

II. Integrální počet funkcí jedné proměnné

II. 1. Základní integrační metody

Definice 28. Necht' funkce f je definována na intervalu I . Funkce F se nazývá *primitivní* k funkci f na I , jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$.

Množina všech primitivních funkcí k funkci f na I se nazývá *neurčitý integrál* z funkce f a značí se $\int f(x) dx$, tj.

$$\int f(x) dx := \{F : F \text{ je primitivní funkce k } f \text{ na } I\}.$$

Základní vzorce pro integrování ($k \in \mathbb{R}$):

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

Integrování elementárních funkcí ($a, b, k, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \neq 0$ jsou dané konstanty a C je integrační konstanta):

$$\begin{array}{ll} \int k dx = kx + C, & \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, & \int e^x dx = e^x + C, \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, & \int \sin x dx = -\cos x + C, \\ \int \cos x dx = \sin x + C, & \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C, & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C. \\ \int f(x) dx = F(x) + C & \Rightarrow \int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C. \end{array}$$

Věta 29 (Integrování per-partes). Necht' funkce u a v mají derivaci na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx,$$

pokud alespoň jeden z uvedených integrálů existuje.

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \log_b^n x$	$\log_b^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin(kx)$	$\arcsin(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos(kx)$	$\arccos(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \operatorname{arctg}(kx)$	$\operatorname{arctg}(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \operatorname{arccotg}(kx)$	$\operatorname{arccotg}(kx)$	$P(x)$

TABULKA 1. Jak volit funkce při integrování per-partes ($P(x)$ je polynom, $k \in \mathbb{R}$).

Věta 30 (Substituční metoda). *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu J primitivní funkci F , funkce $\varphi(x)$ má derivaci na otevřeném intervalu I a pro libovolné $x \in I$ je $\varphi(x) \in J$. Pak má složená funkce $f(\varphi) \varphi'$ na intervalu I primitivní funkci a platí*

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x) dx = du \end{array} \right. = \int f(u) du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

(314) Vypočtěte

$$\int x \, dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

(315) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

(316) Vypočtěte

$$\int \sqrt{x} \, dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C.$$

(317) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C.$$

(318) Vypočtěte

$$\int e^{-x} dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C.$$

(319) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2 + 3} dx.$$

Řešení:

S pomocí úpravy můžeme využít jeden ze základních vzorců, tj.

$$\int \frac{1}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\frac{x^2}{3} + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

(320) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Řešení:

S pomocí úpravy můžeme využít jeden ze základních vzorců, tj.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

(321) Vypočtěte

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 2} dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 2} dx = \ln |x^3 + x + 2| + C.$$

(322) Vypočtěte

$$\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3 \sin 5x + 2 \cos \frac{x}{2} + 3^x - \frac{7}{2^x} + \frac{4}{3-x} - \frac{2}{3x+2} + 2e^{\frac{2x}{3}} \right) dx.$$

Řešení:

Aplikací základních vzorců získáme

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3 \sin 5x + 2 \cos \frac{x}{2} + 3^x - \frac{7}{2^x} + \frac{4}{3-x} - \frac{2}{3x+2} + 2e^{\frac{2x}{3}} \right) dx = \\ = 2 \operatorname{tg} x + \frac{3}{5} \cos 5x + 4 \sin \frac{x}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{7}{2^x \ln 2} - 4 \ln |3-x| - \frac{2}{3} \ln |3x+2| + 3e^{\frac{2x}{3}} + C. \end{aligned}$$

(323) Vypočtěte

$$\int \operatorname{tg}^2(au) \, du, \quad a \neq 0.$$

Řešení:

Postupným upravováním obdržíme

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2(au) \, du &= \int \frac{\sin^2(au)}{\cos^2(au)} \, du = \int \frac{1 - \cos^2(au)}{\cos^2(au)} \, du = \int \frac{1}{\cos^2(au)} \, du - \int 1 \, du = \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{tg}(au) - u + C. \end{aligned}$$

(324) Vypočtěte

$$\int \operatorname{tg}(bs) \, ds, \quad b \neq 0.$$

Řešení:

Ze základních vzorců získáme

$$\int \operatorname{tg}(bs) \, ds = \int \frac{\sin(bs)}{\cos(bs)} \, ds = -\frac{1}{b} \ln |\cos(bs)| + C.$$

(325) Vypočtěte

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

Řešení:

S využitím metody per-partes dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx & \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v = \operatorname{tg} x \quad v' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right| = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = \\ & = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

(326) Vypočtěte

$$\int x \ln x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes získáme

$$\int x \ln x \, dx \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \quad v' = x \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

(327) Vypočtěte

$$\int (2x - 1) \ln x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes získáme

$$\begin{aligned} \int (2x - 1) \ln x \, dx & \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v = x^2 - x \quad v' = 2x - 1 \end{array} \right| = \\ & = (x^2 - x) \ln x - \int \frac{1}{x} (x^2 - x) \, dx = (x^2 - x) \ln x - \int (x - 1) \, dx = \\ & = (x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C. \end{aligned}$$

(328) Vypočtěte

$$\int (x^2 + 1) e^{-x} dx.$$

Řešení:

S opakovaným využitím metody per-partes dostaneme

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1) e^{-x} dx & \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \quad u' = 2x \\ v = -e^{-x} \quad v' = e^{-x} \end{array} \right| = \\ & = -(x^2 + 1) e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx \left| \begin{array}{l} u = 2x \quad u' = 2 \\ v = -e^{-x} \quad v' = e^{-x} \end{array} \right| = \\ & = -(x^2 + 1) e^{-x} - 2x e^{-x} + \int 2 e^{-x} dx = \\ & = -(x^2 + 1) e^{-x} - 2x e^{-x} - 2 e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 3) + C. \end{aligned}$$

(329) Vypočtěte

$$\int x^2 e^{-3x} dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes získáme

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-3x} dx & \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad u' = 2x \\ v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \quad v' = e^{-3x} \end{array} \right| = \\ & = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3} \int x e^{-3x} dx \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \quad v' = e^{-3x} \end{array} \right| = \\ & = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} + \frac{2}{9} \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \left(x^2 + \frac{2}{3} x + \frac{2}{9} \right) + C. \end{aligned}$$

(330) Vypočtěte

$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Řešení:

Po dvojnásobném použití metody per-partes dostaneme

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx & \left| \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v = -\cos x & v' = \sin x \end{array} \right| = \\ & = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right| = \\ & = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx, \end{aligned}$$

což znamená, že jsme ve výsledku obdrželi stejný integrál jako v zadání pouze s opačným znaménkem, tj.

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

(331) Vypočtěte

$$\int \cos^2 x \, dx.$$

Řešení:

S využitím metody per-partes obdržíme

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx & \left| \begin{array}{l} u = \cos x \quad u' = -\sin x \\ v = \sin x \quad v' = \cos x \end{array} \right| = \\ & = \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ & = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cdot \cos x + x) + C.$$

(332) Vypočtěte

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes obdržíme

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x \, dx & \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = \\ & = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C. \end{aligned}$$

(333) Vypočtěte

$$\int \ln x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes obdržíme

$$\int \ln x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

(334) Vypočtěte

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Řešení:

Tento příklad je možné řešit jak substitucí, tak i per-partes.

Per-partes:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\ln x}{x} dx \left| \begin{array}{l} u' = \frac{1}{x} \quad u = \ln x \\ v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \\ &= \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - I \\ \Rightarrow I &= \ln^2 x - I \quad \Rightarrow \quad 2I = \ln^2 x \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\ln^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

Substitucí:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

(335) Vypočtěte

$$\int (4 - 7x)^{10} dx.$$

Řešení:

Substituční metodou obdržíme

$$\int (4 - 7x)^{10} dx \left| \begin{array}{l} t = 4 - 7x \\ dt = -7 dx \end{array} \right| = -\frac{1}{7} \int t^{10} dt = -\frac{1}{7} \frac{t^{11}}{11} + C = -\frac{1}{77} (4 - 7x)^{11} + C.$$

(336) Vypočtěte

$$\int \sqrt{2x-5} \, dx.$$

Řešení:

Použitím substituční metody získáme

$$\int \sqrt{2x-5} \, dx \left| \begin{array}{l} t = 2x-5 \\ dt = 2 \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-5)^3} + C.$$

(337) Vypočtěte

$$\int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} dx.$$

Řešení:

Substituční metodou obdržíme

$$\int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} dx \left| \begin{array}{l} t = 2 + \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2 + \sin x} + C.$$

(338) Vypočtěte

$$\int \frac{(1 + \ln x)^4}{x} dx.$$

Řešení:

Substituční metodou dostaneme

$$\int \frac{(1 + \ln x)^4}{x} dx \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int (1 + t)^4 dt = \frac{(1 + t)^5}{5} + C = \frac{(1 + \ln x)^5}{5} + C.$$

(339) Vypočtěte

$$\int \sin x \cdot \cos^5 x \, dx.$$

Řešení:

Substituční metodou obdržíme

$$\int \sin x \cdot \cos^5 x \, dx \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right| = - \int u^5 \, du = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

(340) Vypočtěte

$$\int x e^{-x^2} dx.$$

Řešení:

Substituční metodou získáme

$$\int x e^{-x^2} dx \left| \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

(341) Vypočtěte

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx.$$

Řešení:

S pomocí substituční metody získáme

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} \left| \begin{array}{l} u = t + \sqrt{1 + t^2} \\ \frac{du}{t + \sqrt{1 + t^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |t + \sqrt{1 + t^2}| + C = \ln |\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}| + C.$$

(342) Vypočtěte

$$\int x^3 e^{-x^2} dx.$$

Řešení:

Kombinace substituce a metody per-partes dává

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x^2} dx & \left| \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int (-t) e^t dt = \\ & = \frac{1}{2} \int t e^t dt \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v = e^t & v' = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{2} \int e^t dt = \\ & = \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

(343) Vypočtěte

$$\int e^{\sqrt{x}} dx.$$

Řešení:

Kombinace substituce a metody per-partes dává

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx & \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2t dt = dx \end{array} \right| = 2 \int t e^t dt \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v = e^t & v' = e^t \end{array} \right| = \\ & = 2t e^t - 2 \int e^t dt = 2t e^t - 2 e^t + C = 2 e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C. \end{aligned}$$

(344) Vypočtěte

$$\int x \arcsin x^2 dx.$$

Řešení:

Kombinace substituce a metody per-partes dává

$$\begin{aligned} \int x \arcsin x^2 dx & \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \arcsin t dt \left| \begin{array}{l} u = \arcsin t \quad u' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ v = t \quad v' = 1 \end{array} \right| = \\ & = \frac{1}{2} t \arcsin t - \frac{1}{2} \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \left| \begin{array}{l} w = 1 - t^2 \\ dw = -2t dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} t \arcsin t + \frac{1}{4} \int \frac{dw}{\sqrt{w}} = \\ & = \frac{1}{2} t \arcsin t + \frac{1}{4} \frac{w^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C. \end{aligned}$$

(345) Vypočtěte pomocí per-partes i substituční metodou

$$\int \sqrt{1-x^2} dx.$$

Řešení:

Tento příklad lze řešit dvěma způsoby. Metodou per-partes obdržíme

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx & \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1-x^2} \quad u' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \quad v' = 1 \end{array} \right| = \\ & = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ & = x\sqrt{1-x^2} - \int \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \\ & = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ & = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2} dx, \end{aligned}$$

tj.

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C.$$

Vhodnou substitucí dostaneme tentýž výsledek, tj.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx & \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ & = \int \cos^2 t dt \stackrel{\text{Př. (331)}}{=} \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} + \frac{\arcsin x}{2} + C = \\ & = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C. \end{aligned}$$

(346) Vypočtěte

$$\int \max\{1, x^2\} dx.$$

Řešení:

Pro $|x| \leq 1$ platí

$$\int \max\{1, x^2\} dx = \int 1 dx = x + C.$$

Je-li $|x| > 1$, platí

$$\int \max\{1, x^2\} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Protože výsledná funkce musí být spojitá, platí

$$\int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C & \text{pro } x < -1, \\ x + C & \text{pro } |x| \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$