Přijímání koncovým stavem či prázdným zásobníkem

V tomto dokumentu si uvedeme tvrzení, které nám potvrdí fakt, že neexistuje rozdíl mezi tím, zda zásobníkový automat přijímá koncovým stavem nebo prázdným zásobníkem. Důkaz tvrzení nám bude podávat návod k tomu, jak mezi oběma typy PDA převádět. Vše procvičíme na několika řešených i neřešených příkladech.

Věta.

Jazyk $L = L(M_{pz})$ pro nějaký PDA M_{pz} přijímající prázdným zásobníkem, právě když $L = L(M_{ks})$ pro nějaký PDA M_{ks} přijímající koncovým stavem.

Poznámka.

1. Věta je tvrzení tvaru ekvivalence. Je tedy nutné dokázat jej oběma směry, tj.
   - $\Rightarrow$: máme-li PDA M_{pz} přijímající prázdným zásobníkem, zkonstruujeme ekvivalentní PDA M_{ks} přijímající koncovým stavem.
   - $\Leftarrow$: máme-li PDA M_{ks} přijímající koncovým stavem, zkonstruujeme ekvivalentní PDA M_{pz} přijímající prázdným zásobníkem.
2. Jak jste asi poznali, názvy obou automatů jsou voleny tak, aby Vám pomohly v orientaci, o jaký typ PDA se jedná. Zkratka „pz“ znamená prázdný zásobník, naopak „ks“ koncový stav.

Idea důkazu.

- $\Rightarrow$: máme PDA M_{pz} přijímající prázdným zásobníkem a chceme k němu zkonstruovat ekvivalentní PDA M_{ks} přijímající koncovým stavem. Budeme postupovat tak, že ještě před zahájením činnosti M_{ks} přidáme na dno jeho zásobníku nový symbol D. Poté začne automat M_{ks} simulovat činnost automatu M_{pz}. Kdykoliv se na vrcholu zásobníku M_{ks} objeví symbol D, přepíná se automat M_{ks} do koncového stavu $q_f \in F$. Je to logické, neboť v té chvíli měl automat M_{pz} prázdný zásobník, tedy přijímal slovo.

- $\Leftarrow$: máme PDA M_{ks} přijímající koncovým stavem a chceme zkonstruovat ekvivalentní PDA M_{pz} přijímající prázdným zásobníkem. Automat M_{pz} bude opět simulovat činnost M_{ks}, pouze v případě, že se M_{ks} ocitá v koncovém stavu, bude mít automat M_{pz} možnost přepnutí do nového stavu q_{delete}, ve kterém vymaže všechny zbylé symboly na zásobníku a akceptuje. Jediný problém může nastat v situaci, kdy automat M_{ks} není v koncovém stavu a přesto má prázdný zásobník (v tu chvíli nepřijímá slovo), avšak automat M_{pz} simulující jeho činnost slovo přijímá (má prázdný zásobník). Tuto možnost ošetříme tak, že ještě před začátkem práce M_{pz} přidáme na dno zásobníku nějaký nový symbol D, který dovolíme smazat pouze ve stavu q_{delete}.

Důkaz.

- $\Rightarrow$: Mějme PDA $M_{pz} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ přijímající prázdným zásobníkem takový, že $L = L(M_{pz})$. Sestrojíme PDA $M_{ks} = (Q \cup \{q_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{D\}, \delta', q_0, D, \{q_f\})$ takto:
  1. $\delta'(q_0, \varepsilon, D) = (q_0, Z_0 D)$ – na dno zásobníku M_{ks} vložíme nový symbol D.
  2. $\delta'(q, x, Z) = \delta(q, x, Z)$ pro libovolný stav $q \in Q$, symbol $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a zásobníkový symbol $Z \in \Gamma$ – simulace činnosti PDA M_{pz} automatem M_{ks}.

3. $\delta'(q, \varepsilon, D) = (q_f, \varepsilon)$ pro libovolný stav $q \in Q$ – je-li na zásobníku symbol D, ukončíme výpočet (automat M_{pz} má v tuto chvíli prázdný zásobník, M_{ks} tedy musí končit).

Korektnost: Je patrné, že automat M_{ks} přijímá stejný jazyk jako M_{pz}. Pro jistotu si to však raději ověříme. Začíná-li automat M_{ks} pracovat a má na vstupní pásce nějaké slovo $w \in L(M_{pz})$, je v počáteční konfiguraci (q_0, w, D). Provede postupně tento výpočet:

$$(q_0, w, D) \mapsto_1 (q_0, w, Z_0 D \mapsto_2^* (q, \varepsilon, D) \mapsto_3 (q_f, \varepsilon, \varepsilon),$$

kde $q \in Q$ je libovolné. Všimněte si hlavně výpočtu $\mapsto_2^*$, který využívá pouze přechody automatu M_{pz} (viz bod 2). Automat M_{ks} totiž nemůže jinak, protože přechody v bodech 1, 3 jsou pro ε, tj. nečteme nic ze vstupní pásky. Naším cílem je ale právě přečtení celého slova w, protože je to jedna z podmínek, za jaké může libovolný automat slovo akceptovat.

$\Leftarrow$: Mějme PDA $M_{ks} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ přijímající koncovým stavem takový, že $L = L(M_{ks})$. Sestrojíme PDA $M_{pz} = (Q \cup \{q_{delete}\}, \Sigma, \Gamma \cup \{D\}, \delta', q_0, D, \emptyset)$ takto:

1. $\delta'(q_0, \varepsilon, D) = (q_0, Z_0 D)$ – na dno zásobníku M_{pz} vložíme nový symbol D.
2. $\delta'(q, x, Z) = \delta(q, x, Z)$ pro libovolný stav $q \in Q$, symbol $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a zásobníkový symbol $Z \in \Gamma$ – simulace činnosti PDA M_{ks} automatem M_{pz}.
3. Pro každý stav $q \in F$ a každý symbol $Z \in \Gamma \cup \{D\}$ přidej přechod $\delta'(q, \varepsilon, Z) = (q_{delete}, \varepsilon)$ – je-li M_{pz} ve stavu q, který je koncový pro automat M_{ks}, přidáváme možnost přepnutí do stavu q_{delete} odstraňujícího všechny zbylé symboly ze zásobníku.
4. $\delta'(q_{delete}, \varepsilon, Z) = (q_{delete}, \varepsilon)$ pro libovolný symbol $Z \in \Gamma \cup \{D\}$ – ve stavu q_{delete} postupně vymažeme všechny symboly zásobníku.

Korektnost: Opět by mělo být zřejmé, že M_{pz} přijímá stejný jazyk jako M_{ks}. Raději však i v tomto případě naznačíme korektnost konstrukce vzhledem k jazyku obou automatů, tj. že oba přijímají stejný jazyk. Automat M_{pz} začíná v konfiguraci (q_0, w, D), kde $w \in L(M_{ks})$. Provádí tento výpočet:

$$(q_0, w, D) \mapsto_1 (q_0, w, Z_0 D) \mapsto_2^* (q, \varepsilon, Y_1 \dots Y_m D) \mapsto_3 (q_{delete}, \varepsilon, Y_2 \dots Y_m D) \mapsto_4^* (q_{delete}, \varepsilon, \varepsilon),$$

kde $q \in F$ a $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \in \Gamma \cup \{D\}$. Opět si všimněte, že pouze přechody v bodu 2 umožňují čtení ze vstupní pásky. Jsou to však přechody simulující činnost automatu M_{ks}. Tj. automat M_{pz} může akceptovat pouze tehdy, když simulovanou činností M_{ks} vyprázdní vstupní pásku a dostane se do stavu $q \in F$.

Příklad 1.

Mějme PDA $M_{ks} = (\{p, q, r, s\}, \{a, b, c\}, \{Z, S\}, \delta, p, Z, \{r\})$, kde funkce δ je následující:
$\delta(p, a, Z) = (p, SZ)$
$\delta(p, a, S) = (p, SS)$
$\delta(p, b, S) = (q, SS)$
$\delta(q, b, S) = (q, SS)$
$\delta(q, c, S) = (r, \varepsilon)$
$\delta(r, c, S) = (r, \varepsilon)$
$\delta(r, c, Z) = (s, Z)$
$\delta(s, c, Z) = (s, Z)$

Převeďte M_{ks} na ekvivalentní PDA M_{pz} přijímající prázdným zásobníkem.

Řešení. Zkonstruujeme automat $M_{pz} = (\{p, q, r, s, q_{delete}\}, \{a, b, c\}, \{Z, S, D\}, \delta', p, D, \emptyset)$ dle důkazu předchozí věty, části označené $\Leftarrow$:

1. $\delta'(p, \varepsilon, D) = (p, ZD)$ – přidáme nový symbol D na dno zásobníku.
2. opíšeme všechny přechody automatu M_{ks}, tj. simulujeme jeho činnost:
   $\delta'(p, a, Z) = (p, SZ)$
   $\delta'(p, a, S) = (p, SS)$
   $\delta'(p, b, S) = (q, SS)$
   $\delta'(q, b, S) = (q, SS)$
   $\delta'(q, c, S) = (r, \varepsilon)$
   $\delta'(r, c, S) = (r, \varepsilon)$
   $\delta'(r, c, Z) = (s, Z)$
   $\delta'(s, c, Z) = (s, Z)$
3. Pro koncový stav r přidáme ještě následující tři přechody do q_{delete} pod slovem ε:
   $\delta'(r, \varepsilon, Z) = (q_{delete}, \varepsilon)$
   $\delta'(r, \varepsilon, S) = (q_{delete}, \varepsilon)$
   $\delta'(r, \varepsilon, D) = (q_{delete}, \varepsilon)$
4. Ve stavu q_{delete} vymažeme všechny zásobníkové symboly:
   $\delta'(q_{delete}, \varepsilon, Z) = (q_{delete}, \varepsilon)$
   $\delta'(q_{delete}, \varepsilon, S) = (q_{delete}, \varepsilon)$
   $\delta'(q_{delete}, \varepsilon, D) = (q_{delete}, \varepsilon)$

Příklad 2.

Mějme PDA $M_{pz} = (\{p, q\}, \{a, b\}, \{Z, A, B\}, \delta, p, Z, \emptyset)$, kde funkce δ je následující:
$\delta(p, a, Z) = (p, AZ)$
$\delta(p, b, Z) = (p, BZ)$
$\delta(p, a, A) = \{(p, AA), (q, \varepsilon)\}$
$\delta(p, a, B) = (p, AB)$
$\delta(p, b, A) = (p, BA)$
$\delta(p, b, B) = \{(p, BB), (q, \varepsilon)\}$
$\delta(q, a, A) = (q, \varepsilon)$
$\delta(q, b, B) = (q, \varepsilon)$
$\delta(q, \varepsilon, Z) = (q, \varepsilon)$
$\delta(p, \varepsilon, Z) = (q, \varepsilon)$

Převeďte M_{pz} na ekvivalentní PDA M_{ks} přijímající koncovým stavem.

Řešení. Automat $M_{ks} = (\{p, q, q_f\}, \{a, b\}, \{Z, A, B, D\}, \delta', p, D, \{q_f\})$ zkonstruujeme dle důkazu předchozí věty, části označené $\Rightarrow$:

1. $\delta'(p, \varepsilon, D) = (p, ZD)$ – přidáme nový symbol D na dno zásobníku.
2. opíšeme všechny přechody automatu M_{pz}, tj. simulujeme jeho činnost:
   $\delta'(p, a, Z) = (p, AZ)$
   $\delta'(p, b, Z) = (p, BZ)$
   $\delta'(p, a, A) = \{(p, AA), (q, \varepsilon)\}$
   $\delta'(p, a, B) = (p, AB)$
   $\delta'(p, b, A) = (p, BA)$
   $\delta'(p, b, B) = \{(p, BB), (q, \varepsilon)\}$

$\delta'(q, a, A) = (q, \varepsilon)$
$\delta'(q, b, B) = (q, \varepsilon)$
$\delta'(q, \varepsilon, Z) = (q, \varepsilon)$
$\delta'(p, \varepsilon, Z) = (q, \varepsilon)$

3. máme-li (v libovolném stavu) na vrcholu zásobníku D, přepínáme se do nového koncového stavu q_f:
   $\delta'(p, \varepsilon, D) = (q_f, \varepsilon)$
   $\delta'(q, \varepsilon, D) = (q_f, \varepsilon)$