I. 2. Limity posloupností a funkcí

Limita posloupnosti

Definice 3. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* A (píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí, že $|a_n - A| < \varepsilon$, nebo-li

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_0 \text{ platí } |a_n - A| < \varepsilon.$$

Definice 4. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* $\pm\infty$ (píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$), jestliže ke každému $A \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n > A$ ($a_n < A$), nebo-li

$$\forall A > 0\ (A < 0)\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_0 \text{ platí } a_n > A\ (a_n < A).$$

Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$, platí následující pravidla pro počítání s limitami:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

Jestliže navíc $B \neq 0$, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Důležité vzorce:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{ohraničená posloupnost}}{\text{posloupnost jdoucí do } \pm\infty} = 0.$$

Neučité výrazy:

$$\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \pm\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

(69) Z definice limity dokažte, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

K číslu $\varepsilon = 0{,}1$ určete n_0.

Řešení:

Ke každému ε musíme najít příslušné n_0 tak, že platí nerovnost z definice, tzn.

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Proto řešením dostaneme

$$\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| < \varepsilon \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n+1 < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1,$$

kde $\lfloor\cdot\rfloor$ značí (dolní) celou část čísla. Pro $\varepsilon = 0,1$ máme $n_0 = 10$.

(70) Z definice limity dokažte, že
$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Řešení:

Mějme dle definice $A \in \mathbb{R}$. Musíme určit n_0 tak, aby
$$\forall n > n_0 \text{ platilo } \ a_n > A, \quad \text{tj. } n > A,$$
proto $n_0 := \max\{1 + \lfloor A \rfloor, 1\}$.

(71) Udejte příklad posloupností a_n a b_n takových, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a zároveň
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \text{nebo} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Řešení:

Řešením jsou např. posloupnosti $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ a $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

(72) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{3}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = -1.$$

(73) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{3n+n^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{3n+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{3}{n}+1\right)} = 3.$$

(74) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty}(n^2-5n-1).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-5n-1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=\infty.$$

(75) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{-8n^2+6n+7}{2n+5}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-8n^2+6n+7}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(-8n+6+\frac{7}{n}\right)}{n\left(2+\frac{5}{n}\right)} = -\infty.$$

(76) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)\frac{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a)(n+b)-n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n+ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(a+b+\frac{ab}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}+1\right)}=\frac{a+b}{2}.$$

(77) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n+1}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n+1}\right)\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n+1}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-(2n+1)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n-1+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(-\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}=-\infty.$$

(78) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right)\frac{\sqrt{9n^2-4}+3n}{\sqrt{9n^2-4}+3n}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-4-9n^2}{\sqrt{9n^2-4}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{9n^2-4}+3n}=0.$$

(79) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-2n\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{9n^2-4}-2n\right)\frac{\sqrt{9n^2-4}+2n}{\sqrt{9n^2-4}+2n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-4-4n^2}{\sqrt{9n^2-4}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(5n-\frac{4}{n}\right)}{n\left(\sqrt{9-\frac{4}{n^2}}+2\right)}=\infty.$$

(80) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3-(n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{4}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\infty.$$

(81) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{n^4+18n}}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{n^4+18n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-\frac{16n}{\sqrt[3]{n^4}}\right)}{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{18n}{n^4}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-16\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{18}{n^3}}} = 0.$$

(82) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/3}\left(\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}+\sqrt{\frac{5}{n^{4/3}}+\frac{3}{n^{7/3}}}\right)}{n^{5/3}\left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+\frac{4}{n^{7/3}}+\frac{1}{n^{10/3}}}-\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^5}}\right)} = -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$$

(83) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{a+\frac{1}{n}} - \sqrt{a}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{a+\frac{1}{n}} - \sqrt{a}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \left(\sqrt{a+\frac{1}{n}} - \sqrt{a}\right) \frac{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{a+\frac{1}{n}-a}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

(84) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 1.$$

(85) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}(1+\cos n\pi).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\cos n\pi) = 1 + \lim_{n\to\infty}(\cos n\pi) = 1 + (\pm 1) \quad \Rightarrow \text{limita neexistuje.}$$

(86) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi).$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi) = 1 + \lim_{n\to\infty}(\sin n\pi) = 1.$$

(87) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+\sin n}{3n-1}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+\sin n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2+\frac{\sin n}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)} \left| \begin{array}{c} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \\ \text{neboť } -1 \leq \sin n \leq 1 \end{array} \right| = \frac{2}{3}.$$

(88) Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{5}\sqrt[n]{n}\right) = 1,$$
neboť platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Nechť platí
$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n,$$
kde jistě $h_n \geq 0$. Musíme proto ukázat, že $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Postupnými úpravami obdržíme
$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= 1 + h_n \ /^n \\
n &= (1+h_n)^n = 1 + h_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n \\
&\Downarrow \\
n &\geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \geq 0 \\
0 \leftarrow 0 \leq h_n^2 &\leq \frac{2}{n-1} \to 0
\end{aligned}$$
proto z Věty o limitě sevřené posloupnosti (též „o dvou policajtech“) plyne $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

(89) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{1/2} = \sqrt{1} = 1.$$

(90) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

Řešení:

Zadanou posloupnost můžeme omezit

$$3 \leftarrow \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 3,$$

proto z Věty o limitě sevřené posloupnosti plyne $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.

(91) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 4^{n}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right]^{2} = \infty\cdot(e\cdot 1)^{2} = \infty.$$

(92) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}=$$
$$=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right]}=\frac{1}{e}.$$

(93) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3} = e^3\,.$$

(94) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}\right]=e\,.$$

(95) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right]^{1/5}=\sqrt[5]{e}.$$

(96) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{7n+6}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{7n+6} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{\frac{7}{2}(2n+3)-\frac{9}{2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{2n+3}\right]^{7/2}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{-9/2} = \sqrt{e^7}.$$

(97) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{n^2+1}{2n-1}\right).$$

Řešení:

Neboť platí

$$-1 \le \cos\frac{n^2+1}{2n-1} \le 1 \quad\Rightarrow\quad 0 \leftarrow -\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\cos\frac{n^2+1}{2n-1} \le \frac{1}{n} \to 0,$$

plyne z Věty o limitě sevřené posloupnosti $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{n^2+1}{2n-1}\right) = 0$.

(98) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{2 \cdot 4^n}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{2 \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\,(1 + (-1)^n)}{2 \cdot 2^n \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] = 0.$$

(99) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - 3n!}{(n+2)! + 1}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - 3n!}{(n+2)! + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)n! - 3n!}{(n+2)(n+1)n! + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1) - 3}{(n+2)(n+1) + \frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 2 - 3}{n^2 + 3n + 2 + \frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2 \cdot n!}} = 1.$$

(100) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)+1}{(n+2)-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

(101) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \;\left|\begin{array}{l}\text{ve jmenovateli je součet}\\ \text{aritmetické posloupnosti}\end{array}\right|\; = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

(102) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right).$$

Řešení:

Rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

Proto můžeme spočítat

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}\right)=\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.\end{aligned}$$

(103) Najděte hromadné body posloupnosti
$$\left\{\cos\frac{2n\pi}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:

Vzhledem k periodicitě funkce $\cos x$ můžeme rozlišit následující situace ($k \in \mathbb{N}$)
$$n = 3k \quad \Rightarrow \quad \left\{\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\frac{6k\pi}{3} = \cos 2\pi = 1\right\}_{k=1}^{\infty},$$
$$n = 3k-1 \quad \Rightarrow \quad \left\{\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\frac{6k\pi-2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty},$$
$$n = 3k-2 \quad \Rightarrow \quad \left\{\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\frac{6k\pi-4\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Tedy posloupnost $\left\{\cos\frac{2n\pi}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadné body 1 a $-\frac{1}{2}$.

(104) Najděte hromadné body posloupnosti

$$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:

Uvažujme následující dvě varianty ($k \in \mathbb{N}$)

$$n = 2k \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{1+(-1)^n}{2} = \frac{1+(-1)^{2k}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 2k-1 \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{1+(-1)^n}{2} = \frac{1+(-1)^{2k-1}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Tedy posloupnost $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má dva hromadné body 1 a 0.

(105) Určete lim sup a lim inf posloupnosti

$$\left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:

Vzhledem k charakteru funkce $\sin n$ stačí uvažovat následující varianty ($k \in \mathbb{N}$)

$$n = 4k \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4} = \frac{4k}{4k+1}\sin^2\frac{4k\pi}{4} = \frac{4k}{4k+1}\sin^2(\pi) = 1\cdot 0 = 0\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 4k-1 \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4} = \frac{4k-1}{4k}\sin^2\left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 1\cdot\left(\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 4k-2 \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4} = \frac{4k-2}{4k-1}\sin^2\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot(\mp 1)^2 = 1\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$n = 4k-3 \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4} = \frac{4k-3}{4k-2}\sin^2\left(k\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = 1\cdot\left(\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

To znamená, že

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{a} \quad \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}\right) = 0.$$

Limita funkce

Definice 5. Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu rovnu číslu* L, a píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$, neboli

$$\forall \mathcal{O}(L)\ \exists \mathcal{O}(x_0) \text{ tak, že } \forall x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

V podání $\varepsilon - \delta$ definice to znamená:

- vlastní limita ve vlastním bodě ($x_0, L \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} = L$)
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$
- nevlastní limita ve vlastním bodě ($x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} = \pm\infty$)
$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M\ (f(x) < M);$$
- vlastní limita v nevlastním bodě ($L \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to \pm\infty} = L$)
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ x > K\ (x < K) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$
- nevlastní limita v nevlastním bodě ($\lim_{x\to \pm\infty} = \pm\infty$)
$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ x > K\ (x < K) \Rightarrow f(x) > M\ (f(x) < M).$$

Pokud existují $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ (obě limity jsou vlastní), platí následující pravidla pro počítání s limitami:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L_1|,$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2,$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2.$$

Jestliže navíc $L_2 \neq 0$, pak platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Důležité vzorce:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{ohraničená funkce}}{\text{funkce jdoucí do } \pm\infty} = 0.$$

Neučité výrazy:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \pm\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Spojitost funkce

Definice 6. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0, jestliže

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nechť nyní funkce f není spojitá v bodě x_0. Potom rozlišujeme následující případy.

- Existuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, ale $a \neq f(x_0)$. Potom bod x_0 nazýváme *bodem odstranitelné nespojitosti* funkce f. (Přitom připouštíme i situaci, kdy hodnota $f(x_0)$ není definována.)

- Existují obě jednostranné limity $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a_1$ a $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a_2$, ale $a_1 \neq a_2$. Potom bod x_0 nazýváme *bodem nespojitosti prvního druhu* (někdy také *skokem*) funkce f.
- Alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 neexistuje nebo je nevlastní. Potom bod x_0 nazýváme *bodem nespojitosti druhého druhu* funkce f.

Definice 7. Nechť $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *spojitá na intervalu* (a, b), jestliže je spojitá v každém bodě $x_0 \in (a, b)$.

Poznámka 8. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá zprava*, jestliže

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá zleva*, jestliže

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, jestliže je v bodě a spojitá zprava, v bodě b je spojitá zleva a je spojitá v každém bodě $x_0 \in (a, b)$.

(106) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}\ \left|\tfrac{0}{0}\right|=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1$$

(107) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6} \left| \tfrac{0}{0} \right| = \lim_{x\to 3} \left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \right] =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{4}.$$

(108) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} \ \left| \tfrac{0}{0} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\cos x \sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} \ \left| \tfrac{0}{0} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x)\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1 + \cos x)\cos x} = \frac{1}{2}.$$

(109) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right] = 1.$$

(110) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}+\frac{\sin^2 x}{x\cos^2 x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(2\,\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos^2 x}\right)=3.$$

(111) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \to 0} \left(k \frac{\sin kx}{kx} \right) = k.$$

(112) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{3x}{x+2}}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{3x}{x+2}} \left| \begin{array}{c} \text{díky spojitosti funkce } a^{f(x)} \\ \text{můžeme limitu přepsat} \end{array} \right| = 2^{\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+2}} = 2^3 = 8.$$

(113) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}\left|\begin{array}{c}\text{musíme využít exponenciální}\\ \text{funkci, neboť proměnná } x\\ \text{je v základu i v exponetu funkce}\end{array}\right| = \lim_{x\to 0} e^{(1+x)\ln\frac{\sin 2x}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\left[(1+x)\ln\frac{\sin 2x}{x}\right]} = e^{\ln 2} = 2.$$

(114) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \frac{4x}{3x} \frac{3x}{\sin 3x} + \frac{\sin 7x}{7x} \frac{7x}{3x} \frac{3x}{\sin 3x} \right) = \frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{11}{3}.$$

(115) Vypočtěte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi x + \sin x}{2x + \cos x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi x + \sin x}{2x + \cos x} \,\Big|\, \tfrac{\infty}{\infty}, \text{ v čitateli i jmenovateli vytkneme } x \,\Big|\, =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\pi + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{\pi + 0}{2 + 0} = \frac{\pi}{2}.$$

(116) Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} \;\Big|\, \tfrac{0}{0}, \text{ rozšíříme } \tfrac{x}{x} \,\Big| &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \cdot \frac{x}{\sin 2x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - e^{-x} + 1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 2x}{x}} = \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right) \cdot \frac{1}{2\frac{\sin 2x}{2x}} = 2\frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

(117) Vypočtěte

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} \;\Big|\, \tfrac{0}{0}, \text{ tj. číslo 2 je kořenem obou polynomů} \Big| = \\ = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)} = \\ = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-1} = 5.$$

(118) Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \Big| \tfrac{0}{0}, \text{ rozšíříme } \tfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \Big| = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1.\end{aligned}$$

(119) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} \left| \tfrac{4}{0} \right| = \lim_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-2)(x-1)},$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{(x-2)(x-1)} \left| \tfrac{4}{0^+} \right| = \infty,$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{(x-2)(x-1)} \left| \tfrac{4}{0^-} \right| = -\infty.$$

Protože limita zprava je různá od limity zleva, zadaná limita neexistuje.

(120) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-5}{x^2-7x+12}.$$

Řešení:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-5}{x^2-7x+12} = \lim_{x \to 4} \frac{x-5}{(x-3)(x-4)} \;\Big|\, \tfrac{-1}{0} \,\Big|\; = \begin{cases} +\infty & x \to 4^-, \\ -\infty & x \to 4^+ \end{cases} \quad \Rightarrow \text{limita neexistuje.}$$

(121) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}+x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = -\infty.$$

(122) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \left(\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} \frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}} \right) =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+13-4x-4}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{-3x+9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} \left| \tfrac{0}{0} \right| = \lim_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3}{(x+3)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)} = -\frac{1}{16}.$$

(123) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \left(\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} \, \frac{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x+6-(x^2+2x-6)}{(x^2-4x+3)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)} \left| \tfrac{0}{0} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-4(x-3)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)} = -\frac{1}{3}.$$

(124) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)} = -1.$$

(125) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-3}{\sin x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2x-3}{\sin x} \ \left| \tfrac{-3}{0} \right| ,\\
&\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-3}{\sin x} \ \left| \tfrac{-3}{\sin 0^+} = \tfrac{-3}{0^+} \right| = -\infty,\\
&\lim_{x\to 0^-} \frac{2x-3}{\sin x} \ \left| \tfrac{-3}{\sin 0^-} = \tfrac{-3}{0^-} \right| = \infty.
\end{aligned}$$

Protože limita zprava je různá od limity zleva, zadaná limita neexistuje.

(126) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\cos x - 1}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\cos x - 1} \ \Big| \tfrac{-1}{0} \Big| \,,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{\cos x - 1} \ \Big| \tfrac{-1}{\cos 0^+ - 1} = \tfrac{-1}{0^-} \Big| = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{\cos x - 1} \ \Big| \tfrac{-1}{\cos 0^- - 1} = \tfrac{-1}{0^-} \Big| = \infty.$$

Protože limita zprava je rovna limitě zleva, zadaná limita existuje a platí
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\cos x - 1} = \infty.$$

(127) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4 + 1}{3\cdot 2^x + x^2 - 1}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4 + 1}{3\cdot 2^x + x^2 - 1} \;\Big|\,\text{nejrychleji do } \infty \text{ jde } 2^x\,\Big|\; = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x(1+\frac{x^4}{2^x}+\frac{1}{2^x})}{2^x(3+\frac{x^2}{2^x}-\frac{1}{2^x})} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{x^4}{2^x}+\frac{1}{2^x}}{3+\frac{x^2}{2^x}-\frac{1}{2^x}} \;\Big|\,\tfrac{1+0+0}{3+0-0}\,\Big|\; = \frac{1}{3}.$$

(128) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\log_6 x - 3^{x+1} + 15x^6}{3\log_6 x + 3^x - 5x^6}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\log_6 x - 3^{x+1} + 15x^6}{3\log_6 x + 3^x - 5x^6} \;\Big|\, \text{nejrychleji do } \infty \text{ jde } 3^x \,\Big| = \lim_{x\to\infty} \frac{3^x(\frac{2\log_6 x}{3^x} - 3 + \frac{15x^6}{3^x})}{3^x(\frac{3\log_6 x}{3^x} + 1 - \frac{5x^6}{3^x})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\log_6 x}{3^x} - 3 + \frac{15x^6}{3^x}}{\frac{3\log_6 x}{3^x} + 1 - \frac{5x^6}{3^x}} \;\Big|\, \frac{0-3+0}{0+1-0} \,\Big| = -3.$$

(129) Ze znalostí grafů základních funkcí určete limitu.

$$\lim_{x\to 2\pi^-} e^{\operatorname{cotg} x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2\pi^-} e^{\operatorname{cotg} x} \; \Big| \; e^{\operatorname{cotg} 2\pi^-} = e^{-\infty} = \tfrac{1}{e^{\infty}} = \tfrac{1}{\infty} \; \Big| = 0.$$

(130) Ze znalostí grafů základních funkcí určete limitu.

$$\lim_{x\to\infty}(5^{\frac{1}{x}}+2).$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\infty}(5^{\frac{1}{x}}+2)\ \left|\ 5^{\frac{1}{\infty}}+2=5^0+2\ \right|\ =3.$$

(131) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

(132) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}\right).$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)= \\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}\right]= \\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}=0.
\end{aligned}$$

(133) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right).$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}=1.$$

(134) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)} = 1.$$

(135) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2+1}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{(x+2)(x-2)}\ \left|\ \frac{5}{0}\ \right|\ =\begin{cases}+\infty & x\to 2^+,\\ -\infty & x\to 2^-\end{cases}\quad\Rightarrow \text{ limita neexistuje.}$$

(136) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x \left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left[4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \left(\sqrt{1+x}+1\right) \right] = 8.$$

(137) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| = \lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)}\ \left|\tfrac{0}{0}\right| = \lim_{x\to-2}\frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}.$$

(138) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+ax)^{\frac{1}{x}}\right)\ \left|\begin{matrix}\text{funkce } \ln x\\ \text{je spojitá}\end{matrix}\right| =$$
$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}\right]\ \left| z=\tfrac{1}{x}\right| = \ln\left[\lim_{z\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^{z}\right]\ \left| u=\tfrac{z}{a}\right| =$$
$$= \ln\left[\lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{ua}\right] = \ln\left\{\lim_{u\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{a}\right\} = \ln e^{a} = a.$$

(139) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}1\right)\ \Big|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\tfrac{x-y}{1+xy},\ \text{pro } xy>-1\Big| =$$
$$=\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arctg}\frac{\frac{x+1}{x+2}-1}{1+\frac{x+1}{x+2}}=\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arctg}\frac{x+1-x-2}{x+2+x+1}=\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arctg}\frac{-1}{2x+3}.$$

Nyní výraz u limity upravíme
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+3}=z\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}z=\frac{1}{2x+2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{\operatorname{tg}z}=2x+3\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}z}-3\right).$$

Proto
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}z}-3\right)(-z)\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\left(-\frac{z}{\operatorname{tg}z}+3z\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\left(-\frac{z}{\frac{\sin z}{\cos z}}+3z\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\left(-\frac{z}{\sin z}\cdot\cos z+3z\right)=-\frac{1}{2}.$$

(140) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x(1+x-1)} \quad \left| \sin\tfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\alpha}{2}} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\sqrt{1+x}+1\right)\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{4}\left(\sqrt{1+x}+1\right)\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right) = 1.$$

(141) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}.$$

(142) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos x} \;\Big|\, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \,\Big| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(143) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin 0}{\cos\frac{\pi}{6}-\cos x} \left| \begin{array}{l} \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}}{-2\sin\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}}{\sin\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}} = 2.$$

(144) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - \sin 2x + 1}{\cos x - \sin x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - \sin 2x + 1}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x + 1}{\cos x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 2\sin x\cos x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x\,(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (2\cos x) = \sqrt{2}.$$

(145) Vypočtěte limitu
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \; \Big| \, z = 2x \, \Big| \; = \lim_{z \to 0} \left(\frac{e^{z} - 1}{z} \cdot 2 \right) = 2 \cdot \lim_{z \to 0} \left(\frac{e^{z} - 1}{z} \right) = 2.$$

(146) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos x + x + 2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos x + x + 2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\cos x + x + 2)}$$

neboť platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x + x + 2)}{x} = \begin{cases} +\infty & x \to 3^-, \\ -\infty & x \to 3^+, \end{cases}$$

proto obdržíme

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos x + x + 2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\cos x + x + 2)} = \begin{cases} +\infty & x \to 3^-, \\ 0 & x \to 3^+ \end{cases} \Rightarrow \text{limita neexistuje.}$$

(147) Určete druhy nespojitosti v bodě $x_0 = 0$ pro funkce

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f_2(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad f_3(x) = \lfloor x \rfloor, \quad f_4(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}.$$

Řešení:

Ze základních vzorců víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Funkce f_1 také není v 0 definována, proto v x_0 nastává odstranitelná nespojitost.

Pro funkci f_2 spočítáme limitu přímo, tj.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} \;\Big|\, \tfrac{1}{0} \,\Big|\; = \begin{cases} +\infty & x \to 0^+, \\ -\infty & x \to 0^-, \end{cases}$$

což znamená, že v x_0 nastává nespojitost II. druhu.

Pro funkci f_3 je nutné si uvědomit, jak se počítá celá část reálného čísla – je to vlastně nejbližší menší celé číslo, proto platí

$$\lim_{x\to 0} \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \to 0^+, \\ -1 & x \to 0^-, \end{cases}$$

tedy funkce f_3 má v bodě x_0 nespojitost I. druhu.

Limitu funkce f_4 si rozdělíme na dvě možnosti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + e^{-\frac{1}{x}}}{1 - e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = -1,$$

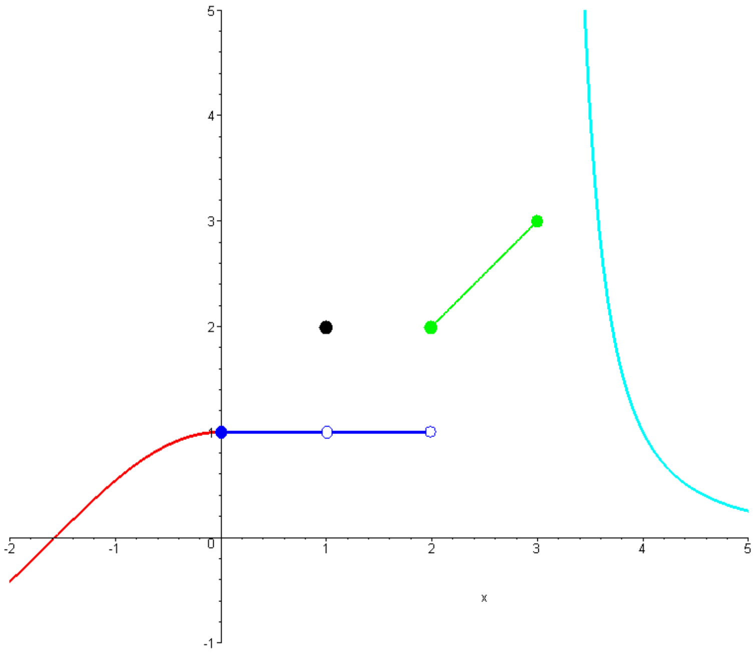
tudíž funkce f_4 má v bodě x_0 nespojitost I. druhu.

(148) Určete, zda je daná funkce spojitá/spojitá zleva/spojitá zprava v bodech $-\pi/2, 0, 1, 2, 3, 4$. Jestliže je nespojitá, určete druh nespojitosti.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0, \\ 1 & 0 \le x < 1, \\ 2 & x = 1, \\ 1 & 1 < x < 2, \\ x & 2 \le x \le 3, \\ \frac{1}{(x-3)^2} & x > 3. \end{cases}$$

Řešení:

Nejprve si pro názornost ukažme graf této funkce. K vyřešení příkladu samozřejmě není nutný – stačí spočítat příslušné limity a funkční hodnoty.



Řešení příkladu shrnuje následující tabulka.

x_0	$-\frac{\pi}{2}$	0	1	2	3	4
$f(x_0)$	0	1	2	2	3	1
$\lim\limits_{x\to x_0^-}$	0	1	1	1	3	1
$\lim\limits_{x\to x_0^+}$	0	1	1	2	∞	1
$\lim\limits_{x\to x_0}$	0	1	1	neex.	neex.	1
spojitá zleva	ano	ano	ne	ne	ano	ano
spojitá zprava	ano	ano	ne	ano	ne	ano
spojitá	ano	ano	ne	ne	ne	ano
druh nespojitosti	—	—	odstran.	skok	2. druh	—