Uzávěrové vlastnosti rekurzivních a rek. spočetných jazyků

Řešení Příkladu 11.3 (Sbírka příkladů)

O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá.

a) R je regulární, L je rekurzivně spočetný $\Longrightarrow R \cap L$ je regulární

Neplatí. Uvažujme jazyky
$R = \{a^*b^*c^*\}$,
$L = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$
splňující předpoklady tvrzení. Jejich průnik $R \cap L = L$ není zcela jistě regulární jazyk.

b) L je rekurzivní $\Longrightarrow$ co-L je rekurzivní

Platí na základě uzávěrových vlastností třídy rekurzivních jazyků.

c) L je rekurzivní $\Longrightarrow L^*$ je rekurzivní

Platí na základě uzávěrových vlastností třídy rekurzivních jazyků.

d) L je kontextový $\Longrightarrow$ co-L je rekurzivní

Platí. Každý kontextový jazyk je zároveň také rekurzivní. Protože třída rekurzivních jazyků je uzavřena na operaci doplněk, je i jazyk co-L rekurzivní.

e) L není rekurzivní $\Longrightarrow$ co-L není rekurzivní

Platí. Nechť L je nerekurzivní jazyk. Předpokládejme sporem, že jazyk $K =$ co-L je rekurzivní. Dle uzávěrových vlastností třídy rekurzivních jazyků je jazyk co-$K =$ co-(co-L) $= L$ rekurzivní. To je spor s úvodním předpokladem. Zadané tvrzení tedy platí.

f) L není rekurzivní a R je rekurzivní $\Longrightarrow L \setminus R$ není rekurzivní

Neplatí. Ukážeme to pomocí následujícího protipříkladu. Buď L libovolný nerekurzivní jazyk nad abecedou $\{a, b, c\}^*$. Dále nechť $R = \{a, b, c\}^*$. Jistě je R rekurzivní (každý regulární jazyk patří též mezi rekurzivní jazyky). Jazyk $L \setminus R = \emptyset$ je regulární, tudíž i rekurzivní.

g) L není rekurzivní, R je rekurzivní a $R \subseteq L \Longrightarrow L \setminus R$ není rekurzivní

Platí. Jelikož $R \subset L$, platí vztah $L = R \cup (L \setminus R)$. Předpokládejme sporem, že $L \setminus R$ je rekurzivní. Dle předpokladů věty je i jazyk R rekurzivní, sjednocení $L = R \cup (L \setminus R)$ je tedy rekurzivní jazyk dle uzávěrových vlastností. To je ovšem spor s předpokladem, že L není rekurzivní. Původní tvrzení tedy platí.