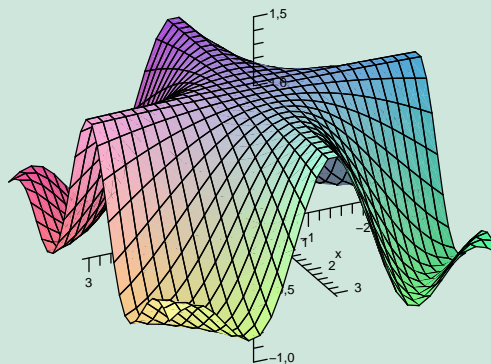


Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek

Silvie Kuráňová a Jan Vondra

Prosinec 2008



Podpořeno grantem 1411/2008 FRVŠ ČR.

Limita a spojitost funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 1 z 24



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

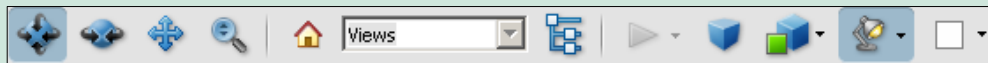
Konec

Instrukce k testům

Práce s 3D obrázky

Všechny grafy funkcí dvou proměnných jsou zobrazeny jako 3D obrázky, které je možné ovládat, tj. libovolně natáčet, posunovat, zvětšovat, měnit osvětlení apod.

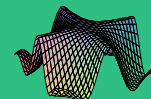
V řešených příkladech slouží k ovládní grafů funkcí panel, v testech pak pravé tlačítka myši. Panel zobrazíme či schováme kliknutím na modrý trojúhelníček v levém horním rohu obrázky, může vypadat například¹ takto:



Ovládání modelu naznačují jednotlivé ikony na panelu. Panel je rozdělen na tři části. První zleva obsahuje tlačítka pro otáčení kolem bodu, otáčení kolem přímky, posunutí a zvětšení či zmenšení objektu. V druhé části panelu nás bude zajímat především tlačítko se symbolem domečku – umožňuje návrat k výchozímu pohledu. Dále je například možné zobrazit z jakých částí je graf složen, popřípadě některé části skrýt. V poslední části najdeme tlačítko na přepínání mezi perspektivním a pravouhlejším promítáním. Tlačítko pro režim vykreslení modelu, zde obzvláště doporučujeme vyzkoušet volby „Průhledné“ a „Drátový model“. Rovněž nabídka osvětlení je velmi bohatá. Poslední tlačítko umožňuje zvolit barvu pozadí, tedy například volbou žluté zvýšit kontrast při promítání ve výuce apod.

Všechny grafy funkcí v tomto textu mají cihlovou barvu, jsou opatřeny souřadnými osami a na každé z os je žlutě vyznačen jednotkový bod. Výjimečně je z technického hlediska volen jiný bod na ose z (na což je pak v textu upozorněno). U složitějších modelů je vždy uveden popis modelu. Navíc všechny 3D modely (na rozdíl od 2D grafiky) mají bílé pozadí.

¹Vzhled panelu závisí na verzi a jazyku Acrobat Readeru. Následující obrázek i text se týkají verze 8.1 v češtině.



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 2 z 24

◀

▶

Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Práce s testy

Motto: „Cvičení dělá mistra.“

Ověřit si znalost dané látky je možné prostřednictvím interaktivních testů umístěných v závěru každé kapitoly.

Začátek testu je nutno zahájit stisknutím volby **Start testu**. Test nebude možno ukončit dokud nezodpovíte všechny otázky.

Typy otázek v testech

1. Výběr z možností, právě jedna správná odpověď.

(a) špatně (b) špatně (c) správně (d) špatně

2. Výběr z možností, více správných odpovědí.

správně špatně správně špatně

3. Zápis vlastní odpovědi. *Do pole запиšte výraz vlevo od rovnítka.*

$xy =$

4. Zápis vlastní odpovědi do skupiny polí, tj. tlačítko **Ans** ovládá postupně jednotlivá políčka. *Do pole запиšte výraz vlevo od rovnítka.*

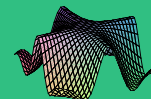
$1 + \frac{1}{2} =$ +

Počet správných odpovědí:

Správná odpověď:

Test ukončíte kliknutím na **Konec testu**. Stisknutím volby **Výsledky** se zobrazí správné odpovědi a u pole pro zápis vlastní odpovědi se objeví tlačítko **Ans** (do té doby neviditelné).

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Limita a spojitost funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 3 z 24



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Správné odpovědi

Pokud si práci s testem vyzkoušíte, zjistíte, že správné odpovědi jsou po skončení testu a po stisku tlačítka **Výsledky** vyznačeny symbolem ✓ a nesprávné symbolem ✗. V případě chybné odpovědi je správná varianta zvýrazněna symbolem ●.

Pokud bylo špatně zodpovězeno pole pro vlastní odpověď, objeví se kolem něj červený rámeček a správnou variantu si můžete prohlédnout v poli za textem „**Správná odpověď:**“ po stisknutí tlačítka **Ans**. Toto pole je v rámci testu „Typy otázek v testech“ umístěno na jeho konci a také v pravém panelu obrazovky (viz. str. 3). V testech na konci kapitol je toto pole zobrazováno pouze v pravém panelu obrazovky.

Bodové hodnocení

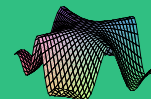
Získané body se zobrazí po ukončení testu červeně vedle každé otázky (případně podotázky). Standardní bodové ohodnocení je 1 bod za správnou odpověď (u otázek typu 1, 3 a 4) a záporné body za výběr chybné varianty u otázky druhého typu.

Zápis matematiky v testech

K zápisu odpovědí do matematického pole používáme následující notaci:

- Desetinná čísla: Desetinou čárku pište jako tečku, čili 1.2 místo 1,2.
- Ludolfovo číslo π jako pi, Eulerovo číslo jako e.
- Znak dělení: Použijte lomítko /.
- Znak násobení: Symbol *, např. 4*x pro 4x.
- Mocnina: Symbol ^, např. 4*x^3 pro 4x³, 12*x^(-6) pro 12x⁻⁶.
- Odmocnina: \sqrt{x} zapište jako sqrt(x) nebo x^(1/2). **Pozor!** výraz x^(1/2) **není** \sqrt{x} .

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Limita a spojitost funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 4 z 24

◀

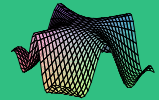
▶

Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Limita a spojitost funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 5 z 24



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

- Závorky: Je možno použít kulaté (), hranaté [] či složené { }. **Závorky je nutné uvádět**, vymezují argumenty funkcí, definují pořadí operací.
Píše $\sin(x)$ raději než $\sin x$, $4*x*(x^2+1)^3$ pro $4x(x^2 + 1)^3$, $4^(2*x+1)$ pro 4^{2x+1} .
Nepište $\sin^2(x)$ pro $\sin^2(x)$, ale $(\sin(x))^2$.
- Funkce, které můžete použít:
 - Trigonometrické: \sin , \cos , \tan , \cot , \sec , \csc .
 - Inverzní trigonometrické: asin , acos , atan .
 - Logaritmus: \log či \ln (přirozený logaritmus), př. $\ln(x)$.
 - Exponenciála: e^x můžete zadat jako $\exp(x)$ nebo e^x .

Vyzkoušejte si zápis matematiky!

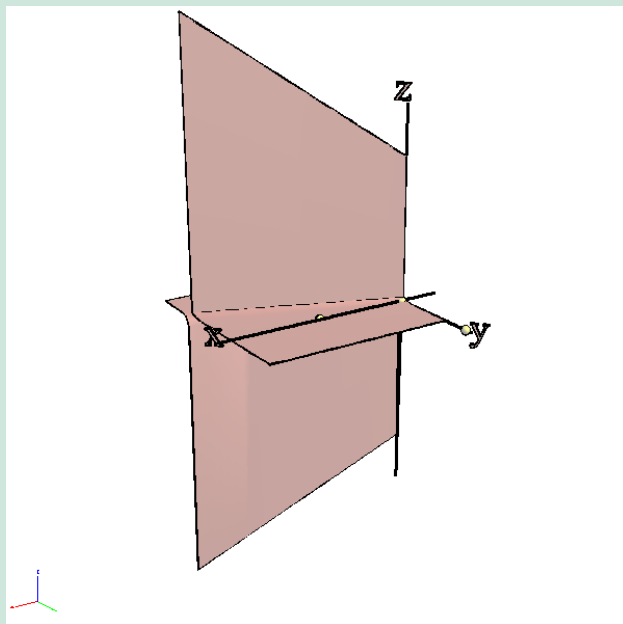
- 1, 5 =
2. $\sin(2x)^3 =$ není totéž jako $\sin^3 2x =$
3. $(x^2 - 1)(x^2 + 1) =$
4. $\ln \frac{x}{2} =$
5. $\frac{y}{1+x^2y^2} =$
6. $e^{x^2} + 3y =$
7. $-2x^4 + x^2y + y^2x + 1 =$
8. $(\log a)^2 =$

Počet správných odpovědí:

2. Limita a spojitost funkce

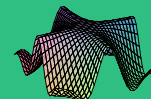
Příklad 2.1. Vypočtěte

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x - y + 3}{2x + 5y}.$$



Obrázek 1: Graf funkce $z = \frac{x - y + 3}{2x + 5y}$.

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Limita a spojitost funkce

[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

[Strana 6 z 24](#)



[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)

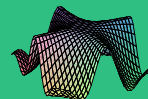
Řešení. Pokud můžeme souřadnice limitního bodu do příslušného výrazu dosadit (tj. po dosažení neobdržíme neurčitý výraz), je hodnota limity dané funkce rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Platí tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x - y + 3}{2x + 5y} = \frac{4}{2} = 2.$$

Příklad 2.2. Vypočtete

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} - 2}.$$

Na obrázku 2 je vykreslen graf funkce $z = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} - 2}$. Naším úkolem je spočítat limitu v bodě, kde se stýkají obě části grafu. Budeme-li se k vyšetřovanému bodu $(0, 0)$ blížit v libovolném směru (což lze snadno ověřit prozkoumáním 3D modelu, např. jeho rotací, zvětšením, zmenšením), dojdeme vždy do stejného bodu. Limita zadané funkce v bodě $(0, 0)$ tedy existuje.



[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

[Strana 7 z 24](#)

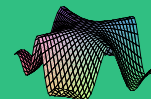


[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)



Limita a spojitost funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 8 z 24

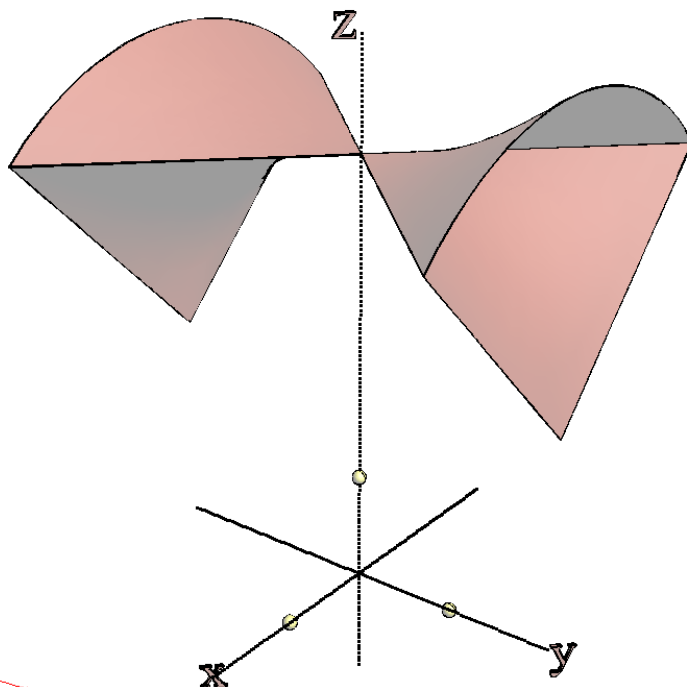


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



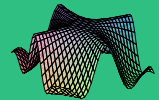
Obrázek 2: Graf funkce $z = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4 - 2}}$.

Řešení. Protože bychom dosazením souřadnic limitního bodu získali neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, najdeme hodnotu limity obratem typickým i pro funkce jedné proměnné. Zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2$ a dostáváme:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} - 2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2)}{x^2 - y^2 + 4 - 4} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2) = 4. \end{aligned}$$

Příklad 2.3. Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 9 z 24

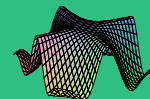


Zpět

Před

Přepnout režim obrazovky

Konec



Limita a spojitost funkce

[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

Strana 10 z 24

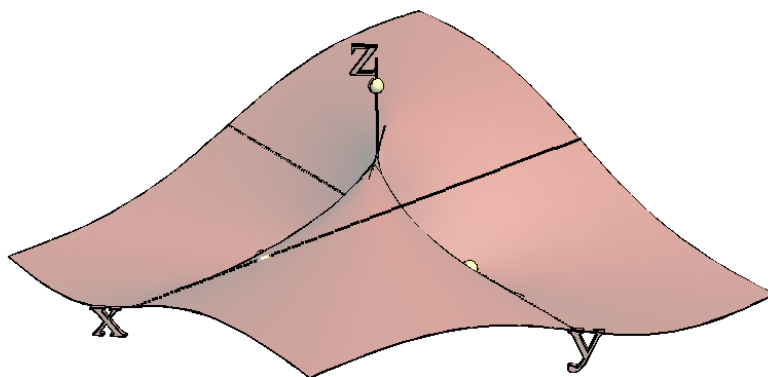


[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)



Obrázek 3: Graf funkce $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Řešení. Zavedením polárních souřadnic dostáváme

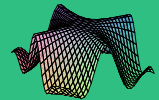
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Protože výsledek závisí na φ , tj. na cestě, po které se blížíme k bodu $[0, 0]$, uvedená limita neexistuje.

Povšimněte si, že v grafu na obrázku 3 se v okolí bodu $[0, 0]$ vyskytují hroty. Je zřejmé, že takto graf zadané funkce nevypadá. Obrázek, který vidíme, byl nakreslen tak, že se spočítalo mnoho bodů a ty se pospojovaly. Funkce se v okolí bodu $[0, 0]$ chová „velmi divoce“, stačí malá změna a dostanete zcela jinou funkční hodnotu. Proto ani software nespojí jednotlivé body zcela správně. Na druhou stranu to přesně odpovídá našemu tvrzení, že když se blížíme k bodu $[0, 0]$ po různých drahách, dostaneme různý výsledek.

Příklad 2.4. Rozhodněte, zda existuje limita v bodě $[0, 0]$ funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované takto

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 11 z 24

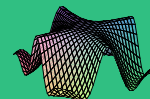


Zpět

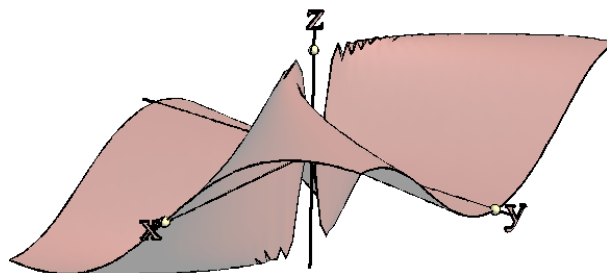
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Limita a spojitost funkce



Obrázek 4: Graf funkce $f(x, y)$.

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 12 z 24



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Řešení. Po transformaci do polárních souřadnic dostáváme

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2(r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi} = 0,$$

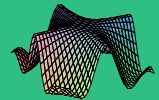
přesto však limita funkce v bodě $[0, 0]$ neexistuje. Vskutku, položíme-li $y = kx^2$, tj. k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po parabolách, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{k}{1 + k^2},$$

což je výsledek závisející na konstantě k . Jinými slovy dostáváme různé výsledky, blížíme-li se k limitnímu bodu po různých cestách, proto i na obrázku 4 dochází k podobnému chování funkce jako v předcházejícím příkladě.

Příklad 2.5. Určete body, v nichž není funkce $f(x, y) = \frac{5x-y}{(x+2)^2+(y-1)^2-4}$ spojitá.

Řešení. Funkce $f_1(x, y) = 5x - y$, $f_2(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 4$ jsou polynomy ve dvou proměnných a ty jsou spojité v celé rovině. Funkce f není spojitá v bodech, ve kterých není definována, tj. kde $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Body, v nichž funkce není spojitá, tvoří kružnici se středem v bodě $[-2, 1]$ a s poloměrem 2, jak je vidět na obrázku 5.



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 13 z 24

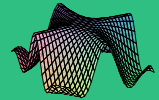


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Limita a spojitost funkce

[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

[Strana 14 z 24](#)

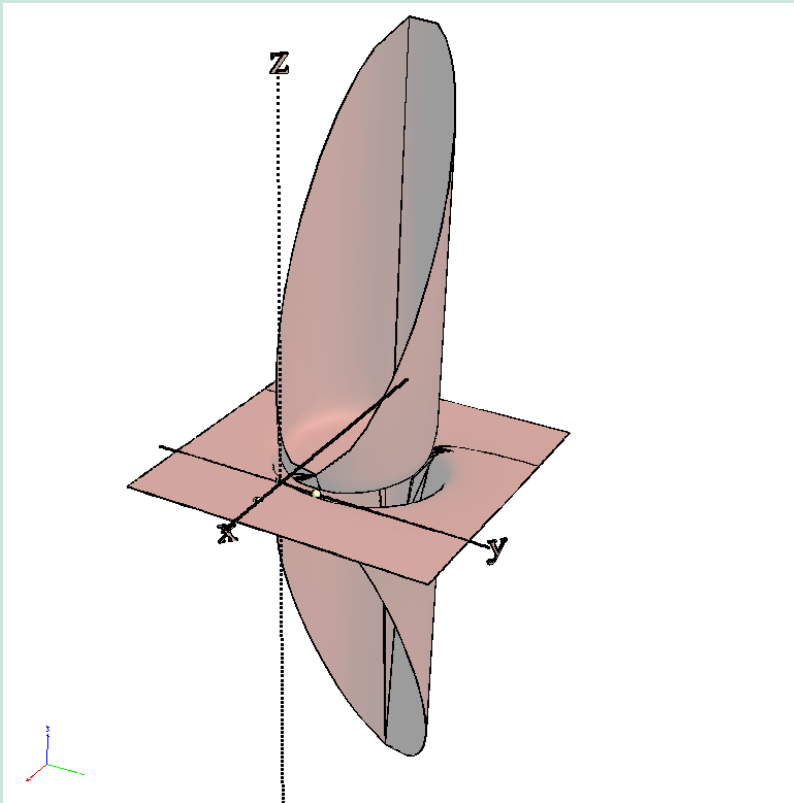


[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)



Obrázek 5: Graf funkce $f(x, y) = \frac{5x - y}{(x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 4}$.

Limita a spojitost funkce – test 1

Pokud v následujících příkladech máte vepsat hodnotu limity, která neexistuje, vepište do pole pro vlastní odpověď znak –.

1. Nechť je dána limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$.

(a) Rozhodněte, zda limita existuje.

(a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je:

2. Rozhodněte, zda existuje limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy^2 \cos \frac{1}{xy^2}$.

(a) (a) ano (b) ne

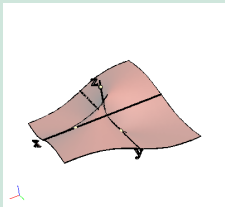
(b) Hodnota limity je:

3. Rozhodněte, zda limita funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ pro $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

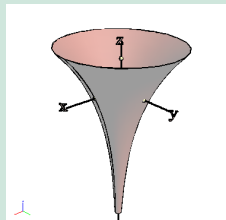
(a) (a) neexistuje (b) existuje a je nevlastní (c) existuje a je vlastní tj.

(b) Podle výsledku rozhodněte, který z následujících obrázků je grafem funkce f .

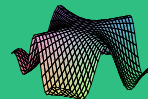
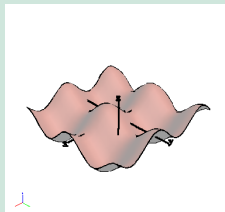
(a)



(b)



(c)



[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

Strana 15 z 24

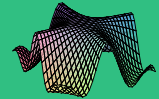


[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)



4. Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ v bodě $[0, 0]$.

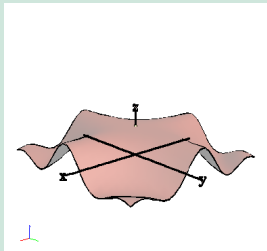
5. Vypočtěte limitu $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1}$, jestliže existuje.

(a) Limita neexistuje.

(b) Limita existuje.

(b) Hodnota limity je:

6. Vyčístele hodnotu limity $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$, jestliže existuje.



(a) Limita neexistuje.

(b) Limita existuje.

(b) Hodnota limity je:

7. Je dána funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$.

(a) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,5)} f(x, y, z) =$

(b) Funkce je spojitá v \mathbb{R}^2 pro

$$x + y + z = 0$$

$$x + y + z < 0$$

$$x + y + z > 0$$

všechny body z \mathbb{R}^2

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 16 z 24

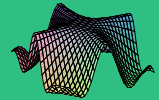


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



8. Rozhodněte o spojitosti složené funkce $f \circ g$, přičemž $f(t) = t^2$, $g(x, y) = 3x - 2y$.
Složená funkce

(a) je (b) není spojitá v \mathbb{R}^2 .

Počet správných odpovědí:

Limita a spojitost funkce

[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

Strana 17 z 24



[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)

Limita a spojitost funkce – test 2

Pokud v následujících příkladech máte vepsat hodnotu limity, která neexistuje, vepište do pole pro vlastní odpověď znak –.

1. Nechť je dána limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(a) Rozhodněte, zda limita existuje.

(a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je:

2. Rozhodněte, zda existuje limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$.

(a) (a) ano (b) ne

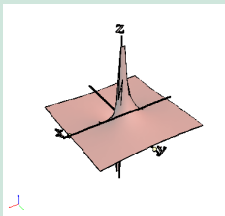
(b) Hodnota limity je:

3. Rozhodněte, zda limita funkce $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ pro $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

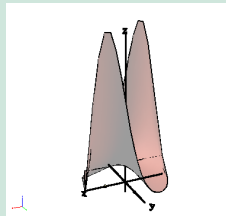
(a) (a) neexistuje (b) existuje a je nevlastní (c) existuje a je vlastní tj.

(b) Podle výsledku rozhodněte, který z následujících obrázků je grafem funkce f .

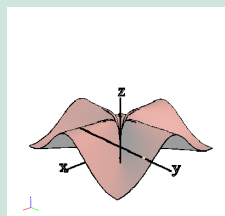
(a)



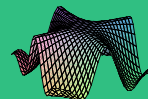
(b)



(c)



Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Limita a spojitost funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 18 z 24

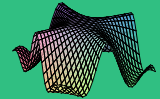


Zpět

Vpřed

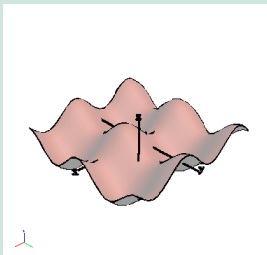
Přepnout režim obrazovky

Konec



Limita a spojitost funkce

4. Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = \frac{x-y+z-1}{z+x-y-1}$ v bodě $[1, 1, 1]$.
5. Vyčístele hodnotu limity $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, jestliže existuje.
- (a) Limita neexistuje. (b) Limita existuje.
- (b) Hodnota limity je:
6. Vyčístele hodnotu limity $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sin x + \cos y)$, jestliže existuje.



- (a) Limita neexistuje.
(b) Limita existuje.
- (b) Hodnota limity je:

7. Je dána funkce $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$.

(a) Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} f(x, y) =$

(b) Funkce f je spojitá v \mathbb{R}^2 pro

(a) $x = y$

(b) $x = -y$

(c) $x \neq y$

(d) $x \neq -y$

(e) $xy \neq 0$

(f) všechny body z \mathbb{R}^2

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 19 z 24

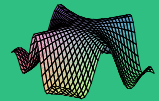


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



8. Rozhodněte o spojitosti složené funkce $f \circ g$, přičemž $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(x, y) = 3x - 2y$.
Složená funkce je spojitá v \mathbb{R}^2 pro

$$y = \frac{3x}{2}$$

$$y \neq \frac{3x}{2}$$

$$y = \frac{2x}{3}$$

$$y \neq \frac{2x}{3}$$

všechny body z \mathbb{R}^2

Počet správných odpovědí:

Limita a spojitost funkce

[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

Strana 20 z 24



[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)

Limita a spojitost funkce – test 3

Pokud v následujících příkladech máte vepsat hodnotu limity, která neexistuje, vepište do pole pro vlastní odpověď znak –.

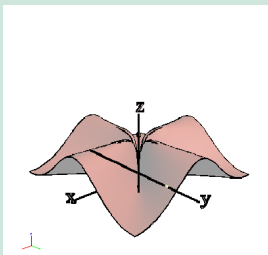
1. Nechť je dána limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (e^2, 1)} \frac{\ln x}{y}$.

(a) Rozhodněte, zda limita existuje.

(a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je:

2. Vyčíslete hodnotu limity $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$, jestliže existuje.



(a) (a) Limita
neexistuje.

(b) Limita existuje.

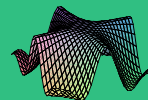
(b) Hodnota limity je:

3. Je dána funkce $f(x, y) = \left(\frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)xy} \right)^2$.

(a) Existuje limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

(a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je:



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 21 z 24

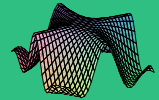


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

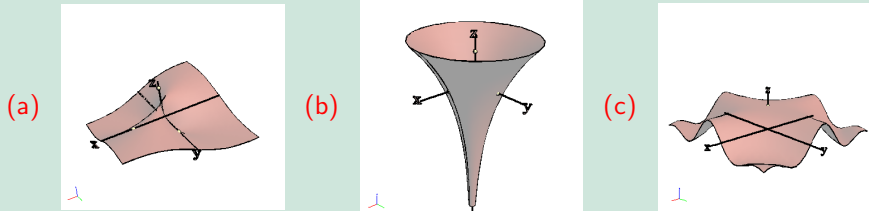
Konec



4. Rozhodněte o existenci limity funkce $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ pro $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

(a) neexistuje (b) existuje a je nevlastní (c) existuje a je vlastní tj.

(b) Podle výsledku rozhodněte, který z následujících obrázků je grafem funkce f .



5. Vypočtete limitu $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, jestliže existuje.

(a) Limita neexistuje. (b) Limita existuje.

(b) Hodnota limity je:

6. Je dána funkce $f(x, y) = e^{xy}$.

(a) Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) =$

(b) Funkce je spojitá v \mathbb{R}^2 pro

všechny body z \mathbb{R}^2 $x < 0$ $x \leq 0$

$y < 0$ $y \leq 0$

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 22 z 24



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

7. Rozhodněte, zda je limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}{x^4 + y^4}$$

(a) vlastní (b) nevlastní

(b) Hodnota limity je:

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) jiná, tj.

8. Rozhodněte o spojitosti složené funkce $f \circ g$, přičemž $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(x, y) = e^{\frac{x}{y}} - 1$.
Složená funkce je spojitá v \mathbb{R}^2 pro:

$$x \neq 0$$

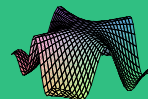
$$x \neq y$$

$$y \neq 0$$

$$\frac{x}{y} \neq 1$$

všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$

Počet správných odpovědí:



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 23 z 24



Zpět

Vpřed

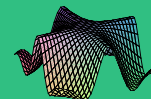
Přepnout režim obrazovky

Konec

Reference

- [1] Došlá, Z., Došlý, O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 3. vyd. Brno : Masarykova univerzita, 2006. iv, 144 s. ISBN 80-210-4159-5.
- [2] Došlá, Z., Plch, R., Sojka P.: *Matematická analýza s programem Maple. Díl 1, Diferenciální počet funkcí více proměnných*. MU, Brno 1999. CD-ROM.
- [3] Kolektiv autorů VŠCHT: *Sbírka příkladů Matematiky II pro strukturované studium, Kapitola 7*, Praha. <http://www.vscht.cz/mat/sbirka/KapitolaII7.pdf>, 2008 [online].
- [4] Mařík, R.: *Interactive Mathematics*, Brno. <http://user.mendelu.cz/~marik/index.php?item=42>, 2008 [online].
- [5] Kuráňová, S., Vondra, J.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*. Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008, Plzeň, 2008, s. 199–203.
- [6] Plch, R., Šarmanová, P.: *Interaktivní 3D grafika v HTML a PDF dokumentech*. Zpravodaj CSTUG, Konvoj Praha, **18**, č. 1–2, 2008, s. 76–92.
- [7] Plch, R., Šarmanová, P.: *An Interactive Presentation of Maple 3D Graphics in PDF Documents*. Electronic Journal of Mathematics and Technology, Mathematics and Technology, LLC, Blacksburg, Volume 2, Number 3, 2008, s. 281–290.
- [8] AcroTeX eDucation Bundle (oficiální stránky): <http://www.acrotex.net>, 2008 [online].
- [9] Story, D. P.: AeB website, <http://www.math.uakron.edu/~dpstory/webeq.html>, 2008 [online].

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Limita a spojitost funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 24 z 24



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec