Ekvivalence konečných automatů a regulárních gramatik

V tomto dokumentu učiníme velmi důležitý závěr, který lze z předchozího vytušit. Regulární jazyky jsme si definovali dvakrát, poprvé pomocí gramatik typu 3, neboli regulárních gramatik, jejichž definici jsme uváděli v Chomského hierarchii gramatik. Podruhé jsme se o regulárních jazycích bavili v souvislosti s konečnými automaty. Nyní je čas, abychom oba pojmy (regulární gramatiky, konečné automaty) postavili na stejnou úroveň a prohlásili je za stejně „silné“ co se týče množiny jazyků, které oba přijímají či generují.

Věta 1 (od regulární gramatiky ke konečnému automatu).

Ke každé regulární gramatice $G = (N, \Sigma, P, S)$ existuje nedeterministický konečný automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(G) = L(M)$.

Důkaz (algoritmus pro převod).

Buď $G = (N, \Sigma, P, S)$ regulární gramatika. Můžeme v ní mít pravidla tvaru $A \to a$, $A \to aB$, kde $A, B \in N, a \in \Sigma$. Navíc zde může zde být pravidlo $S \to \varepsilon$, ale potom S nesmí být na pravé straně žádného pravidla.

Buď $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nedeterministický konečný automat s těmito vlastnostmi:

1. $Q = \{\overline{A}, A \in N\} \cup \{q_f\},\ q_f \notin N$;
2. $F = \{q_f\}$;
3. $q_0 = \overline{S}$;
4. δ je přechodová funkce, která vznikne takto:
   a) máme-li pravidlo $A \to aB$, pak $\overline{B} \in \delta(\overline{A}, a)$,
   b) máme-li pravidlo $A \to a$, pak $q_f \in \delta(\overline{A}, a)$,
   c) máme-li pravidlo $S \to \varepsilon$, pak $F = F \cup \{q_0\}$.

Důkaz korektnosti: nejdříve je potřeba ukázat platnost ekvivalence

$$S \Rightarrow^* a_1 \dots a_k B \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{B} \in \overline{\delta}(\overline{S}, a_1 \dots a_k),$$

kde $a_1, \dots, a_k \in \Sigma$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, $S, B \in N$. Důkaz provedeme pomocí matematické indukce vzhledem ke k:

- **Báze:** buď $k = 0$, což znamená, že $a_1 \dots a_k = \varepsilon$. Nutně tedy $B = S$. Z definice rozšířené přechodové funkce víme, že v jejím bázovém kroku je pro každý stav $q \in Q$ definován přechod pod ε takto: $\overline{\delta}(q, \varepsilon) = q$. Nutně tedy musí platit i $\overline{B} \in \overline{\delta}(\overline{S}, \varepsilon)$.

- **Indukční krok:** Nechť pro všechna slova w délky maximálně $k \in \mathbb{N}_0$ platí tvrzení

$$S \Rightarrow^* wB \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{B} \in \overline{\delta}(\overline{S}, w).$$

- **Indukční krok:** uvažujme všechna slova wa, kde $w \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma, |w| \leq k$. Předpokládejme, že $S \Rightarrow^* waB$ a ukažme platnost ekvivalence

$$S \Rightarrow^* waB \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{B} \in \overline{\delta}(\overline{S}, wa).$$

Dle tvaru pravidel v regulární gramatice G musí platit:

$$S \Rightarrow^* wC \Rightarrow waB,$$

kde $C \in N$, pro který platí $C \to aB \in P$. Dle indukčního předpokladu však

1. z derivace $S \Rightarrow^* wC$ plyne $\overline{C} \in \overline{\delta}(\overline{S}, w)$ $(|w| \le k)$,
2. z derivace $C \Rightarrow aB$ plyne $\overline{B} \in \delta(\overline{C}, a)$ $(|a| = 1)$.

Pokud dáme dohromady předchozí dva výsledky $\overline{C} \in \overline{\delta}(\overline{S}, w)$ a $\overline{B} \in \overline{\delta}(\overline{C}, a)$, dostáváme

$$\overline{B} \in \overline{\delta}(\overline{S}, wa)$$

Nyní je již celkem snadné ukázat platnost $x \in L(G) \Leftrightarrow x \in L(M)$.

1. Pro $x = \varepsilon$ platí

$$\varepsilon \in L(G) \Leftrightarrow S \to \varepsilon \in P \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{S} \in F \Leftrightarrow \varepsilon \in L(M).$$

2. Pro $x = wa$ $(w \in \Sigma^*, a \in \Sigma)$ platí

$$wa \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow^* wB \Rightarrow wa \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{B} \in \overline{\delta}(\overline{S}, w),\ q_f \in \overline{\delta}(\overline{B}, a) \Leftrightarrow q_f \in \overline{\delta}(\overline{S}, wa).$$

Poznámka 1.

Předchozí důkaz bychom mohli rozdělit do dvou částí.

1. Algoritmus pro převod, který počítá se třemi druhy pravidel v regulární gramatice. Tvar $A \to aB$ zachytíme v konečném automatu tak, že doplníme $\overline{B} \in \delta(\overline{A}, a)$. Najdeme-li pravidlo $A \to a$, pak přidáme $q_f \in \delta(\overline{A}, a)$, kde q_f je nový stav patřící zároveň do F. A konečně, je-li v množině pravidel $S \to \varepsilon$, potom upravíme množinu F tak, že do ní přidáme stav $\overline{S}$.

2. Důkaz korektnosti, jehož hlavní částí je důkaz ekvivalence

$$S \Rightarrow^* a_1 \ldots a_k B \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{B} \in \overline{\delta}(\overline{S}, a_1 \ldots a_k),$$

   kde $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, $S, B \in N$.

Příklad 1.

Převeďte regulární gramatiku G na nedeterministický konečný automat M tak, aby $L(G) = L(M)$. Gramatika $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$.

$$\begin{aligned} P = \{S &\to aA \mid bB \mid \varepsilon, \\ A &\to bC \mid b, \\ B &\to dD \mid a, \\ C &\to aA \mid cD, \\ D &\to aC \mid bB\} \end{aligned}$$

Řešení. Nejprve si všimněte, že $S \to \varepsilon \in P$. To znamená, že množina koncových stavů bude obsahovat i stav q_S příslušný neterminálu S. Nedeterministický automat

$$M = (\{q_S, q_A, q_B, q_C, q_D, q_f\}, \{a, b, c, d\}, \delta, q_S, \{q_S, q_f\})$$

má přechodovou funkci δ danou následující tabulkou:

	δ	a	b	c	d
$\leftrightarrow$	q_S	$\{q_A\}$	$\{q_B\}$	$-$	$-$
	q_A	$-$	$\{q_C, q_f\}$	$-$	$-$
	q_B	$\{q_f\}$	$-$	$-$	$\{q_D\}$
	q_C	$\{q_A\}$	$-$	$\{q_D\}$	$-$
	q_D	$\{q_C\}$	$\{q_B\}$	$-$	$-$
$\leftarrow$	q_f	$-$	$-$	$-$	$-$

Věta 2 (od konečného automatu k regulární gramatice).

Buď $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ konečný automat, pak existuje gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$ taková, že $L(G) = L(M)$.

Důkaz (algoritmus převodu).

Předpokládejme, že $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F$ je nedeterministický konečný automat. Položme $N = \{\overline{q} \mid q \in Q\}$ a definujme množinu pravidel P v těchto bodech:

1. je-li $p \in \delta(q, a)$, kde $p, q \in Q, a \in \Sigma$, pak $\overline{q} \to a\overline{p}$ přidáme do P. Pokud navíc $p \in F$, přidej ještě pravidlo $\overline{q} \to a$.
2. V případě, že $q_0 \notin F$, položíme $S = \overline{q_0}$. V opačném případě ($q_0 \in F \Rightarrow \varepsilon \in L(M)$) vytvoříme nový startovní neterminál S, přidáme jej do množiny N a provedeme následující:

$$S \to \varepsilon \mid \alpha,$$

   kde α je zástupný symbol pro všechny pravé strany $\overline{q_0}$-pravidel.

Výslednou gramatikou je $G = (N, \Sigma, P, S)$, která je jistě regulární.

Důkaz korektnosti: se provede matematickou indukcí tvrzení:

$$\overline{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad S \Rightarrow^* w,$$

kde $w = a_1 \dots a_k \in \Sigma^*$, a to vzhledem k délce slova w. Nebudeme jej uvádět, protože je obměnou předchozího důkazu, akorát v obráceném pořadí.

Poznámka 2.

Bod 2. definice množiny pravidel P má své opodstatnění, ačkoliv se to na první pohled nezdá. Pokud $\varepsilon \in L(M)$, má být i $\varepsilon \in L(G)$. Jestliže bychom ponechali startovním neterminálem $\overline{q_0}$ a přidali pravidlo $\overline{q_0} \to \varepsilon$, nemáme zaručeno, že se neterminál $\overline{q_0}$ nebude vyskytovat na pravé straně žádného pravidla. To by však bylo porušení podmínky v Chomského hierarchii gramatik.

Z toho důvodu se přidává nový startovní neterminál S, který obsahuje stejná pravidla jako $\overline{q_0}$, navíc však potřebné $S \to \varepsilon$. Tento neterminál na pravé straně pravidel určitě nenalezneme, protože byl nově vytvořen.

Příklad 2.

Buď dán nedeterministický konečný automat $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ s přechodovou funkcí δ zadanou tabulkou:

	δ	a	b
$\rightarrow$	q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
	q_1	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\leftarrow$	q_2	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$

Převeďte automat M na ekvivalentní regulární gramatiku G.

Řešení. První důležité zjištění je, že stav q_0 není koncový, tudíž nemusíme přidávat nový startovní neterminál do gramatiky G. Nejdříve aplikujeme bod 1. Všude tam, kde se na pravé straně vyskytuje koncový stav q_2, musíme navíc přidat i pravidlo pro samotný vstupní symbol.

Např. pro stav q_0 a přechod pod symbolem a: do množiny P přidáme pravidla $\overline{q_0} \rightarrow a\overline{q_1} \mid a\overline{q_2}$. Navíc ještě přidáme pravidlo $\overline{q_0} \rightarrow a$ z důvodu $q_2 \in \delta(q_0, a), q_2 \in F$. Stejně tak pro přechod z q_0 pod b, výsledkem tedy bude

$$\overline{q_0} \rightarrow a\overline{q_1} \mid a\overline{q_2} \mid a \mid b\overline{q_1}$$

Podobně pro stavy q_1, q_2. Výsledkem bude regulární gramatika $G = (\{\overline{q_0}, \overline{q_1}, \overline{q_2}\}, \{a, b\}, P, \overline{q_0})$ s množinou pravidel P:

$$\begin{array}{lcl} \overline{q_0} & \rightarrow & a\overline{q_1} \mid a\overline{q_2} \mid a \mid b\overline{q_1} \\ \overline{q_1} & \rightarrow & a\overline{q_0} \mid a\overline{q_2} \mid a \mid b\overline{q_2} \mid b \\ \overline{q_2} & \rightarrow & a\overline{q_2} \mid a \mid b\overline{q_0} \end{array}$$

Poznámka 3.

Je samozřejmě možné, abyste si neterminály vhodně přejmenovali a symbolům $\overline{q_0}, \overline{q_1}, \ldots$ přiřadili velká písmena latinské abecedy tak, jak je zvykem.