctg}\, x) \ln x.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} (\pi - 2\,\mathrm{arctg}\, x) \ln x \;\Big|\, 0\cdot\infty \,\Big| = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\,\mathrm{arctg}\, x}{\frac{1}{\ln x}} \;\Big|\, \tfrac{0}{0} \,\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{-2}{1+x^2}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\ln^2 x}{1+x^2} \;\Big|\, \tfrac{\infty}{\infty} \,\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln^2 x + \frac{4x\ln x}{x}}{2x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln^2 x + 4\ln x}{2x} \;\Big|\, \tfrac{\infty}{\infty} \,\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4\ln x}{x} + \frac{4}{x}}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4\ln x + 4}{2x} \;\Big|\, \tfrac{\infty}{\infty} \,\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}}{2} = 0.$$

(234) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x\,e^{-x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} x\,e^{-x} \;\Big|\,\infty\cdot 0\,\Big|\; = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \;\Big|\,\tfrac{\infty}{\infty}\,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

(235) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}}\,.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}} \;\Big|\, 0\cdot\infty \,\Big| = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-1}} \;\Big|\, \frac{\infty}{\infty} \,\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}\, e^{\frac{1}{x}}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \;\Big|\, e^{\frac{1}{0^+}} \,\Big| = \infty.$$

(236) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0^-} x\,e^{-\frac{1}{x}}\,.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^-} x\,e^{-\frac{1}{x}}\ \left|\,0\cdot\infty\,\right| = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{-1}}\ \left|\,\frac{\infty}{\infty}\,\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^{-2}\,e^{-\frac{1}{x}}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^-} -e^{-\frac{1}{x}}\ \left|\,-e^{-\frac{1}{0^-}}\,\right| = -\infty.$$

(237) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{100}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{100}}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-2}}(-1)(-2)x^{-3}}{100x^{99}}=\frac{1}{50}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{102}}.$$

Je vidět, že situace se zhoršila a tudy cesta nevede. Upravme tedy zadání a počítejme znovu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{100}} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^{-100}}{e^{x^{-2}}}\ \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-100x^{-101}}{e^{x^{-2}}(-2)x^{-3}} = 50\lim_{x\to 0}\frac{x^{-98}}{e^{x^{-2}}}\ \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| = \\
&\ \left|\ \textit{použijeme ještě } 49\times\ \textit{l'Hospitalovo pravidlo}\ \right|\\
&= 50!\lim_{x\to 0}\frac{x^0}{e^{x^{-2}}}\ \left|\tfrac{1}{\infty}\right|\ = 0.
\end{aligned}$$

(238) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\cos 3x\right)} = e^{-\frac{9}{2}},$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{x^2}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x\cos 3x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2\cos 3x - 6x\sin 3x} = -\frac{9}{2}.$$

(239) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\operatorname{cotg} 2x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\operatorname{cotg} 2x} = e^{\lim_{x\to 0}\left\{\operatorname{cotg}(2x)\cdot\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]\right\}} = e,$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0}\left\{\operatorname{cotg}(2x)\cdot\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\cdot\ln\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\sin 2x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|\ \stackrel{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)\cdot\ln\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos(2x)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}}{2\cos 2x} = 1.$$

(240) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1+} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1+} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{1-x}\cdot \ln x\right)} = e^{-1},$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{1-x}\cdot \ln x\right) = \lim_{x\to 1+}\frac{\ln x}{1-x} \;\Big|\, \tfrac{0}{0} \,\Big|\; \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

(241) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [\operatorname{tg}(2x)\cdot\ln(\operatorname{tg} x)]} = e^{-1},$$

neboť platí

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [\operatorname{tg}(2x)\cdot\ln(\operatorname{tg} x)] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)\cdot\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos 2x} \left| \tfrac{0}{0} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos(2x)\cdot\ln(\operatorname{tg} x) + \sin(2x)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-2\sin 2x} = -1.$$

(242) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{-\frac{1}{6}},$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{(\cos x)\cdot x-\sin x}{x^2}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{4\sin x+2x\cos x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{4\cos x+2\cos x-2x\sin x} = -\frac{1}{6}.$$

(243) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)} = e^0 = 1,$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{x}\ \left|\begin{array}{l}\text{což je limita typu } \frac{0}{0}\text{, neboť platí}\\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1\end{array}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\,\frac{\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x}{x\operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)x\operatorname{arctg} x}\ \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-2x\operatorname{arctg} x-1}{(1+3x^2)\operatorname{arctg} x+x}\ \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{arctg} x-\frac{2x}{1+x^2}}{6x\operatorname{arctg} x+\frac{1+3x^2}{1+x^2}+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2(1+x^2)\operatorname{arctg} x-2x}{6x(1+x^2)\operatorname{arctg} x+1+3x^2+1+x^2} = 0.$$

(244) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(\sin x \cdot \ln \operatorname{cotg} x)} = 1,$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x \cdot \ln \operatorname{cotg} x) \; \left| 0 \cdot \infty \right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} \; \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{\sin^2 x \cdot \cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0.$$

(245) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\cdot \ln\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{-\frac{1}{3}},$$

neboť platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\cdot \ln\frac{\sin x}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{(\cos x)x-\sin x}{x^2}}{\sin x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x + x\sin 2x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{2\sin x\cos x+\sin 2x+2x\cos 2x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\sin 2x+\sin 2x + 2x\cos 2x}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-\cos x + x\sin x}{2\cos 2x+2\cos 2x+2\cos 2x-4x\sin 2x} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(246) Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{x^2 - \pi^2}, & x \neq \pi, \\ -\frac{1}{2}, & x = \pi \end{cases}$$

spojitá.

<u>**Řešení:**</u>

Pomocí l'Hospitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{x^2 - \pi^2} \ \left| \tfrac{0}{0} \right| \stackrel{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{\cos 2x \cdot \sin 3x - 2x \sin 2x \cdot \sin 3x + 3x \cos 2x \cdot \cos 3x}{2x} = -\frac{3}{2},$$

což znamená, že funkce $f(x)$ není spojitá.