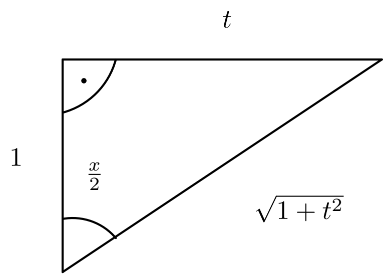
II. 3. Speciální integrační metody

- Integrály typu
$$\int f\left(x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, \ldots, \sqrt[r_k]{x}\right) dx,$$
tj. integrály obsahující proměnnou x pod odmocninou, kde $k \in \mathbb{N}$ a $r_1 \geq 2, \ldots, r_k \geq 2$ jsou přirozená čísla, řešíme substitucí $t^n = x$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $r_1, \ldots, r_k$. Pomocí této substituce převedeme původní integrál na integrál z racionální lomené funkce.
- Integrály typu
$$\int f\left(x, \sqrt[r]{ax+b}\right) dx,$$
$r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, řešíme substitucí $t^r = ax + b$. Pomocí této substituce převedeme původní integrál na integrál z racionální lomené funkce.
- Integrály typu
$$\int f\left(x, \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$
kde $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $ad - bc \neq 0$, řešíme substitucí $t^r = \frac{ax+b}{cx+d}$. Pomocí této substituce převedeme původní integrál na integrál z racionální lomené funkce.
- Integrály typu
$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,$$
kde $b^2 - 4ac \neq 0$, tj. kvadratický polynom nemá dvojnásobný reálný kořen, řešíme pomocí tzv. *Eulerovy substituce*. Existuje několik variant těchto substitucí, zde uvedeme některé z nich:
  i) jestliže $a > 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, obdržíme
  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 \frac{x-x_2}{x-x_1}} = \sqrt{a} \cdot |x - x_1| \sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}},$$
  což s použitím substituce $t^2 = \frac{x-x_2}{x-x_1}$ převedeme na integrál z racionální lomené funkce;
  ii) jestliže $a < 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, obdržíme
  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 \frac{x_2-x}{x-x_1}} = \sqrt{-a} \cdot (x - x_1) \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}},$$
  což s použitím substituce $t^2 = \frac{x_2-x}{x-x_1}$ převedeme na integrál z racionální lomené funkce;
  iii) jestliže $a > 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$ nebo jestliže kvadratický polynom nemá reálné kořeny, můžeme použít substituci
  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \cdot x \pm t,$$
  přičemž volba konkrétních znamének je zcela libovolná, čímž obdržíme integrál z racionální lomené funkce;
  iv) jestliže $c \geq 0$, můžeme zavést substituci
  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x \cdot t \pm \sqrt{c},$$
  s jejíž pomocí převedeme integrál na integrál z racionální lomené funkce.
- Integrály typu
$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \qquad m, n, p \in \mathbb{Q},$$
tedy tzv. *binomický integrál*, řešíme jednou z následujících substitucí
  i) jestliže $p \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $x = t^s$, kde s je společný jmenovatel m a n;
  ii) jestliže $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $a + bx^n = t^s$, kde s je jmenovatel p;

iii) jestliže $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $ax^{-n} + b = t^s$, kde s je jmenovatel p.

- Integrály typu
$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx,$$
kde $m, n \in \mathbb{Z}$ řešíme pomocí substituce
  i) $t = \sin x$, jestliže m je liché a n sudé nebo nula;
  ii) $t = \cos x$, jestliže n je liché a m sudé nebo nula;
  iii) $t = \cos x$ nebo $t = \sin x$, jestliže m a n jsou lichá čísla;
  iv) jestliže m i n jsou sudá čísla, případně některé z nich nula, upravíme výraz pomocí vzorců $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ a $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Dále pokračujeme dle získaného výsledku krokem i)–iv).
- Integrály typu
$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx,$$
řešíme pomocí substituce
  i) jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \sin x$;
  ii) jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \cos x$;
  iii) jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \operatorname{tg} x$;
  iv) jestliže nenastane ani jedna z předchozích možností, použijeme k řešení tzv. *univerzální substituci:*
$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} x \quad \text{a} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt.$$
Potom z obrázku



získáme identity
$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{a} \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(363) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t^4+t+1}{t^2+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^4+t+1}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\int \left(t^3-t^2+t+\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+\ln|t+1|\right)+C =$$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+x+2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$$

(364) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^6 = x \\ 6t^5\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{1+t^3-t^2}{t^6+t^5}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{1-t^2+t^3}{t+1}\,dt =$$

$$= 6\int \left(t^2-2t+2-\frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3}-t^2+2t-\ln|t+1|\right)+C =$$

$$= 2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

(365) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x+1 \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t+1}{t-1}\,2t\,dt = 2\int \frac{t(t+1)}{t-1}\,dt =$$
$$= 2\int \left(t+2+\frac{2}{t-1}\right) dt = 2\left(\frac{t^2}{2}+2t+2\ln|t-1|\right)+C =$$
$$= x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C.$$

(366) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx \left|\begin{array}{c} t^2=\frac{x+1}{x-1} \\ x=\frac{1+t^2}{t^2-1} \\ dx=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,dt \end{array}\right| = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}t\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C =$$

$$= -\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right| + \ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right| - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C =$$

$$= 2\ln\left|\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

(367) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})} \left| \begin{array}{c} t^{10}=x \\ 10t^9\,dt=dx \end{array} \right| = \int \frac{10t^9}{t^{10}(t^5+t^4)}\,dt = 10\int \frac{dt}{t^6+t^5} =$$

$$= 10\int \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^5}-\frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 10\left(\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{4t^4}-\ln|t+1|\right)+C =$$

$$= \ln\frac{x}{(\sqrt[10]{x}+1)^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C.$$

(368) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^3 = 3x+1 \\ x = \frac{t^3-1}{3} \\ 3\,dx = 3t^2\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^3-1}{3}+1}{t} t^2\,dt = \int \frac{t^3-1+3}{3} t\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(t^4 + 2t\right) dt = \frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5} + t^2\right) + C = \frac{t^2}{3}\left(\frac{t^3}{5} + 1\right) + C =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{3}\left(\frac{3x+1}{5} + 1\right) + C = \sqrt[3]{(3x+1)^2} \cdot \frac{x+2}{5} + C.$$

(369) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^6 = x+1 \\ 6t^5\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{1-t^3}{1+t^2}\,6t^5\,dt =$$

$$= 6\int \left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= -\frac{6t^7}{7}+\frac{6t^5}{5}+\frac{6t^4}{4}-\frac{6t^3}{3}-\frac{6t^2}{2}+6t+6\int\left(\frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= -\frac{6t^7}{7}+\frac{6t^5}{5}+\frac{3t^4}{2}-2t^3-3t^2+6t+3\ln\left|1+t^2\right|-6\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= -\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+$$

$$+6\sqrt[6]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.$$

(370) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{1+x}{x} \\ x = \frac{1}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt \end{array} \right| = \int (t^2-1)^2\, t\, \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt =$$

$$= -\int 2t^2\,dt = -\frac{2t^3}{3} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} + C.$$

(371) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} - 4}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} - 4} \left| \begin{array}{c} t^3 = x+2 \\ 3t^2\,dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{3t^2}{t^2 - 3t - 4}\,dt =$$

$$= \int \left(3 - \frac{3}{5(t+1)} + \frac{48}{5(t-4)}\right) dt = 3t - \frac{3}{5}\ln|t+1| + \frac{48}{5}\ln|t-4| + C =$$

$$= 3\sqrt[3]{x+2} - \frac{3}{5}\ln\left|\sqrt[3]{x+2} + 1\right| + \frac{48}{5}\ln\left|\sqrt[3]{x+2} - 4\right| + C.$$

(372) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} 2t\,dt = 2\int \frac{(1+t)\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-t^2}}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\int \left(\sqrt{1-t^2} - \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\right) dt \overset{\text{Př. (345)}}{=}$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,dt \left| \begin{array}{c} t = \sin u \\ \arcsin t = u \\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = du \end{array} \right| =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2\int \frac{1-\sin^2 u}{1+\sin u}\,du =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2\int (1-\sin u)\,du =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2u - 2\cos u + C =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t - 2u - 2\sqrt{1-\sin^2 u} + C =$$

$$= \sqrt{x}\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x} - 2\arcsin\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} + C =$$

$$= \left(\sqrt{x} - 2\right)\sqrt{1-x} - \arcsin\sqrt{x} + C.$$

(373) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x+1 \\ t^2-2 = x-1 \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| = 2\int \frac{t-\sqrt{t^2-2}}{t+\sqrt{t^2-2}}\,t\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t-\sqrt{t^2-2}}{t+\sqrt{t^2-2}}\,t\,\frac{\sqrt{t^2-2}}{t-\sqrt{t^2-2}}\,\frac{t-\sqrt{t^2-2}}{\sqrt{t^2-2}}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{\left(t-\sqrt{t^2-2}\right)t\sqrt{t^2-2}}{2}\,\frac{t-\sqrt{t^2-2}}{\sqrt{t^2-2}}\,dt \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{t^2-2}-t \\ -\frac{u^2+2}{2u} = t \\ du = \frac{t-\sqrt{t^2-2}}{\sqrt{t^2-2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(-u\left(-\frac{u^2+2}{2u}\right)\left(u-\frac{u^2+2}{2u}\right)\right)du =$$

$$= \int \frac{u^2+2}{2}\,\frac{u^2-2}{2u}\,du = \int \left(\frac{1}{4}u^3-\frac{1}{u}\right)du =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{u^4}{4} - \ln|u| + C = \frac{1}{16}\left(\sqrt{t^2-2}-t\right)^4 - \ln\left|\sqrt{t^2-2}-t\right| + C =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)^4 - \ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{16}\Big((x-1)^2 - 4(x-1)^{3/2}(x+1)^{1/2} + 6(x-1)(x+1) -$$

$$- 4(x-1)^{1/2}(x+1)^{3/2} + (x+1)^2\Big) - \ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{16}\Big(x^2-2x+1-4(x-1)^{3/2}(x+1)^{1/2}+6\left(x^2-1\right) -$$

$$- 4(x-1)^{1/2}(x+1)^{3/2} + x^2+2x+1\Big) - \ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right| - \frac{1}{4} + C.$$

(374) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} \ \Big|\ \text{polynom } -x^2+x+2 \text{ má reálné kořeny } 2,-1 \ \Big|\ =$$

$$= \int \frac{dx}{1+(x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}} \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{2-x}{x+1} \\ x = \frac{2-t^2}{t^2+1} \\ x+1 = \frac{3}{t^2+1} \\ dx = \frac{-6t}{(t^2+1)^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{-6t}{(t^2+1)^2}}{1+\frac{3}{t^2+1}\,t}\,dt =$$

$$= \int \frac{-6t}{(t^2+1)^2}\,\frac{t^2+1}{t^2+3t+1}\,dt = -6\int \frac{t}{(t^2+1)(t^2+3t+1)}\,dt =$$

$$= \int \left(-\frac{4}{5}\frac{\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}} - \frac{2}{t^2+1} - \frac{4}{5}\frac{\sqrt{5}}{-2t-3+\sqrt{5}} \right) dt =$$

$$= -\frac{4\sqrt{5}}{5}\frac{1}{2}\ln\left|2t+3+\sqrt{5}\right| - 2\operatorname{arctg} t - \frac{4\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)\ln\left|-2t-3+\sqrt{5}\right| + C =$$

$$= -\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\left|2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+3+\sqrt{5}\right| + \frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\left|-2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}-3+\sqrt{5}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + C.$$

(375) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} \left| \begin{array}{c} \text{polynom } x^2+x+1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2+x+1} = x+t \\ x = \frac{1-t^2}{2t-1} \\ x-1 = -\frac{t^2+2t-2}{2t-1} \\ x+t = \frac{t^2-t+1}{2t-1} \\ dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{-\frac{t^2+2t-2}{2t-1}\,\frac{t^2-t+1}{2t-1}}\,dt = \int \frac{2}{t^2+2t-2}\,dt = \int \left(-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{-t-1+\sqrt{3}} \right) dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left|t+1+\sqrt{3}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left|-t-1+\sqrt{3}\right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left| \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x+1+\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2+x+1}-1+\sqrt{3}} \right| + C.$$

(376) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} \left| \begin{array}{c} \text{polynom } x^2 - x + 1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2 - x + 1} = t - x \\ x = \frac{t^2-1}{2t-1} \\ dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{\frac{t^2-1}{2t-1} + t - \frac{t^2-1}{2t-1}}\, dt = 2 \int \frac{t^2 - t + 1}{t(2t-1)^2}\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2} \right) dt \left| \begin{array}{c} u = 2t - 1 \\ du = 2dt \end{array} \right| = 2 \ln|t| + \int \left(-\frac{3}{2u} + \frac{3}{2u^2} \right) du =$$

$$= 2 \ln|t| - \frac{3}{2} \ln|u| - \frac{3}{2u} = 2 \ln|t| - \frac{3}{2} \ln|2t-1| - \frac{3}{2(2t-1)} + C =$$

$$= 2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 - x + 1}\right| - \frac{3}{2} \ln\left|2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1\right| - \frac{1}{4x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2} + C.$$

(377) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}} \left|\text{ polynom } x^2+3x-4 \text{ má reálné kořeny } 1, -4 \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+4)\,|x+4|\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{x-1}{x+4} \\ x = \frac{4t^2+1}{1-t^2} \\ x+4 = \frac{5}{1-t^2} \\ dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}}{\left(\frac{5}{1-t^2}\right)\left|\frac{5}{1-t^2}\right| t}\,dt = \int \frac{2}{5}\frac{\left|1-t^2\right|}{1-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{5}\operatorname{sgn}\left(1-t^2\right)\int 1\,dt = \frac{2}{5}\operatorname{sgn}\left(1-t^2\right)t + C = \frac{2}{5}\operatorname{sgn}(x+4)\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C = \frac{2}{5}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3x-4}} + C.$$

(378) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} \left| \text{polynom } x^2+3x+2 \text{ má reálné kořeny } -1,-2 \right| =$$

$$= \int \frac{x\,dx}{|x+2|\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{x+1}{x+2} \\ x = \frac{2t^2-1}{1-t^2} \\ x+2 = \frac{1}{1-t^2} \\ dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2t^2-1}{1-t^2}\,\frac{2t}{(1-t^2)^2}}{\left|\frac{1}{1-t^2}\right| t}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t(2t^2-1)}{(1-t^2)^3}\frac{|1-t^2|}{t}\,dt = \operatorname{sgn}(1-t^2)\int \frac{4t^2-2}{(1-t^2)^2}\,dt =$$

$$= \operatorname{sgn}(1-t^2)\int \left(\frac{1}{2(t-1)^2}+\frac{1}{2(t+1)^2}-\frac{3}{2(t+1)}+\frac{3}{2(t-1)}\right)dt =$$

$$= \operatorname{sgn}(1-t^2)\left(-\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{3}{2}\ln|t+1|+\frac{3}{2}\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= \operatorname{sgn}(1-t^2)\left(-\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2-1}-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)+C =$$

$$= -\operatorname{sgn}(1-t^2)\frac{t}{t^2-1}-3\operatorname{sgn}(1-t^2)\ln\frac{\sqrt{|t+1|}}{\sqrt{|t-1|}}+C =$$

$$= \operatorname{sgn}(x+2)\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\frac{1}{x+2}-3\operatorname{sgn}(1-t^2)\ln\sqrt{\frac{(t+1)^2}{|t^2-1|}}+C =$$

$$= \operatorname{sgn}(x+2)\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\frac{1}{x+2}-3\operatorname{sgn}(1-t^2)\ln\frac{|t+1|}{\sqrt{|t^2-1|}}+C =$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2}-3\operatorname{sgn}(x+2)\ln\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}+1}{\sqrt{\left|-\frac{1}{x+2}\right|}}+C =$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2}-3\operatorname{sgn}(x+2)\ln\left(\frac{\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x+2|}}{\sqrt{|x+2|}}\sqrt{|x+2|}\right)+C =$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2}-3\operatorname{sgn}(x+2)\ln\left(\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x+2|}\right)+C.$$

(379) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}} \left| \begin{array}{c} \text{polynom } x^2+x-1 \text{ má reálné kořeny } -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x^2+x-1}=x+t \\ x=\frac{t^2+1}{1-2t} \\ x+t=\frac{-(t^2-t-1)}{1-2t} \\ dx=\frac{-2(t^2-t-1)}{(1-2t)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^2-t-1)}{(t^2+1-t^2+t+1)(1-2t)}\,dt = \int \left(1-\frac{2}{t+2}-\frac{1}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right)dt =$$

$$= t-2\ln|t+2|-\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|+C =$$

$$= \sqrt{x^2+x-1}-x-2\ln\left|\sqrt{x^2+x-1}-x+2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+x-1}-x-\frac{1}{2}\right|+C.$$

(380) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+16x-15}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+16x-15}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{-x^2+4x-\frac{15}{4}}} \ \Big| \text{ polynom } x^2+x-1 \text{ má reálné kořeny } \tfrac{5}{2} \text{ a } \tfrac{3}{2} \Big| =$$

$$= \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(\frac{5}{2}-x\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}} = \int \frac{dx}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{\frac{5}{2}-x}{x-\frac{3}{2}}}} \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{\frac{5}{2}-x}{x-\frac{3}{2}} \\ x = \frac{5+3t^2}{2t^2+2} \\ x-\frac{3}{2} = \frac{1}{t^2+1} \\ dx = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{-2t}{(t^2+1)^2}}{2\frac{1}{t^2+1}\,t}\,dt =$$

$$= -\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\operatorname{arctg} t + C = -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5-2x}{2x-3}} + C.$$

(381) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \sqrt[3]{x}(7+5x^4)^2\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \sqrt[3]{x}(7+5x^4)^2\,dx \;\left|\; p = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = t^3,\; dx = 3t^2\,dt \;\right| =$$

$$= \int t(7+5t^{12})^2 3t^2\,dt = 3\int t^3(49+70t^{12}+25t^{24})\,dt =$$

$$= 3\int 49t^3+70t^{15}+25t^{27}dt = \frac{3t^4}{56}(686+245t^{12}+50t^{24}) + C =$$

$$= \frac{3}{56}x\sqrt[3]{x}(686+245x^4+50x^8) + C.$$

(382) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{(2+5x)^3}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \frac{(2+5x)^3}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{4}}(2+5x)^3\,dx \;\left|\; p = 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = t^4,\; dx = 4t^3\,dt \;\right| =$$

$$= \int t^{-3}(2+5t^4)^3 4t^3 dt = 4\int (2+5t^4)^3 dt =$$

$$= 4\int \left(8+60t^4+150t^8+125t^{12}\right) dt = 4\left(8t+12t^5+\frac{50}{3}t^9+\frac{125}{13}t^{13}\right)+C =$$

$$= \frac{4}{39}\sqrt[4]{x}(312+468x+650x^2+375x^3)+C.$$

(383) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int x\sqrt{2-3\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int x\sqrt{2-3\sqrt{x}}dx \left| \begin{array}{c} p=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=4\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow 2-3\sqrt{x}=t^2,\ \sqrt{x}=\frac{2-t^2}{3}, \\ -3\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=2t\,dt,\ x^{-\frac{1}{2}}\,dx=-\frac{4}{3}t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int\left(\frac{2-t^2}{3}\right)^3\sqrt{2-3\frac{2-t^2}{3}}\left(-\frac{4}{3}t\right)dt = -\frac{4}{3^4}\int(2-t^2)^3t^2\,dt =$$

$$= -\frac{4}{3^4}\int 8t^2-12t^4+6t^6-t^8\,dt = -\frac{4}{3^4}t^3\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{5}t^2+\frac{6}{7}t^4-\frac{1}{9}t^6\right)+C =$$

$$= -\frac{4}{81}(2-3\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}\left[\frac{8}{3}-\frac{12}{5}(2-3\sqrt{x})+\frac{6}{7}(2-3\sqrt{x})^2-\frac{1}{9}(2-3\sqrt{x})^3\right]+C.$$

(384) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}\,dx \left|\begin{array}{c} p=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}, \frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3, x=(t^3-1)^4, \\ dx=4(t^3-1)^3 3t^2\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int (t^3-1)^{-2}t12t^2(t^3-1)^3\,dt = 12\int t^3(t^3-1)\,dt = 12\int t^6-t^3\,dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = 12(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1+x^{\frac{1}{4}}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

(385) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \sqrt{x}\sqrt[7]{\left(\frac{\sqrt{x^3}}{27}-3\right)^2}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \sqrt{x}\sqrt[7]{\left(\frac{\sqrt{x^3}}{27}-3\right)^2}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(-3+\tfrac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{7}}dx$$

$$\left|\begin{array}{c} p=\frac{2}{7}\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=1\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow -3+\frac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}=t^7, x=9(t^7+3)^{\frac{2}{3}}, \\ dx=42(t^7+3)^{-\frac{1}{3}}t^6\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int 3(t^7+3)^{\frac{1}{3}}t^2 42(t^7+3)^{-\frac{1}{3}}t^6\,dt =$$

$$= 126\int t^8\,dt = 14t^9 + C = 14\left(\tfrac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}-3\right)^{\frac{9}{7}} + C.$$

(386) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,dx.$$

Řešení:

Jde o binomický integrál.

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,dx = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx$$

$$\left| \begin{array}{c} p=-\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow 1x^{-4}+1=t^4,\ x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}, \\ 1+x^4=t^4x^4=t^4(t^4-1)^{-1}, \\ dx=-\frac{1}{4}(t^4-1)^{\frac{5}{4}}4t^3\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t^{-1}(t^4-1)^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right)(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}4t^3\,dt = -\int \frac{t^2}{t^4-1}\,dt =$$

$$= -\int \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}\,dt = -\int \left(\frac{\frac{1}{4}}{t-1} - \frac{\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{4}(\ln|t-1| - \ln|t+1| + 2\operatorname{arctg} t) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\ln(\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1) - \ln(\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1) + 2\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{x^{-4}+1})\right] + C.$$

(387) Pomocí vhodné substituce převeďte binomický integrál na integrál z racionální lomené funkce.

$$\int \sqrt{2x^2+x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \sqrt{2x^2+x}\,dx = \int \sqrt{x(1+2x)}\,dx$$

$$\left| \begin{array}{c} p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} + p = 2 \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow 1x^{-1} + 2 = t^2, x = (t^2-2)^{-1}, \\ 1 + 2x = t^2 x = t^2(t^2-2)^{-1}, \\ dx = -2t(t^2-2)^{-2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (t^2-2)^{\frac{1}{2}} t (t^2-2)^{\frac{1}{2}} (-2t)(t^2-2)^{-2}\,dt = -2\int \frac{t^2}{(t^2-2)^3}\,dt.$$

(388) Pomocí vhodné substituce převeďte binomický integrál na integrál z racionální lomené funkce.

$$\int x\sqrt[3]{8-7x^3}\,dx.$$

Řešení:

$$\int x\sqrt[3]{8-7x^3}\,dx \left|\begin{array}{c} p=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}, \frac{m+1}{n}=\frac{2}{3}\notin\mathbb{Z}, \frac{m+1}{n}+p=1\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow 8x^{-3}-7=t^3, x=2(t^3+7)^{-\frac{1}{3}}, \\ 8-7x^3=t^3x^3=t^3 8(t^3+7)^{-1}, \\ dx=-2t^2(t^3+7)^{-\frac{4}{3}}\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int 2(t^3+7)^{-\frac{1}{3}}t2(t^3+7)^{-\frac{1}{3}}(-2)t^2(t^3+7)^{-\frac{4}{3}}\,dt = -8\int \frac{t^3}{(t^3+7)^2}\,dt.$$

(389) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \, dx.$$

Řešení:

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \cdot \sin^2 x \, dx \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| =$$
$$= \int \left(1 - t^2\right)^2 t^2 \, dt = \int \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right) dt = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C =$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

(390) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^4 x \, dx.$$

Řešení:

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^4 x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \cdot \sin^4 x \, dx \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(1 - t^2\right)^2 t^4 \, dt = \int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

(391) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \int -\frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} =$$
$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| + C == \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}^2\,\tfrac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\,\tfrac{x}{2}\right| + C.$$

(392) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\, dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\, dx \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{1 + 4t^2 + 3 - 3t^2}\, dt =$$
$$= \int \frac{t^2 + 4 - 5}{t^2 + 4}\, dt = \int \left(1 - 5\frac{1}{t^2 + 4}\right) dt = t - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C =$$
$$= \cos x - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2} + C.$$

(393) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\, dt = \int \frac{1}{1+2t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

(394) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

(395) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{5}{4+\sin x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{5}{4+\sin x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\operatorname{tg} x \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{5}{4+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{10}{4+4t^2+2t}\,dt =$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{t}{2}+1} = \frac{5}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}} = \frac{5}{2}\,\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} + C =$$
$$= \frac{10}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4t+1}{\sqrt{15}} + C = \frac{2\sqrt{15}}{3}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}} + C.$$

(396) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{2-\cos x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{2-\cos x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\, dt = \int \frac{2}{3t^2+1}\, dt = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

(397) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1+t|+C = -\ln|1+\cos x|+C.$$

(398) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx \;\left|\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{array}\right| = \int \frac{1-t^2}{2-t}\,dt = \int \left(2+t+\frac{3}{t-2}\right)\,dt =$$
$$= 2t+\frac{t^2}{2}+3\ln|t-2|+C = 2\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+3\ln|\sin x-2|+C.$$

(399) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{t-1}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}\,dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1-t}{t^2+1} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln\left|t^2+1\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 1\right| + \frac{x}{2} + C.$$

(400) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{2+2t^2-2t}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$
$$= 4\int \frac{t^2-t+1}{(1+t^2)(t^2+3)}\,dt = 2\int \frac{2+t}{t^2+3}\,dt - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + 4\int \frac{dt}{t^2+3} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$
$$= \ln\left|t^2+3\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \ln\left|1+t^2\right| + C =$$
$$= \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

(401) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx.$$

Řešení:

Tento příklad je jedním z mála příkladů, které lze řešit jiným způsobem než univerzální substitucí $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ale právě využití této substituce je nejvýhodnější. (Porovnejte s Příkladem 391.)

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right| + C.$$

(402) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx.$$

Řešení:

Tento příklad je možné řešit substitucí $t = 2x$ a následně substitucí $z = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Výhodnější je ale následující způsob.

$$\int \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx = \int \frac{1}{1+2\sin x\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{1+2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{1}{t+1} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + C.$$

(403) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,y \\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dy \end{array} \right| = \int \frac{1}{\frac{3}{4}(y^2+1)}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dy = \frac{2\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg} y + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(404) Pomocí vhodné substituce převeďte daný integrál na integrál racionální lomené funkce.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1 + 2\operatorname{cotg} x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + 2\frac{1-t^2}{2t}} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)}\,dt =$$

$$= \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2})}\,dt.$$

Poznámka 31. Po rozkladu na parciální zlomky, integraci racionálních lomených funkcí a vrácení substituce vyjde

$$\cdots = \frac{8\sqrt{5}}{25}\operatorname{arctgh}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2} - 1)\right] - \frac{2}{5}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x - \frac{8\sqrt{5}}{25}\operatorname{arctgh}\left[\frac{\sqrt{5}\,(\sin x + 2\cdot\cos x - 2)}{5\sin x}\right] + C.$$