Gramatiky

Definice – gramatika

Gramatikou G rozumíme čtveřici (N, Σ, P, S), kde:

1. $N \neq \emptyset$ je konečná množina tzv. **neterminálů**.
2. Σ je konečná množina **terminálů** (terminálních symbolů).
   [Označme $V = N \cup \Sigma$.]
3. P je podmnožinou $V^\star N V^\star \times V^\star$ je konečná množina **pravidel**.
4. $S \in N$ je počáteční neboli startovní neterminál.

Poznámka.

1. Neterminály označujeme velkými písmeny $(A, B, C, \dots)$, terminály naopak označujeme malými písmeny $(a, b, c, \dots)$.
2. Pro zachování přehlednosti je důležité, aby $N \cap \Sigma = \emptyset$, tj. abychom v gramatice nezaváděli symbol, který bude jak neterminálem, tak terminálem.
3. V definici množiny pravidel P se vyskytuje symbol V, který znamená sjednocení všech terminálních i neterminálních řetězů ($V = N \cup \Sigma$). Pokud zapisujeme $V^\star$, znamená to libovolný, tedy i nulový počet terminálů či neterminálů v jakémkoliv pořadí.
4. Prvkem množiny P je dvojice (α, β), kde α obsahuje alespoň jeden neterminál (plyne z faktu, že $\alpha \in V^\star N V^\star$). Místo zápisu $(\alpha, \beta) \in P$ používáme přehlednější $\alpha \to \beta$ a čteme „α přepiš na β“.
5. $\alpha \dots$ levá strana pravidla, $\beta \dots$ pravá strana pravidla.

Příklad 1.

Mějme gramatiku $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, \varepsilon\}, P, S)$, kde množina $P = \{$

$$\begin{aligned} S &\to aA \mid bbB \\ aA &\to aAba \\ A &\to aa \mid bBb \mid aAa \\ bB &\to bbBa \\ B &\to b \mid \varepsilon \mid BB\ \} \end{aligned}$$

Všimněte si, že se v zápisu vyskytuje symbol $|$. Ten slouží k oddělení dvou pravidel, které mají stejnou levou stranu. Například: pokud pravidla $S \to aA$, $S \to bbB$ mají na levé straně stejný neterminál S, zapisujeme to zjednodušeně $S \to aA \mid bbB$.

Definice – přímé odvození v gramatice

Buď $G = (N, \Sigma, P, S)$ gramatika. Definujeme binární relaci $\Rightarrow_G$ na množině V^+, tj. $\Rightarrow_G \subseteq V^+ \times V^+$. Pro libovolné dva „řetězce“ terminálních i neterminálních symbolů γ, δ platí, že $\gamma \Rightarrow_G \delta$, právě když

1. existuje pravidlo $\alpha \rightarrow \beta \in P$ a
2. „řetězce“ terminálních i neterminálních symbolů $\varphi, \psi \in V^\star$

tak, že $\gamma = \varphi\alpha\psi, \delta = \varphi\beta\psi$. Relaci $\Rightarrow_G$ nazýváme **přímé odvození**.

Příklad 2.

Mějme stejnou gramatiku jako v **Příkladu 1**, tedy $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, \varepsilon\}, P, S)$, kde množina $P = \{$

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aA \mid bbB \\ aA & \rightarrow & aAba \\ A & \rightarrow & aa \mid bBb \mid aAa \\ bB & \rightarrow & bbBa \\ B & \rightarrow & b \mid \varepsilon \mid BB \ \} \end{array}$$

Řetězec $aAbaB$ můžeme odvodit na řetězec $abBbbaB$, tj.

$$\begin{array}{rcl} aAbaB & \Rightarrow_G & abBbbaB \\ a\{A\}baB & \Rightarrow_G & a\{bBb\}baB \end{array}$$

Mohli jsme tak učinit, protože v řetězci $aAbaB$ jsme neterminál A nahradili řetězcem bBb a vznikl výsledek odvození $abBbbaB$. Tedy použili jsme pravidlo $A \rightarrow bBb$, „vyměnili“ neterminál A za řetězec bBb a ostatní symboly v řetězci $aAbaB$ ponechali beze změny a v původním pořadí!

Poznámka.

Všimněte si, že stejně jako u pravidel zapisujeme i odvození „infixově“, tj. symbol přímého odvození $\Rightarrow_G$ vkládáme mezi oba řetězce a **nepíšeme** např. $(aAbaB, abBbbaB) \in \Rightarrow_G$. Určitě jste zaregistrovali proč.

Definice – odvození v k krocích

Buď $k \in \mathbb{N}_0$. Odvození v k krocích značíme $\Rightarrow_G^k$ a definujeme induktivně takto:

1. $\Rightarrow_G^0$ je odvození v 0 krocích (např. $bB \Rightarrow_G^0 bB$) – tj. neprovede se žádné odvození.
2. $\Rightarrow_G^1 = \Rightarrow_G$ je přímé odvození (tj. odvození v jednom kroku).
3. $\Rightarrow_G^{k+1} = \Rightarrow_G^k \circ \Rightarrow_G$.

Příklad 3.

Znovu použijeme stejnou gramatiku jako v **Příkladu 1**, tedy $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, \varepsilon\}, P, S)$, kde množina $P = \{$

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aA \mid bbB \\ aA & \rightarrow & aAba \\ A & \rightarrow & aa \mid bBb \mid aAa \\ bB & \rightarrow & bbBa \\ B & \rightarrow & b \mid \varepsilon \mid BB \ \} \end{array}$$

Ukázali jsme (v **Příkladu 2**) odvození $aAbaB \Rightarrow_G abBbbaB$. Můžeme ale pokračovat dále, tj.

$$aAbaB \Rightarrow_G abBbbaB \Rightarrow_G abbbbaB \Rightarrow_G abbbba$$

Všechna tři odvození se však dají souhrně zapsat

$$aAbaB \Rightarrow_G^3 abbbba$$

Provedli jsme tři odvození, tedy odvození ve 3 krocích.
Úkol: Podle jakých pravidel jsme provedli odvození ve 2. a 3. kroku?

Poznámka.

1. Pokud bude z kontextu zřejmě, o jakou gramatiku se jedná, nebudeme v symbolu odvození používat symbol G, tj. místo $\Rightarrow_G$ budeme psát pouze $\Rightarrow$.

2. V praxi či jiných materiálech se můžete setkat s tím, že se místo pojmu odvození v gramatice používá **derivace** v gramatice. Jedná se o dvojí pojmenování stejné věci.

Příklad 4.

Naši oblíbenou gramatiku snad už ani nemusíme představovat, přesto buď $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, \varepsilon\}, P, S)$, kde množina $P = \{$

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aA \mid bbB \\ aA & \rightarrow & aAba \\ A & \rightarrow & aa \mid bBb \mid aAa \\ bB & \rightarrow & bbBa \\ B & \rightarrow & b \mid \varepsilon \mid BB \ \} \end{array}$$

Úkol: Zapište odvození slov $bb, aaa, bbb, bbba, aaaba, abbba$ z počátečního neterminálu S. U každého slova uveďte, jaká pravidla jste použili.

Řešení.

1. $S \Rightarrow bbB \Rightarrow bb$, v 1. kroku jsme použili pravidlo $S \to bbB$, ve 2. kroku pravidlo $B \to \varepsilon$.
2. $S \Rightarrow aA \Rightarrow aaa$, v 1. kroku jsme použili pravidlo $S \to aA$, ve 2. kroku pravidlo $A \to aa$.
3. $S \Rightarrow bbB \Rightarrow bbb$, v 1. kroku jsme použili pravidlo $S \to bbB$, ve 2. kroku pravidlo $B \to b$.
4. $S \Rightarrow bbB \Rightarrow bbbBa \Rightarrow bbba$, v 1. kroku jsme použili pravidlo $S \to bbB$, ve 2. kroku pravidlo $bB \to bbbBa$ a ve 3. kroku pravidlo $B \to \varepsilon$.
5. $S \Rightarrow aA \Rightarrow aAba \Rightarrow aaaba$, v 1. kroku jsme použili pravidlo $S \to aA$, ve 2. kroku pravidlo $aA \to aAba$ a ve 3. kroku pravidlo $A \to aa$.
6. $S \Rightarrow aA \Rightarrow aAba \Rightarrow abBbba \Rightarrow abbba$, v 1. kroku jsme použili pravidlo $S \to aA$, ve 2. kroku pravidlo $aA \to aAba$, ve 3. kroku pravidlo $A \to bBb$ a ve 4. kroku pravidlo $B \to \varepsilon$.

Definice – další druhy odvození

Buď $k \in \mathbb{N}_0$ a nechť G je libovolná gramatika.

- Odvození v nejvýše k krocích:
  $\Rightarrow^{\leq k} = \bigcup\limits_{i=0}^{k} \Rightarrow^i$
- reflexivní a tranzitivní uzávěr $\Rightarrow$:
  $\Rightarrow^\star = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Rightarrow_G^i$
- tranzitivní uzávěr $\Rightarrow$
  $\Rightarrow^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Rightarrow^i$

Definice – větná forma, věta

Buď $G = (N, \Sigma, P, S)$ gramatika. **Větnou formou** rozumíme řetězec $\alpha \in V^*$ takový, že $S \Rightarrow^\star \alpha$. Jsou-li všechny symboly řetězce α terminály, pak α nazýváme **větou**.

Příklad 5.

V **Příkladu 4** jsme nalezli odvození slov $bb, aaa, bbb, bbba, aaaba, abbba$ v gramatice G. Jsou to tedy věty. Při odvození slova $abbba$ jsme postupovali takto: $S \Rightarrow aA \Rightarrow aAba \Rightarrow abBbba \Rightarrow abbba$. Řetězce $aA, aAba, abBbba$ jsou tedy větné formy gramatiky G. V **Příkladu 3** jsme zkoumali řetězec $aAbaB$. Zkuste sami říct, zda se jedná o větnou formu gramatiky G nebo ne, tj. dá se $aAbaB$ odvodit z počátečního neterminálu S?

Definice – jazyk generovaný gramatikou

Buď G gramatika nad abecedou Σ. Jazyk generovaný gramatikou G je množina $L(G) = \{w \in \Sigma^\star \mid S \Rightarrow^\star w\}$, tj. množina všech slov, které lze odvodit z počátečního neterminálu S.

Definice – ekvivalence gramatik

Gramatiky G_1 a G_2 jsou jazykově ekvivalentní, když $L(G_1) = L(G_2)$, tj. když generují stejný jazyk.

Příklad 6.

Mějme gramatiku G zadanou takto: $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde $P = \{$

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aAa \mid bAb \\ A & \rightarrow & a \mid b \mid aA \mid bA \mid \varepsilon\ \} \end{array}$$

Jaká slova generuje gramatika G? Popište přesně jazyk $L(G)$.

Řešení. Vždy nejdříve začneme tím, že si vygenerujeme dostatečně velký počet slov, abychom pochopili „fungování“ gramatiky. Sami tedy asi zjistíte, že

$$L(G) = \{aaa, aa, bb, bab, aba, bbb, aaaa, bbbb, baab, babb, \dots\}.$$

Pozornější řešitel si uvědomí fakt, že v 1. kroku každého odvození musíme použít buď pravidlo $S \rightarrow aAa$ nebo $S \rightarrow bAb$ a potom už se k neterminálu S v dalším odvozování nemůžeme vrátit. Co to znamená? Na začátku i na konci slova jsou stejné symboly, slovo tedy buď začíná a končí symbolem a nebo začíná a končí symbolem b.

Větné formy aAa, bAb poté upravujeme tak, že měníme pouze prostřední neterminál A. Ten můžeme odvozovat libovolným způsobem. Výsledkem tedy je jazyk

- $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid w = axa \ \vee\ w = bxb,\ x \in \{a, b\}^*\}$
- $L(G)$ obsahuje slova, která začínají a končí stejným symbolem.

Příklad 7.

Navrhněte gramatiky, které budou generovat jazyky

1. $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abb\}$
2. $L_2 = \{w \in \{a, b\}^*;\ |w| = 2k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$
3. $L_3 = \{w.w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Řešení.

1. Pro lepší pochopení si neterminály budeme značit jiným způsobem než jak jsme byli zvyklí. Buď $G = (\{S, N_a, N_{ab}, N_{abb}\}, \{a, b\}, P, S)$, kde $P = \{$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow bS \mid aN_a \\ N_a &\rightarrow aN_a \mid bN_{ab} \\ N_{ab} &\rightarrow aN_a \mid bN_{abb} \\ N_{abb} &\rightarrow aN_{abb} \mid bN_{abb} \mid a \mid b \mid \varepsilon \ \} \end{aligned}$$

   Všimněte si, že názvy neterminálů uchovávají informaci o tom, v jaké fázi odvození jsme. V momentě, kdy větná forma obsahuje

   - neterminál N_a, víme, že je před ním symbol a;
   - neterminál N_{ab}, víme, že je před ním podslovo ab;
   - neterminál N_{abb}, víme, že je před ním podslovo abb, tudíž v tuto chvíli už větná forma obsahuje abb, gramatika může generovat cokoliv a vždy odvodíme větu – slovo patří do L_1.

   Podívejme se třeba na odvození slova $ababba$, které obsahuje podslovo abb:

$$S \Rightarrow aN_a \Rightarrow abN_{ab} \Rightarrow abaN_a \Rightarrow ababN_{ab} \Rightarrow ababbN_{abb} \Rightarrow ababba$$

2. Jazyk $L_2 = \{\varepsilon, aa, ab, ba, bb, aaaa, \dots\}$. Je tedy nutné, aby se startovní neterminál S mohl být přepsán na ε. Má-li být délka slova sudá, pak libovolné slovo vznikne řetězením aa, ab, ba, bb za sebou v libovolném pořadí libovolně krát. Gramatika $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidly

$$P = \{S \rightarrow \varepsilon \mid aaS \mid abS \mid baS \mid bbS\}$$

   je určitě možným řešením, tj. generuje jazyk L_2.

3. Jazyk L_3 obsahuje slova jako $\varepsilon, aa, bb, abba, baab, aaaa, bbbb, \dots$ Když si tato slova rozpůlíme: $a|a, b|b, ab|ba, ba|ab, aa|aa, bb|bb$, zjistíme, že vznikají „obalováním“ symbolů z obou stran $|$. Např. slovo $abaaba$ vznikne tak, že

   - symbol $|$ obalíme nejdříve z obou stran a-čkem, tj. $a|a$,
   - poté $|$ obalíme b-čkem: tj $ab|ba$ („obalování“ probíhá bezprostředně u symbolu $|$),
   - naposledy $|$ znovu obalíme a-čkem: $aba|aba$.

   Roli $|$ může hrát např. neterminál S, tj. gramatika

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon \mid aSa \mid bSb\}, S)$$

   je řešením úkolu, tj. generuje jazyk L_3.