MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Jaroslav Michálek
Zuzana Hrdličková
David Hampel

SBÍRKA ÚLOH Z PRAVDĚPODOBNOSTI A STATISTIKY

PRO DISTANČNÍ STUDIUM

BRNO 2004 preprint

Obsah

Označení

Dále budeme značit

$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	normální rozdělení s parametry μ a σ
$\mathrm{Ro}(a,b)$	rovnoměrné rozdělení na intervalu (a,b), tj. s parametry a,b
$\mathrm{Ex}(\lambda)$	exponenciální rozdělení s parametrem λ
$\chi^2(n)$	Pearsonovo χ^2 rozdělení o n stupních volnosti
$t(n)$	Studentovo t rozdělení o n stupních volnosti
$F(n_1,n_2)$	Fisher-Snedecorovo F rozdělení o n_1 a n_2 stupních volnosti
$\mathrm{A}(\theta)$	alternativní rozdělení s parametrem θ
$\mathrm{Bi}(n,\theta)$	binomické rozdělení s parametry n a θ
$\mathrm{Po}(\lambda)$	Poissonovo rozdělení s parametrem λ
$\mathrm{G}(\theta)$	geometrické rozdělení s parametrem θ
$\mathrm{Zb}(n,\theta)$	záporně binomické rozdělení s parametry n a θ
$\mathrm{N}=\{1,2,\ldots\}$	množina všech přirozených čísel
$\mathrm{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$	množina všech přirozených čísel včetně nuly
$\mathrm{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$	množina všech celých čísel
$\mathrm{R}=(-\infty,\infty)$	množina všech reálných čísel

Ostatní značení odpovídají zápisům běžně užívaných v literatuře.

Kapitola 1

Kombinatorika

Nejdříve připomeneme základní pojmy.

Počet uspořádaných dvojic: Ze dvou konečných množin $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vybíráme uspořádané dvojice typu $[a_l, b_k]$, kde $a_l \in A$, $b_l \in B$. Všechny možné dvojice sestavíme do tabulky tak, že dvojice $[a_l, b_k]$ bude v l-tém řádku a k-tém sloupci. Každá dvojice bude v tabulce zapsána právě jednou, tedy počet uspořádaných dvojic z m a n prvkových množin je mn.

Počet uspořádaných k-tic: Nyní přejděme ke k množinám $A, B \dots, X$, jejich počet prvků bude po řadě $n_1, \dots, n_k$. Z těchto množin vybíráme uspořádanou k-tici prvků $[a_i, b_j, \dots, x_l]$ tak, že $a_i \in A$, $b_j \in B, \dots, x_l \in X$. Pokud bychom uvažovali pouze 3 množiny, vezmeme všechny uspořádané dvojice z prvních dvou množin za prvky nové množiny. Z předchozího víme, že má tato množina $n_1 n_2$ prvků. Nyní tedy můžeme pohlížet na trojici $[a, b, c]$ jako na dvojici $[[a, b], c]$. Zřejmě má $n_1 n_2 n_3$ prvků. Matematickou indukcí pak zjistíme, že z k množin, kde i-tá má n_i prvků, $i = 1, \dots, k$, můžeme vytvořit $n_1 \times \cdots \times n_k$ uspořádaných k-tic.

Variace: Je dán n prvkový základní soubor $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Libovolnou uspořádanou k-tici $[a_{j_1}, \dots, a_{j_k}]$, $a_{j_1} \in A, \dots, a_{j_k} \in A$ budeme nazývat uspořádaný výběr rozsahu k ze základního souboru. Počet všech takových výběrů bude zřejmě záležet na tom, zda se prvky v k-tici mohou, nebo nemohou opakovat. Když se prvky v uspořádaném výběru nemohou opakovat, tvoří tento uspořádaný výběr variaci bez opakování k-té třídy z n prvků. Když se mohou opakovat, tvoří uspořádaný výběr variaci s opakováním k-té třídy z n prvků.

Počet variací bez opakování: Předpokládejme, že $n \geq k$. Pak první prvek výběru může být vybrán z n možných prvků základního souboru, druhý už pouze z $n-1$ prvků atd. Variace bez opakování tedy odpovídá uspořádané k-tici vybrané postupně z množin rozsahu $n_1 = n,\ n_2 = n-1, \dots, n_k = n-k+1$. Tedy počet variací bez opakování je $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Zřejmě $(n)_k = 0$ pro $k > n$. Pro $x \in \mathrm{R}$ klademe $(x)_k = x(x-1) \times \cdots \times (x-k+1)$.

Počet permutací bez opakování Pokud $n = k$ udávají variace bez opakování počet všech uspořádání n prvkové množiny a nazývají se permutace. Počet permutací je $(n)_n = n(n-1)\cdots 1 = n!$. Klademe $0! = 1$.

Počet variací s opakováním: Jak bylo řečeno, pokud se prvky ze základního souboru mohou v uspořádaném výběru opakovat, mluvíme o variaci s opakováním (uspořádaném výběru s opakováním). Každý prvek výběru rozsahu k volíme z n prvků základního souboru. Variace s opakováním tedy odpovídá uspořádané k-tici, když $n_1 = \ldots = n_k = n$. Proto je počet variací s opakováním k-té třídy z n prvků roven n^k.

Kombinace: Nyní budeme před předpokládat, že z n prvkového základního souboru $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ vybíráme k-prvkový soubor, přičemž na uspořádání prvků ve výběru nezáleží. Libovolný takový vybraný soubor nazýváme kombinací k-té třídy z n prvků. Pokud se prvky v kombinaci nemohou opakovat, mluvíme o kombinaci bez opakování, v opačném případě o kombinaci s opakováním. Kombinace k-té třídy z n prvků tedy odpovídají neuspořádanému výběru rozsahu k z n prvkového základního souboru.

Počet kombinací bez opakování: Předpokládejme nejdříve, že se prvky v neuspořádaném výběru nemohou opakovat. Prvky každého takového výběru mohou být uspořádány $k!$ způsoby. Z předchozího víme, že počet všech variací bez opakování je $(n)_k$. Tedy pokud počet všech kombinací bez opakování rozsahu k z n prvků označíme x, pak $xk! = (n)_k$. Odtud $x = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ pro $k \leq r$. Klademe $\binom{n}{k} = 0$ pro $k > n$ a $\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!}$ pro $x \in \mathrm{R}$.

Počet kombinací s opakováním: Kombinací s opakováním rozumíme neuspořádaný výběr k prvků, které vybíráme z n-prvkové základní množiny tak, že se vybírané prvky mohou opakovat (a na pořadí vybraných prvků nezáleží). Jejich počet odpovídá počtu všech rozkladů čísla k na součet $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, kde $k_i \geq 0$ je počet výskytů i-tého prvku základního souboru ve vybraném souboru, $i = 1, \ldots, n$. Libovolnou kombinaci s opakováním můžeme zapsat pomocí posloupnosti „$*$" a „|". Např. kombinace s opakováním ze základní množiny $M = \{a_1, a_2, a_3\}$ může být tvořena prvky a_1, a_3, a_1, a_1. Tuto kombinaci z opakováním, kdy prvek a_1 byl vybrán třikrát, prvek a_2 nebyl vybrán a prvek a_3 byl vybrán právě jednou, lze znázornit pomocí posloupnosti symbolů „$*$" a „|" typu $| * * * || * |$. Přičemž počet „$*$" mezi sousedními prvky typu „|" chápeme jako počet prvků v přihrádce, vymezené dvěma následnými symboly „|" (tzv. hranice přihrádek). Když v dané posloupnosti uvedených symbolů nepočítáme pevné krajní hranice přihrádek, je délka takové posloupnosti $k + (n-1)$ (k-krát je obsažena „$*$" a $(n-1)$-krát je obsažena hranice přihrádky „|"). Protože umístěním hranic přihrádek „|" na místa této posloupnosti jednoznačně určíme jednu z možných kombinací s opakováním, odpovídá počet kombinací s opakováním počtu všech rozmístění $(n-1)$ hranic přihrádek „|" na vybraná místa posloupnosti délky $k + (n-1)$. Rozmístění tedy můžeme popsat jako neuspořádaný výběr rozsahu $n-1$ hranic přihrádek „|” z množiny $n+k-1$ pozic. Tedy počet všech kombinací s opakováním je roven $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Počet permutací s opakováním: Nyní hledáme počet způsobů, jakými může být rozděleno n prvků základní množiny do k množin, kde první má n_1, druhá n_2 a poslední n_k prvků. Předpokládáme, že má být rozděleno všech n prvků základní množiny, tj. $n = n_1 + \cdots + n_k$. Nejprve vybereme do první množiny n_1 prvků ze základní množiny, n_2 prvků pro druhou množinu vybíráme už pouze ze zbylých $n - n_1$ prvků základní množiny, atd. Po výběru do $(k-1)$-vé množiny už zbývá pouze n_k prvků pro výběr do k-té množiny. Tedy počet všech těchto rozmístění je

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{(k-1)}}{n_k}.$$

Po rozepsání kombinačních čísel a úpravě dostáváme, že počet těchto rozmístění je

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Toto číslo udává počet uspořádání n prvkové množiny, kde je n_1 stejných prvků typu 1, …, n_k stejných prvků typu k. Taková uspořádání se nazývají permutace s opakováním.

Příklad 1.1. Dokažte, že pro libovolné $x \in \mathrm{R}$ a libovolné $r \in \mathrm{N}$ platí

$$\binom{x}{r-1} + \binom{x}{r} = \binom{x+1}{r}. \tag{1.1}$$

Příklad 1.2. Dokažte, že pro libovolné celé číslo a a libovolné $t \in (-1, 1)$ platí

$$(1+t)^a = 1 + \binom{a}{1}t + \binom{a}{2}t^2 + \binom{a}{3}t^3 + \ldots. \tag{1.2}$$

Příklad 1.3. Dokažte, že pro přirozené $n \geq 2$ platí

$$\begin{aligned}
1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots &= 0,\\
\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots &= n2^{n-1},\\
\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \ldots &= 0,\\
2\cdot 1\binom{n}{2} + 3\cdot 2\binom{n}{3} + 4\cdot 3\binom{n}{4} + \ldots &= n(n-1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

[V důkaze použijte rovnost 1.2.]

Příklad 1.4. Dokažte, že pro libovolná $n \in \mathrm{N}, k \in \mathrm{N}$ platí

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} - \ldots + (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 0.$$

Tento vztah je zvláštním případem obecnější rovnosti

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{n}{\nu}\binom{n-\nu}{k-\nu} t^{\nu} = \binom{n}{k}(1+t)^k.$$

Příklad 1.5. Pro libovolné $a > 0$

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}.$$

[Při důkazu využijte vlastnost geometrické řady: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$, pro $x \in (-1, 1)$.]

Příklad 1.6. Dokažte, že

$$\binom{2n}{n} 2^{2n} = (-1)^n \binom{-1/2}{n}.$$

Příklad 1.7. Dokažte, že pro nezáporná celá čísla n a r a libovolné reálné číslo a platí

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{a-\nu}{r} = \binom{a+1}{r+1} - \binom{a-n}{r+1}.$$

[Při důkazu využijte rovnost (1.1). Dokazovaný vztah je často užíván při $n = a$.]

Příklad 1.8. Dokažte, že pro libovolné a a přirozené $n \geq 0$ platí

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{a}{\nu} = (-1)^n \binom{a-1}{n}. \tag{1.3}$$

[Při důkazu využijte rovnost 1.1.]

Příklad 1.9. Pro přirozená čísla r a k platí

$$\sum_{\nu=0}^{r} \binom{\nu+k-1}{k-1} = \binom{r+k}{k}.$$

a) Dokažte toto tvrzení pomocí rovnosti 1.1.

b) Dokažte, že toto tvrzení je zvláštním případem 1.3.

Příklad 1.10. Matematickou indukcí dokažte, že pro přirozená čísla a, b a n platí

$$\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \ldots + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}. \tag{1.4}$$

[Tvrzení nejprve dokažte pro $a = 1$ a b libovolné.]

Příklad 1.11. Pomocí rovnosti (1.4) dokažte, že

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Příklad 1.12. Kolik iniciál je možno vytvořit, pokud každý člověk má jednu rodinu a

a) právě dvě jména,

b) ne více jak dvě jména,

c) ne více jak tři jména?

[Česká abeceda má 34 písmen.]

Příklad 1.13. Kolika způsoby mohou být postaveny na šachovnici dvě věže různé barvy tak, aby jedna mohla vzít druhou?

Příklad 1.14. V Morseově abecedě zastupují písmena posloupnosti symbolů čárek a teček s různým počtem opakování. Kolik takových písmen tvořených posloupností těchto dvou symbolů délky nejvýše 10 je možno vytvořit?

Příklad 1.15. Každá kostka domina je označena dvěma čísly. Kostky jsou symetrické, tak že čísla ve dvojicích nejsou uspořádána. Kolik je možno vytvořit různých kostek používajících čísla $1, 2, \ldots, n$?

Kapitola 2

Klasická pravděpodobnost

Příklad 2.1. Čísla $1, 2, \ldots, n$ jsou náhodně uspořádána. Určete pravděpodobnost toho, že čísla a) 1 a 2, b) 1, 2 a 3 jsou uspořádána hned vedle sebe v uvedeném pořádku.

Příklad 2.2. Určete pravděpodobnost toho, že ve výběru s opakováním mezi třemi náhodně vybranými číslicemi

a) všechny 3 číslice budou shodné,

b) právě 2 číslice budou shodné,

c) žádné 2 číslice nebudou shodné.

Řešte podobnou úlohu pro výběr čtyř cifer.

Příklad 2.3. Hráč A háže šesti hracími kostkami a vyhraje, pokud padne alespoň jedna jednička. Hráč B háže dvěmi hracími kostkami a vyhrává, pokud padnou alespoň dvě jedničky. Kdo má větší pravděpodobnost výhry?

Příklad 2.4. Najděte pravděpodobnost toho, že mezi k náhodně vybranými číslicemi nebudou žádné dvě stejné.

Příklad 2.5. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi k náhodně vybranými číslicemi

a) se nevyskytne 0,

b) se nevyskytne 1,

c) se nevyskytne 0 ani 1,

d) se nevyskytne jedna ze dvou číslic 0 a 1?

Nechť A a B značí jevy v a) a v b). Vyjádřete ostatní jevy pomocí A a B.

Příklad 2.6. Určete pravděpodobnost toho, že při náhodném rozmístění n koulí do n přihrádek bude právě jedna přihrádka prázdná.

Příklad 2.7. Na parkovišti je vedle sebe v jedné řadě 12 míst. Někdo poznamenal, že na parkovišti se nachází osm automobilů a že čtyři volná místa jsou vedle sebe. Odpovídá takové rozdělení čtyř volných míst náhodnému obsazování míst?

Příklad 2.8. Osoba dostala n klíčů, z nichž právě jeden patřil k jejím dveřím. Zkouší je postupně. Nalezněte pravděpodobnost, že správný klíč najde teprve při k-tém pokusu, $k = 1, 2, \dots, n$. Ukažte, že tato pravděpodobnost nezávisí na k a je rovna $\frac{1}{n}$.

Příklad 2.9. Každá z n tyčí je rozlomena na dvě části - dlouhou a krátkou. Pak se $2n$ získaných dílů spojí v n párů tvořících nové „tyče". Jaká je pravděpodobnost,

a) že se všechny díly spojí v počátečním pořádku,

b) že všechny dlouhé díly se spojí s krátkými?

Příklad 2.10. Jeden profesor Cornellovy univerzity dostal dvanáctkrát pokutu za nezákonné noční parkování auta, přičemž všechna pokutování proběhla buď v úterý nebo ve čtvrtek. Najděte pravděpodobnost tohoto jevu. Je předpoklad, že policie kontroluje parkování vždy jeden náhodně vybraný den v týdnu, reálný?

Příklad 2.11. Pokračování příkladu 2.10. Ani jednu pokutu z dvanácti profesor nedostal v neděli. Odpovídá to hypotéze náhodnosti?

Příklad 2.12. Bedna obsahuje 90 dobrých a 10 vadných součástek. Určete pravděpodobnost toho, že mezi 10 vybranými součástkami není žádná vadná.

Příklad 2.13. Ze souboru pěti symbolů a, b, c, d, e se provede uspořádaný výběr s opakováním rozsahu 25. Stanovte pravděpodobnost toho, že tento výběru bude obsahovat pět symbolů každého druhu.

Příklad 2.14. Ve výtahu, který zastavuje v n poschodích, $n \geq k$, je na začátku k osob. Jaká je pravděpodobnost p toho, že žádné dvě osoby nevystoupí ve stejném poschodí, když předpokládáme, že osoba volí poschodí, v němž vystoupí náhodně a nezávisle na ostatních osobách.

Příklad 2.15. Narozeniny k lidí představují výběr s opakováním rozsahu k ze souboru všech dnů v roce. Roky nemají stejnou délku, a víme, že porodnost během roku nezůstává stálá. Nicméně v prvním přiblížení je možné předpokládat, že v roce je 365 dnů a uvažovat náhodný výběr lidí místo náhodného výběru dnů narozenin. Při těchto předpokladech určete pravděpodobnost toho, že všech k dnů narozenin je v různých dnech.

Příklad 2.16. Při bridži obdrží hráč 13, při pokru 5 z 52 hracích karet. Určete pravděpodobnost toho, že hráč a) bridže b) pokru dostane karty různých hodnot (barvy karet se mohou shodovat).

Příklad 2.17. Uvažujme rozmístění k koulí do n osudí. Určete pravděpodobnost toho, že předem vybrané osudí obsahuje právě r koulí.

Příklad 2.18. Při bridži je všech 52 hracích karet rozděleno čtyřem hráčům. Stanovte pravděpodobnost, že každý hráč dostane jedno eso.

Příklad 2.19. (Odhad velikosti populace) Předpokládejme, že z rybníku bylo vyloveno tisíc ryb, které byly následně označeny barvou a vypuštěny zpět. Při dalším odlovu tisíce ryb se ukázalo, že sto z nich bylo označených. Z pozorovaného výsledku odhadněte nejpravděpodobnější velikost populace ryb v rybníku.

Příklad 2.20. Z 52 hracích karet náhodně vybereme 13 karet. Stanovte pravděpodobnost, že mezi těmito kartami bude 5 $\spadesuit$, 4 $\clubsuit$, 3 $\diamondsuit$ a 1 $\heartsuit$.

Příklad 2.21. Z osudí obsahující koule s čísly $1, 2, \ldots, N$ k-krát vytáhneme kouli a pokaždé ji

a) vrátíme zpět,
b) nevrátíme zpět.

Najděte pravděpodobnost toho, že čísla vytažených koulí tvoří rostoucí posloupnost.

Příklad 2.22. Technická kontrola prověřuje výrobky ze sady skládající se z m výrobků prvního druhu a n výrobků druhého druhu. Zkouška prvních b výrobků $(b < n)$ náhodně vybraných ze sady ukázala, že všechny byly druhého druhu. Určete pravděpodobnost toho, že mezi dalšími dvěma výrobky vybranými z dosud neprověřených nejvýše jeden výrobek bude druhého druhu.

Příklad 2.23. Z balíčku 52 karet náhodně vybereme 6 karet. Určete pravděpodobnost toho, že mezi těmito kartami budou zástupci všech čtyřech barev.

Příklad 2.24. Skupina se skládá z 5 mužů a 10 žen. Určete pravděpodobnost toho, že při jejich náhodném rozdělení do 5 skupin po třech lidech bude v každé skupině muž.

Příklad 2.25. Je dána posloupnost čísel $1, 2, \ldots, n$ a pevně dané číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Určete pravděpodobnost toho, že mezi dvěma čísly vybranými náhodně z této posloupnosti bude jedno menší a druhé větší než k.

Příklad 2.26. Dvacet lidí, mezi kterými je 10 mužů a 10 žen, je náhodně seskupeno do dvojic. Určete pravděpodobnost toho, že každou z 10 dvojic tvoří osoby opačného pohlaví.

Příklad 2.27. Házíme n hracích kostek. Určete pravděpodobnost toho, že padne n_1 jedniček, ..., n_6 šestek, $n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = n$.

Příklad 2.28. Devět cestujících náhodně nastoupí do tří vagónů. Každý cestující zvolí vagón náhodně a nezávisle na ostatních cestujících. Jaká je pravděpodobnost toho, že

a) v každém vagóně sedí 3 cestující,

b) v jednom vagóně sedí 4, v druhém 3 a ve třetím 2 cestující?

Příklad 2.29. Házíme n hracích kostek. Určete pravděpodobnost toho, že získaný součet ok je roven a) n, b) $n + 1$, c) danému číslu s.

Příklad 2.30. Z posloupnosti čísel $1, 2, \ldots, n$ náhodně vybereme k čísel. Určete pravděpodobnost, že

a) všechna vybraná čísla budou dělitelná daným číslem q,

b) každé z těchto čísel bude dělitelné právě jedním ze dvou nesoudělných čísel q_1, q_2.

Příklad 2.31. Posloupnost čísel $1, 2, \ldots, 4n$ náhodně rozdělíme na dvě stejné množiny. Určete pravděpodobnost toho, že

a) v každé množině bude stejný počet sudých a lichých čísel,

b) všechna čísla dělitelná n budou v jedné množině,

c) čísla dělitelná n budou rovnoměrně rozdělena do obou skupin.

Příklad 2.32. Co pravděpodobněji vybereme z osudí s n koulemi, sudý nebo lichý počet koulí, když každý výběr k koulí je stejně možný?

Příklad 2.33. V nádobě je N lístků s různými čísly. Z nádoby vybereme m krát po n lístcích a pokaždé je vrátíme zpět. Určete pravděpodobnost toho, že

a) k lístků se ve výběru nevyskytne,

b) všechny lístky se ve výběru vyskytnou.

Příklad 2.34. Z posloupnosti čísel $1, 2, \ldots, n$ je náhodně vybráno k čísel: $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Jaká je pravděpodobnost, že $x_m = M$?

Příklad 2.35. Soubor se skládá z N výrobků, ze nichž n je podrobeno zkoušce kvality. Soubor je přijat, pokud mezi těmito n výrobky bude odhaleno méně než m vadných. Určete pravděpodobnost toho, že soubor bude přijat, pokud počet vadných výrobků v celém souboru je M.

Příklad 2.36. Z osudí obsahujícího koule s čísly $1, 2, \ldots, N$ je postupně vytaženo n koulí. Po každém tahu je vybraná koule vrácena zpět. Čísla vybraných koulí jsou zapsána v neklesajícím pořadí. Určete pravděpodobnost toho, že číslo x_m, které je na m-té vybrané kouli, je rovno číslu M.

Příklad 2.37. Kolikrát musíme házet hrací kostkou, aby první padnutí „šestky" mělo pravděpodobnost a) větší než 0,5 b) větší než 0,8 c) větší než 0,9?

Příklad 2.38. Pravděpodobnost zásahu terče při jednom výstřelu je rovna 0,7. Na terč vystřeleno 7-krát nezávisle. Jaká je pravděpodobnost, že terč bude právě jednou zasažen?

Příklad 2.39. Kolikrát musíme házet dvěma hracími kostkami, abychom s pravděpodobností větší než 1/2 očekávali, že aspoň jednou padne součet ok rovný 12?

Příklad 2.40. Hodíme zároveň dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součin padlých ok bude sudé číslo?

Příklad 2.41. Hodíme třikrát jednou mincí. Určete pravděpodobnost, že

a) padne dvakrát líc a jednou rub,

b) padne třikrát líc,

c) padne třikrát rub,

d) padne jednou líc a dvakrát rub.

Příklad 2.42. V osudí je a koulí bílých a b koulí černých. Vytáhneme dvakrát po sobě vždy po jedné kouli, přičemž první kouli nevrátíme zpět. Určete pravděpodobnost, že

a) obě vytažené koule jsou bílé,

b) první koule je bílá a druhá černá,

c) první koule je černá a druhá bílá,

d) jedna koule bude černá a druhá bíla, přičemž nezáleží na jejich pořadí,

e) druhá vytažená koule je bílá.

Příklad 2.43. V osudí je a koulí bílých a b koulí černých. Vytáhneme k-krát po sobě vždy po jedné kouli, přičemž po žádném tahu kouli nevrátíme zpět. Určete pravděpodobnost, že poslední vytažená koule je bílá.

Příklad 2.44. V osudí je a koulí bílých a b koulí černých. Jedním tahem vytáhneme $(\alpha + \beta)$ koulí. Určete pravděpodobnost, že vytáhneme právě α bílých a β černých koulí.

Příklad 2.45. V osudí je n lístků očíslovaných čísly $1, 2, \ldots, n$. Vytáhneme najednou m lístků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vytaženými lístky bude k lístků označeno předem danými čísly?

Příklad 2.46. Hodíme n-krát po sobě jednou hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodu padne „šestka"?

Příklad 2.47. V osudí je r koulí očíslovaných čísly $1, 2, \ldots, r$. Táhneme n-krát po sobě po jedné kouli, přičemž každou vytaženou kouli vracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel, jimiž jsou vytažené koule očíslovány, je roven číslu s? $(n \leq s \ \leq nr)$ [Spočtěte koeficient u mocniny x^s v polynomu $(x + x^2 + \ldots + x^r)^n$]

Příklad 2.48. V osudí je n koulí očíslovaných čísly $1, 2, \ldots, n$. Vytáhneme n-krát po sobě po jedné kouli, přičemž vytažené koule nevracíme zpět. Osudí tedy vyprázdníme. Řekneme, že pro kouli s číslem i nastane setkání, pokud ji vytáhneme právě v i-tém tahu. Určete pravděpodobnost, že

a) pro kouli s číslem i nenastane setkání,

b) ani pro kouli s čísle i ani pro kouli s číslem k nenastane setkání, $i \neq k$.

Příklad 2.49. V osudí je a koulí bílých a b koulí černých. Koule postupně vytahujeme z osudí, přičemž vytažené koule nevracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost toho, že poprvé vytáhneme černou kouli při k-tém tahu?

Příklad 2.50. V osudí je a koulí bílých a b koulí černých. Koule postupně vytahujeme z osudí, přičemž vytažené koule nevracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že nastane okamžik, kdy počet dosud tažených bílých a černých koulí bude stejný?

Příklad 2.51. Banach byl silný kuřák. Aby měl u sebe stále zápalky, nosil ve dvou kapsách po jedné krabičce zápalek. Zápalky si bral náhodně z jedné nebo druhé krabičky s pravděpodobností 1/2. Jednou si dal do každé kapsy novou krabičku; v každé z obou krabiček bylo n zápalek. Spočtěte pravděpodobnost, že v okamžiku, kdy jednu krabičku shledal prázdnou bylo v druhé krabičce právě k zápalek. Pro jaké k je sledovaná pravděpodobnost maximální?

Kapitola 3

Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost

Příklad 3.1. Kolikrát nezávisle musíme opakovat pokus, abychom s pravděpodobností alespoň r tvrdili, že právě jednou nastane jev A, jehož pravděpodobnost je v každém pokusu rovna p?

Příklad 3.2. Střílíme opakovaně a nezávisle na balón. Abychom jej sestřelili, stačí se do balónu trefit právě jednou. Pravděpodobnost zásahu při jednom výstřelu je rovna 0,05. Kolikrát musíme vystřelit, abychom shodili balón s pravděpodobností větší než 0,8?

Příklad 3.3. Jsou dána tři osudí s bílými a černými koulemi. Pravděpodobnost volby i-tého osudí je $p_i,\ i = 1, 2, 3$. Pravděpodobnost vytažení bílé koule z i-tého osudí je $q_i,\ i = 1, 2, 3$. Zvolíme náhodně jedno z daných osudí, vytáhneme z něj jednu kouli a zjistíme, že tato koule je bílá. Jaká je pravděpodobnost, že tato vytažená koule pochází z prvního osudí?

Příklad 3.4. Jsou dána tři osudí, pravděpodobnost volby každého osudí je stejná. První osudí obsahuje 1 bílou, 2 černé a 3 červené koule. Druhé osudí obsahuje 2 bílé koule, 1 černou a 1 červenou koulí. Třetí osudí obsahuje 4 bílé koule, 5 černých koulí a 3 červené. Náhodně zvolíme jedno osudí a vytáhneme z něj dvě koule a zjistíme, že jedna z těchto vytažených koulí je bíla a druhá červená. Jaká je pravděpodobnost, že tyto koule pocházejí

a) z prvního osudí,

b) z druhého osudí,

c) ze třetího osudí?

Příklad 3.5. Osudí obsahuje celkem 10 koulí, z nichž některé jsou bílé a některé černé. Počet bílých koulí a černých koulí však není přesně znám. Víme jenom, že osudí bylo naplněno tímto způsobem: 10-krát po sobě bylo hozeno jednou mincí a pokud padl rub, byla do osudí vložena bílá koule, pokud padl líc, byla do osudí vložena černá koule. Z takto naplněného osudí bylo vytaženo m-krát po sobě po jedné kouli, přičemž po každém tahu byla vytažená koule vrácena zpět do osudí. Po provedení těchto m tahů bylo zjištěno, že všech m koulí bylo bílých. Stanovte pravděpodobnost, že

a) dané osudí obsahovalo pouze bílé koule, tj. 10 bílých a žádné černé koule.

b) dané osudí obsahovalo jednu bílou a devět černých koulí.

Příklad 3.6. Z osudí, které obsahuje 5 bílých a 5 černých koulí, bylo vytaženo 5 koulí a vloženo do jiného prázdného osudí. Z tohoto osudí byly vytaženy 3 koule a vloženy do třetího prázdného osudí. Z tohoto třetího osudí byla vytažena jedna koule a bylo zjištěno, že je bílá. Jaká je pravděpodobnost, že všech 5 koulí, vytažených z prvního osudí, bylo bílých?

Příklad 3.7. Jsou dána tři osudí s bílými a černými koulemi. Pravděpodobnost volby i-tého osudí je $p_i,\ i = 1, 2, 3$. Pravděpodobnost vytažení bílé koule z i-tého osudí je $q_i,\ i = 1, 2, 3$. Zvolíme náhodně jedno z daných osudí, vytáhneme z něj jednu kouli a zjistíme, že tato koule je bílá. Aniž bychom tuto kouli vrátili zpět do osudí, vytáhneme ze stejného osudí ještě jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že tato druhá vytažená koule je bílá? Přitom nechť pravděpodobnost, že vytáhneme z i-tého osudí ve druhém tahu bílou kouli, za předpokladu, že jsme vytáhli v prvním tahu bílou kouli, je $q_i',\ i = 1, 2, 3.$

Příklad 3.8. Jsou dána tři osudí, pravděpodobnost volby každého osudí je stejná. V prvním osudí je 1 bílá koule a 2 černé koule. Ve druhém osudí jsou 2 bílé koule a 1 černá koule. Třetí osudí obsahuje 2 bílé koule a 2 černé koule. Náhodně zvolíme jedno osudí a vytáhneme z něj jednu kouli a zjistíme, že je bílá. Vytaženou kouli nevrátíme zpět do osudí a vytáhneme ze stejného osudí ještě jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že i tato druhá koule je bílá?

Příklad 3.9. Dané osudí obsahuje 3 bílé a 5 černých koulí. Z tohoto osudí vybereme najednou 4 koule a vložíme je do jiného prázdného osudí. Z tohoto druhého osudí pak vytáhneme jedním tahem 2 koule a zjistíme, že obě jsou bílé. Dále pak z tohoto druhého osudí vytáhneme ještě jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že tato poslední vytažená koule je bílá, jestliže jsme první dvojici vytažených koulí

a) vrátili před dalším tahem zpět do osudí?

b) zpět do osudí nevrátili?

Příklad 3.10. Osudí obsahuje 5 bílých a 5 černých koulí. Vytáhneme z něj 5 koulí a vložíme je do jiného prázdného osudí. Z tohoto druhého osudí vytáhneme jednu kouli a zjistíme, že je černá. Tuto kouli nevrátíme po tahu zpět do osudí a vytáhneme z tohoto osudí ještě jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že tato druhá vytažená koule je bílá?

Příklad 3.11. Hodíme dvěmi hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padla alespoň jedna šestka, když víme, že součet ok padlých na 1. a 2. kostce je 8?

Příklad 3.12. Z osudí, ve kterém je m bílých a n černých koulí, postupně bez vracení vytáhneme dvě koule. Zjistili jsme, že první vytažená koule je bílá. Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená koule bude také bílá?

Příklad 3.13. Zjistili jsme, že při hodu deseti hracími kostkami padla aspoň jedna jednička. Jaká je pravděpodobnost, že padly 2 anebo více jedniček?

Příklad 3.14. Dokažte, že jsou-li A a B neslučitelné jevy a $\mathrm{P}(A \cup B) \neq 0$, pak

$$\mathrm{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)}.$$

Příklad 3.15. Nechť $\mathrm{P}(A|B) = 0,7$, $\mathrm{P}(A|\overline{B}) = 0,3$, $\mathrm{P}(B|A) = 0,6$. Vypočtěte $\mathrm{P}(A)$.

Příklad 3.16. Hodíme dvěmi hracími kostkami. Označme náhodné jevy A_1 na první kostce padne sudé číslo, A_2 na druhé kostce padne liché číslo, A_3 součet ok, které padly na 1. a 2. kostce, je liché číslo. Dokažte, že každé dva z jevů A_1, A_2, A_3 jsou nezávislé, ale jevy A_1, A_2, A_3 nejsou nezávislé.

Příklad 3.17. Nechť jevy A a B_1 jsou nezávislé a také jevy A a B_2 jsou nezávislé, přičemž B_1 a B_2 jsou neslučitelné. Dokažte, že jevy A a $B_1 \cup B_2$ jsou nezávislé.

Příklad 3.18. Nechť $\mathrm{P}(A) > 0$ a $\mathrm{P}(B|\overline{A}) = \mathrm{P}(B|A)$. Dokažte, že jevy A a B jsou nezávislé.

Příklad 3.19. Osudí obsahuje n koulí. Všechny možné počty bílých koulí v osudí jsou stejně pravděpodobné. Zjistili jsme, že koule náhodně vybraná z osudí je bílá. Stanovte pravděpodobnost všech možných původních počtů bílých koulí v osudí. Jaký je nejpravděpodobnější původní počet bílých koulí v osudí?

Příklad 3.20. Každé z $N + 1$ osudí obsahuje N koulí. Osudí s číslem k obsahuje k červených a $N - k$ bílých koulí, $k = 0, 1, \ldots, N$. Z náhodně zvoleného osudí n-krát vybereme kouli, přičemž vybranou kouli po tahu ihned vrátíme zpět. Stanovte

a) pravděpodobnost, že jsou všechny vybrané koule červené.

b) podmíněnou pravděpodobnost, že rovněž $(n+1)$-ní koule bude červená, za podmínky, že všechny předchozí koule byly červené.

Příklad 3.21. Tři myslivci současně vystřelili na medvěda. Medvěda zastřelili jednou kulí. Jaká je pravděpodobnost, že medvěda zastřelil první, resp. druhý, resp. třetí myslivec, když mají pravděpodobnost zásahu postupně $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$?

Příklad 3.22. Z osudí, které obsahuje m bílých $(m > 3)$ a n černých koulí, se ztratila jedna koule. Proto, abychom určili obsah osudí, vybereme z osudí dvě koule. Zjistili jsme, že jsou bílé. Jaká je pravděpodobnost, že ztracená koule je bílá?

Příklad 3.23. Z osudí, které obsahuje 3 bílé a 2 černé koule, byly naráz vybrány dvě koule. Ty byly vloženy do druhého osudí, které předtím obsahovalo 4 bílé a 4 černé koule. Jaká je pravděpodobnost, že po tomto přemístění bude z druhého osudí vytažena bílá koule?

Příklad 3.24. Hodíme 5-krát hrací kostkou. Určete pravděpodobnost, že právě dvakrát padne násobek 3.

Příklad 3.25. 20-krát vystřelíme na cíl. Pravděpodobnost zásahu při jednom výstřelu je 0,7. Určete

a) pravděpodobnost, že cíl bude alespoň jedenkrát zasažen,

b) pravděpodobnost, že cíl nebude zasažen více než dvakrát,

c) nepravděpodobnější počet zásahů.

Příklad 3.26. Baterie 14-krát vystřelila na objekt. Pravděpodobnost zásahu při libovolném z výstřelů je rovna 0,2. Určete

a) nejpravděpodobnější počet zásahů a jeho pravděpodobnost,

b) pravděpodobnost zničení objektu, pokud pro je pro jeho zničení potřeba alespoň čtyř zásahů.

Příklad 3.27. Určete pravděpodobnost

a) padnutí alespoň jedné šestky při hodu 6 hracími kostkami,

b) padnutí alespoň dvou šestek při hodu 12 hracími kostkami,

c) padnutí alespoň tří šestek při hodu 18 hracími kostkami.

Příklad 3.28. Co je pravděpodobnější vyhrát se stejně silným soupeřem 4 partie z 8 nebo 3 partie z 5?

Příklad 3.29. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 hracími kostkami padne každá stěna dvakrát?

Kapitola 4

Geometrická pravděpodobnost

Příklad 4.1. Na jedné stopě magnetofonové pásky dlouhé 200 m je nahrána zpráva na intervalu délky 20m. Na druhé stopě je podobná zpráva. Určete pravděpodobnost toho, že v intervalu od 60 do 85 m nebude na pásce místo, které by neobsahovalo nahrávku, jestliže počátky obou nahrávek jsou stejně možné v každém bodu od 0 do 180 m.

Příklad 4.2. V každém okamžiku časového intervalu délky T je stejně možné, že přijímač přijme některý ze dvou signálů. Přijímač je zablokován, jestliže rozdíl mezi okamžiky příjmu signálu je menší než τ. Určete pravděpodobnost toho, že přijímač bude zablokován.

Příklad 4.3. Jaká je pravděpodobnost, že součet dvou náhodně zvolených kladných čísel, z nichž žádné není větší než jedna, bude nejvýše roven jedné a jejich součin nebude větší než $\frac{2}{9}$?

Příklad 4.4. V kruhu o poloměru r se v daném směru vedou tětivy. Všechny průsečíky tětiv s průměrem kolmým k danému směru jsou stejně možné. Jaká je pravděpodobnost, že délka náhodně zvolené tětivy je nejvýše r?

Příklad 4.5. Na úsečce o délce l se náhodně zvolí dva body. Jaká je pravděpodobnost toho, že jejich vzdálenost bude menší než kl, kde $0 < k < 1$.

Příklad 4.6. Na úsečce AB o délce l jsou náhodně umístěny dva body L a M. Určete pravděpodobnost toho, že bod L je blíže k bodu M než k bodu A.

Příklad 4.7. Na úsečce o délce l se náhodně umístí dva body tak, že se úsečka rozdělí na tři části. Určete pravděpodobnost toho, že z tří vzniklých úseček lze sestavit trojúhelník.

Příklad 4.8. Na kružnici o poloměru r jsou náhodně umístěny tři body $A,\ B,\ C$. Jaká je pravděpodobnost toho, že trojúhelník ABC bude ostroúhlý?

Příklad 4.9. Jaká je pravděpodobnost toho, že z tří náhodně zvolených úseček, dlouhých nejvýše l, bude možno sestrojit trojúhelník?

Příklad 4.10. Na úsečce AB o délce l jsou náhodně umístěny dva body M a N. Určete pravděpodobnost toho, že délky tří vzniklých úseček nepřekročí danou hodnotu a $(l \geq a \ \geq l/3)$.

Příklad 4.11. Na autobusovou stanici přijíždí každé čtyři minuty autobus linky A a každých šest minut autobus linky B. Délka časového intervalu mezi příjezdy autobusu linky A a nejbližšího následujícího autobusu linky B může být se stejnou pravděpodobností jakákoliv v mezích od 0 do 4 minut. Určete pravděpodobnost toho, že

a) první autobus, který přijede, bude autobus linky A,

b) během dvou minut přijede nějaký autobus.

Příklad 4.12. Dva parníky musí přirazit k témuž přístavišti. Příjezdy obou parníků jsou nezávislé a stejně možné během celého dne. Určete pravděpodobnost toho, že jeden z parníků bude muset čekat na uvolnění přístaviště, jestliže první parník stojí v přístavišti jednu hodinu a druhý dvě hodiny.

Příklad 4.13. Dvě osoby mají stejnou pravděpodobnost toho, že přijdou na dohodnuté místo v libovolném okamžiku časového intervalu délky T. Určete pravděpodobnost toho, že jeden člověk na druhého bude čekat nejvýše po dobu t.

Příklad 4.14. (Buffonova úloha) V rovině jsou narýsovány rovnoběžky, jejichž vzdálenost je L. Určete pravděpodobnost, že náhodně vržená jehla délky l $(l < L)$ protne kteroukoliv přímku.

Příklad 4.15. Určete pravděpodobnost toho, že kořeny

a) kvadratické rovnice $x^2 + 2ax + b = 0$ jsou reálné,

b) kvadratické rovnice $x^2 + 2ax + b = 0$ jsou kladné,

c) kubické rovnice $x^3 + 3ax + 2b = 0$ jsou reálné,

jsou-li stejně možné hodnoty koeficientů v obdélníku $|a| \leq n, \ |b| \leq m$.

Kapitola 5

Náhodné veličiny

Příklad 5.1. Dvakrát házíme mincí. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává počet padlých líců. Určete rozdělení náhodné veličiny X, její pravděpodobnostní a distribuční funkci. Nakreslete jejich grafy.

Příklad 5.2. Dvakrát házíme hrací kostkou. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává součet hodnot, které padnou v 1. a 2. hodu. Určete rozdělení náhodné veličiny X, její pravděpodobnostní a distribuční funkci. Nakreslete jejich grafy.

Příklad 5.3. Házíme mincí, dokud nepadne líc. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává počet provedených hodů. Určete rozdělení náhodné veličiny X, její pravděpodobnostní a distribuční funkci. Nakreslete jejich grafy.

Příklad 5.4. Střílíme na cíl do prvního zásahu. Zásahy při různých výstřelech jsou nezávislé jevy, pravděpodobnost zásahu při každém výstřelu je p. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává celkový počet výstřelů. Určete rozdělení náhodné veličiny X, její pravděpodobnostní a distribuční funkci. Nakreslete jejich grafy.

Příklad 5.5. Která z dále uvedených funkcí je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny

a) $p^x q^2$, $q = 1 - p$, $0 < p \leq 1$, $x = 1, 2, \ldots$,

b) $p^{x-n} q^2$, $q = 1 - p$, $0 < p \leq 1$, $n > 0$, $x = n, n+1, \ldots$,

c) $\frac{1}{x(x+1)}$, $x \in \mathrm{R}$,

d) $\int\limits_x^{x+1} f(t)dt$, $x = 0, 1, \ldots$, kde $\int\limits_0^{\infty} f(t)dt = 1$, f je nezáporná funkce,

e) $\frac{2^x}{x!}e^{-2}$, $x = 0, 1, \ldots$?

Příklad 5.6. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci a) náhodné veličiny $Y = |X|$, b) náhodné veličiny $Y = X^2$. Nakreslete grafy těchto funkcí.

Příklad 5.7. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = 2^X$. Nakreslete jejich grafy.

Příklad 5.8. Nechť X je náhodná veličina s rozdělením

x	-1	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = \sin(X\pi)$. Nakreslete jejich grafy.

Příklad 5.9. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-1	-0,5	-0,1	0	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2
p	0,005	0,012	0,074	0,102	0,148	0,231	0,171	0,16	0,081	0,016

Vypočtěte $\mathrm{P}\left(|X| \le \frac{1}{2}\right)$.

Příklad 5.10. Házíme dvěma hracími kostkami. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává počet šestek, které padly na první kostce, náhodná veličina Y udává počet šestek, které padly na druhé kostce. Určete simultánní rozdělení X a Y. Dokažte, že jsou veličiny X a Y nezávislé.

Příklad 5.11. Házíme dvěma hracími kostkami. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X je počet ok padlých na první kostce, náhodná veličina Y udává počet ok padlých na druhé kostce. Určete simultánní rozdělení X a Y. Dokažte, že jsou veličiny X a Y nezávislé.

Příklad 5.12. Házíme dvěma hracími kostkami. Nechť náhodná veličina X je počet ok, které padly na první kostce, náhodná veličina Y udává maximum z počtu ok na obou kostkách. Určete simultánní rozdělení X a Y.

Příklad 5.13. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Dokažte, že X a $Y = 2^X$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Příklad 5.14. Nechť X nabývá hodnot $\pm 1, \pm 2$, každou s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, a $Y = X^2$. a) Určete simultánní rozdělení X a Y. b) Dokažte, že jsou veličiny X a Y nezávislé.

Příklad 5.15. n-krát střílíme na cíl. Zásahy při jednotlivých výstřelech jsou nezávislé jevy. Pravděpodobnost zásahu při každém výstřelu je rovna p. Nechť X udává počet zásahů při n výstřelech. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X a nakreslete jejich grafy.

Příklad 5.16. Náhodné veličiny X_1 a X_2 jsou nezávislé a mají stejné geometrické rozdělení $(q^x p, x = 0, 1, \ldots)$. Dokažte, že

$$\mathrm{P}\left(X_1 = x | X_1 + X_2 = n\right) = \frac{1}{n+1}, \quad x = 0, 1, \ldots n$$

Je opačné tvrzení pravdivé?

Příklad 5.17. Náhodné veličiny X_1 a X_2 jsou nezávislé a mají stejné geometrické rozdělení $(q^x p, x = 0, 1, \ldots)$. Nechť $Y = \max(X_1, X_2)$. Určete rozdělení náhodné veličiny Y a simultánní rozdělení veličin Y a X_1.

Příklad 5.18. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a mají Poissonovo rozdělení $X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1)$ a $X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_2)$.

a) Dokažte, že náhodná veličina $Y = X_1 + X_2$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.

b) Dokažte, že podmíněné rozdělení veličiny X_1 za podmínky $X_1 + X_2 = n$ je binomické rozdělení s parametry n a $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, tj.

$$\mathrm{P}\left(X_1 = x | X_1 + X_2 = n\right) = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-x},$$

pro $x = 0, 1, \ldots n$.

Příklad 5.19. Nechť X je náhodná veličina na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ a $F(x)$ je distribuční funkce této náhodné veličiny.

a) Dokažte, že množiny

$$\{\omega : X(\omega) < x\}, \{\omega : X(\omega) = x\},$$

$$\{\omega : a < X(\omega) \leq b\}, \{\omega : a \leq X(\omega) \leq b\}$$

jsou náhodné jevy.

a) Dokažte, že

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{\omega : X(\omega) < x\} &= \lim_{t \to x^-} F(t), \\
\mathrm{P}\{\omega : X(\omega) = x\} &= F(x) - \lim_{t \to x^-} F(t), \\
\mathrm{P}\{\omega : a < X(\omega) \leq b\} &= F(b) - F(a), \\
\mathrm{P}\{\omega : a \leq X(\omega) \leq b\} &= F(b) - \lim_{t \to a^-} F(t).
\end{aligned}$$

Příklad 5.20. Nechť X je náhodná veličina na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ s distribuční funkcí $F(x)$.

a) Dokažte, že pro libovolné $c \in \mathrm{R}$ množiny $\{\omega : X(\omega) > c\}$ a $\{\omega : X(\omega) \geq c\}$ jsou náhodnými jevy.

b) Vyjádřete pravděpodobnosti těchto jevů pomocí distribuční funkce $F(x)$.

Příklad 5.21. Nechť A je náhodný jev. Dokažte, že funkce

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

je náhodná veličina.

Příklad 5.22. Nechť X je náhodná veličina. Dokažte, že funkce a) $Y_1 = aX$, b) $Y_2 = |X|$, c) $Y_3 = X^2$ jsou také náhodné veličiny.

Příklad 5.23. Nechť $Y = X^2$ je náhodná veličina. Můžeme říci, že a) X je náhodná veličina, b) $|X|$ je náhodná veličina?

Příklad 5.24. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny. Dokažte, že

$$Y_1 = \max\{X_i, 1 \leq i \leq n\},$$

$$Y_2 = \min\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$$

jsou náhodné veličiny a odvoďte jejich rozdělení.

Příklad 5.25. Která z dále uvedených funkcí je distribuční funkce

a) $F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctan} x$,

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{[x]}{2}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x \le 2, \end{cases}$ kde $[x]$ značí celou část čísla x.

c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$,

d) $F(x) = \exp\{-\exp\{-x\}\}$,

e) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & x > 0? \end{cases}$

Příklad 5.26. Hustota náhodné veličiny X je rovna $f(x) = a\mathrm{e}^{-\lambda|x|}, x \in \mathrm{R}$, $(\lambda > 0)$. Určete a) koeficient a, b) distribuční funkci náhodné veličiny X, c) nakreslete grafy hustoty a distribuční funkce.

Příklad 5.27. Určete za jakých předpokladů jsou následující funkce hustotami ($a, b, c, d, k, \alpha, \lambda$ jsou vhodná reálná čísla.).

a) $f(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$, $(a < b)$,

b) $f(x) = \begin{cases} k|x-a|, & c \le x \le d, \\ 0, & x \notin [c, d], \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{ax+b}, & d \le x < \infty, \\ 0, & x < d, \end{cases}$,

d) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & ax^2 + bx + c \ge 0, \\ 0, & ax^2 + bx + c < 0, \end{cases}$,

e) $f(x) = \begin{cases} cx^{\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x < 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$,

f) $f(x) = c\mathrm{e}^{\alpha(x-b)^2}$,

g) $f(x) = \frac{d}{a+bx+cx^2}$.

Příklad 5.28. Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ (Cauchyovo rozdělení). Určete pravděpodobnosti

a) $\mathrm{P}(X \geq 1)$,

b) $\mathrm{P}(|X| \geq 1)$.

Příklad 5.29. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = \frac{1}{3}$. Určete pravděpodobnosti

a) $\mathrm{P}(X > 3)$,

b) $\mathrm{P}(X > 6 | X > 3)$,

c) $\mathrm{P}(X > t + 3 | X > t)$.

Příklad 5.30. Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Určete distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = \mathrm{e}^X$.

Příklad 5.31. Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Určete distribuční funkci $Y = -X$.

Příklad 5.32. Náhodná veličina X se nazývá symetrická, pokud jsou distribuční funkce náhodných veličin X a $-X$ totožné. Zformulujte podmínku symetričnosti náhodných veličin

a) pomocí distribuční funkce,

b) pomocí hustoty.

Příklad 5.33. Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Určete distribuční funkci náhodné veličiny $Y = \mathrm{sign}(X)$.

Příklad 5.34. Náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x)$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny

a) $aX + b$, kde a a b jsou libovolná pevná čísla,

b) X^2,

c) g(X), kde $g(x)$ je monotónní funkce,

d) $|X|$,

e) $\sin(X)$,

f) $\tan(X)$.

Příklad 5.35. Hustota náhodné veličiny X je $f(x)$. Určete hustotu náhodné veličiny

a) $aX + b$, $(a \neq 0)$,

b) $|X|$,

c) X^2,

d) $\sin(X)$,

e) $g(X)$, kde $g(x)$ je monotónní diferencovatelná funkce,

f) $g(X)$, kde $g(x)$ je po částech monotónní diferencovatelná funkce.

Příklad 5.36. Nechť náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na $[-1, 1]$. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = |X|$.

Příklad 5.37. Nechť náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Určete hustotu náhodné veličiny a) $Y = X^2$, b) $Y = \frac{1}{X}$, c) $Y = \mathrm{e}^X$. Nakreslete jejich grafy.

Příklad 5.38. Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = \arctan(X)$.

Příklad 5.39. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[\,0, 2]$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny $Y = |X - 1|$.

Příklad 5.40. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[\,0, 2]$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny $Y = |X|$.

Příklad 5.41. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem λ. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$.

Příklad 5.42. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-2} \mathrm{e}^{-1/2x^2}, \quad x \neq 0.$$

Určete hustotu náhodné veličiny $Y = 1/X$.

Příklad 5.43. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Určete hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$.

Příklad 5.44. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[\,-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = \sin X$.

Příklad 5.45. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[\,0, 4\pi]$. Určete distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = \sin X$.

Příklad 5.46. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[\,-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = |\sin X|$.

Příklad 5.47. Náhodná veličina X má Cauchyovo rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Určete hustotu náhodné veličiny $Y = 1/X$.

Příklad 5.48. Nechť X je náhodná veličina se spojitou distribuční funkcí $F(x)$ a $Y = F(X)$. Určete distribuční funkci Y.

Příklad 5.49. Nechť $F(x)$ je distribuční funkce, přičemž $F(0) = 0$. Dokažte, že funkce

$$G(x) = \begin{cases} F(x) - F(\frac{1}{x}), & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

je distribuční funkcí.

Kapitola 6

Číselné charakteristiky

Příklad 6.1. Náhodná veličina X má rozdělení

x	10	20	30	40	50	60
p	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,05

a) Vypočtěte střední hodnotu μ, rozptyl σ^2 a směrodatnou odchylku σ.

b) Nakreslete graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$.

c) Označte v grafu hodnotu μ a interval $\mu \pm 2\sigma$. Jaká je pravděpodobnost, že X padne do intervalu $\mu \pm 2\sigma$?

Příklad 6.2. Náhodná veličina X má rozdělení

x	1	2	3	4	5
p	0,05	0,3	0,35	0,2	0,1

a) Vypočtěte střední hodnotu μ, rozptyl σ^2 a směrodatnou odchylku σ.

b) Nakreslete graf $p(x)$.

c) Označte v grafu hodnotu μ a interval $\mu \pm \sigma$. Jaká je pravděpodobnost, že X padne do intervalu $\mu \pm \sigma$?

d) Označte v grafu hodnotu μ a interval $\mu \pm 3\sigma$. Jaká je pravděpodobnost, že X padne do tohoto intervalu?

Příklad 6.3. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,02	0,07	0,1	0,15	0,3	0,18	0,1	0,06	0,02

a) Vypočtěte střední hodnotu μ, rozptyl σ^2 a směrodatnou odchylku σ.

b) Nakreslete graf $p(x)$. Označte v grafu hodnotu μ, $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$.

c) Jaká je pravděpodobnost, že X padne do intervalu $\mu \pm 2\sigma$?

Příklad 6.4. Ve velkém městě byl proveden průzkum veřejného mínění u 20-ti voličů. Účelem je zjistit pozorování náhodné veličiny X, která je rovna počtu hlasů ve prospěch určitého kandidáta na starostu. Předpokládejme, že ve skutečnosti nám neznámých 60% voličů ve městě upřednostňuje tohoto kandidáta.

a) Vypočtěte střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X.

b) Určete pravděpodobnost $\mathrm{P}\left(X \leq 10\right)$.

c) Určete pravděpodobnost $\mathrm{P}\left(X > 12\right)$.

d) Určete pravděpodobnost $\mathrm{P}\left(X = 11\right)$.

e) Nakreslete pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny X a označte v něm hodnoty μ, $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$.

Příklad 6.5. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} 2^x \mathrm{e}^{-2}/x!, & x = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Je X diskrétní nebo spojitá náhodná veličina?

b) Jak se nazývá toto rozdělení?

c) Nakreslete pravděpodobnostní funkci.

d) Určete střední hodnotu a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X.

Příklad 6.6. Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem 2.

a) Nakreslete pravděpodobnostní funkci pro $x = 0, 1, \dots, 9$.

b) Určete střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X a zakreslete interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ do grafu.

c) Jaká je pravděpodobnost, že X leží v intervalu $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$?

Příklad 6.7. Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou 1,5. Vypočtěte pravděpodobnost a) $\mathrm{P}\left(X \leq 2\right)$, b) $\mathrm{P}\left(X \geq 2\right)$, c) $\mathrm{P}\left(X = 2\right)$, d) $\mathrm{P}\left(X = 0\right)$, e) $\mathrm{P}\left(X > 0\right)$, f) $\mathrm{P}\left(X > 5\right)$.

Příklad 6.8. Náhodná veličina X má binomické rozdělení s parametry $n = 20$ a $p = 0,7$. a) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(X = 14)$. b) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(X \leq 10)$. c) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(X > 10)$. d) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(8 \leq X \leq 17)$. e) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(8 < X < 17)$. f) Vypočtěte střední hodnotu μ, rozptyl σ^2 a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X. g) Jaká je pravděpodobnost, že X padne do intervalu $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$?

Příklad 6.9. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení s parametry $a = 20$, $b = 45$.

a) Určete hustotu $f(x)$.

b) Vypočtěte střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X.

c) Nakreslete graf hustoty $f(x)$, vyznačte hodnotu μ spolu s intervalem $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$. Všimněte si, že náhodná veličina X leží v intervalu $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ s pravděpodobností 1.

Vypočtěte:

d) $\mathrm{P}\,(20 \leq X \leq 35)$, e) $\mathrm{P}\,(20 < X < 35)$,

f) $\mathrm{P}\,(X \geq 35)$, g) $\mathrm{P}\,(X \leq 20)$,

h) $\mathrm{P}\,(X \leq 25)$, i) $\mathrm{P}\,(10 \leq X \leq 40)$,

j) $\mathrm{P}\,(X \geq 36)$, k) $\mathrm{P}\,(X \geq 35,5)$,

l) $\mathrm{P}\,(20,2 \leq X \leq 35,5)$, m) $\mathrm{P}\,(X < 20,5)$.

Příklad 6.10. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení s parametry $a = 2$, $b = 4$.

a) Určete hustotu $f(x)$.

b) Vypočtěte střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X.

Vypočtěte:

c) $\mathrm{P}\,(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$, d) $\mathrm{P}\,(X > 2,78)$,

e) $\mathrm{P}\,(2,4 \leq X \leq 3,7)$, f) $\mathrm{P}\,(X < 2)$.

Příklad 6.11. Náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry $\mu = 45$, $\sigma = 10$. Určete:

a) $\mathrm{P}\,(X \leq 50)$, b) $\mathrm{P}\,(X \leq 35,6)$, c) $\mathrm{P}\,(40,7 \leq X \leq 65,8)$,

d) $\mathrm{P}\,(22,9 \leq X \leq 33,2)$, e) $\mathrm{P}\,(X \geq 25,3)$, f) $\mathrm{P}\,(X \leq 25,3)$.

Příklad 6.12. Náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry $\mu = 30$, $\sigma = 8$. Určete konstantu x_0 tak, aby

a) $\mathrm{P}\,(X \geq x_0) = 0,5$, b) $\mathrm{P}\,(X < x_0) = 0,025$,

c) $\mathrm{P}\,(X > x_0) = 0,1$, d) $\mathrm{P}\,(X > x_0) = 0,95$,

e) 10% hodnot X bylo menších než x_0,

f) 80% hodnot X bylo menších než x_0,

g) 1% hodnot X bylo větších než x_0.

Příklad 6.13. Náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 8. Načrtněte graf hustoty náhodné veličiny X. Do grafu zakreslete hodnotu μ a interval $\mu \pm 2\sigma$. Určete pravděpodobnost

a) $\mathrm{P}\left(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\right)$, b) $\mathrm{P}\left(X \geq \mu + 2\sigma\right)$,

c) $\mathrm{P}\left(X \leq 92\right)$, d) $\mathrm{P}\left(92 \leq X \leq 116\right)$,

e) $\mathrm{P}\left(92 \leq X \leq 96\right)$, f) $\mathrm{P}\left(76 \leq X \leq 124\right)$.

Příklad 6.14. Náhodná veličina X má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 25. Víme, že pravděpodobnost, že X bude větší než 150 je 0,9. Určete střední hodnotu μ náhodné veličiny X.

Příklad 6.15. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny, která má rozdělení

a) alternativní A(θ), b) binomické Bi(n, θ),

c) Poissonovo Po(λ), d) geometrické G(θ),

e) záporně binomické Zb(n, θ), f) rovnoměrné R(α, β),

g) exponenciální Ex(λ), h) normální N(μ, σ^2),

i) Pearsonovo $\chi^2(\nu)$, j) Studentovo t(ν),

k) Fisher-Snedecorovo F(ν_1, ν_2).

Příklad 6.16. Městská rada se skládá ze čtyř liberálů a čtyř konzervativců. Tři členové rady jsou náhodně vybráni do komise. Nechť X udává počet vybraných liberálů. Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X a spočtěte střední hodnotu.

Příklad 6.17. Náhodně bez opakování zvolíme tři čísla z $1, 2, \ldots, 9$. Nechť X udává největší z těchto tří čísel. Určete střední hodnotu $\mathrm{E}(X)$.

Příklad 6.18. Předpokládejme, že v určité populaci má náhodná veličina X udávající počet telefonů v jedné domácnosti pravděpodobnostní funkci p zadanou následující tabulkou.

x	1	2	3	4	5
p	0,35	0,45	0,15	0,04	0,01

Určete střední hodnotu a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X.

Příklad 6.19. Nechť X a Y mají simultánní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí zavedenou v následující tabulce.

$x \backslash y$	1	2	3	
1	0	0	1/2	1/2
2	0	1/3	0	1/3
3	1/6	0	0	1/6
	1/6	1/3	1/2	1

Určete kovarianci $\mathrm{C}(X, Y)$ a korelační koeficient ρ. Rozhodněte, zda X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

Příklad 6.20. Hodnoty pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X a Y jsou zapsány v následující tabulce.

x	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	0,6	0,3	0,1	0	0
$p_Y(x)$	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2

Vypočtěte $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$, $\mathrm{D}X$ a $\mathrm{D}Y$

Příklad 6.21. Nechť $\mathrm{E}(X^2) = 65$ a $\mathrm{E}(X) = 7$. Určete směrodatnou odchylku náhodné veličiny X.

Příklad 6.22. Nechť $\mathrm{E}(X) = 3$ a $\mathrm{E}[X(X-1)] = 6$. Určete rozptyl $\mathrm{D}(X)$.

Příklad 6.23. Jedenkrát hodíme osmi kostkami. Vypočtěte střední hodnotu a směrodatnou odchylku součtu ok padlých na všech osmi kostkách.

Příklad 6.24. Osoba má čtyři podobné klíče, z nichž pouze jedním může otevřít dveře své kanceláře. Náhodně, bez opakování zkouší tyto klíče. Nechť náhodná veličina X udává počet klíčů, které osoba musela vyzkoušet, než odemkla svou kancelář (včetně klíče, kterým kancelář odemkla).

a) Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

b) Vypočtěte střední hodnou a směrodatnou odchylku X.

c) Stanovte pravděpodobnostní funkci X za předpokladu, že osoba vybírá klíče náhodně, s opakováním.

Příklad 6.25. V osudí jsou 3 bílé a 6 černých koulí. Naráz náhodně vybereme čtyři koule. Nechť X udává počet takto vytažených bílých koulí. Vypočtěte střední hodnou a rozptyl náhodné veličiny X.

Příklad 6.26. Nechť X a Y mají simultánní rozdělení definované následující tabulkou hodnot pravděpodobnostní funkce.

x \ y	0	1	2
1	0,2	0,1	0,3
2	0	0,2	0,2

Vypočtěte kovarianci $\mathrm{C}(X,Y)$ a rozptyl $\mathrm{D}(X+Y)$. Rozhodněte, zda X a Y jsou nezávislé.

Příklad 6.27. Nechť $\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(Y) = \mathrm{C}(X,Y) = 1$. Vypočtěte

a) $\mathrm{D}(3-X)$, b) $\mathrm{C}(X,X)$,

c) $\mathrm{D}(2X+4)$, d) $\mathrm{C}(X,X+Y)$,

e) $\mathrm{D}(X-Y)$, f) $\mathrm{D}(4X+Y-7)$,

Příklad 6.28. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. Vypočtěte

a) $\mathrm{D}(2X+Y)$, b) $\mathrm{C}(2X+Y, X-Y)$,

c) $\rho_{X,Y}$, d) $\rho_{U,V}$, kde $U = 2X+Y$, $V = X-Y$.

Příklad 6.29. Nechť náhodné veličiny X a Y mají simultánní pravděpodobnostní funkci

a) $p(x,y) = \frac{1}{3},\ (x,y) \in \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$, jinak je $p(x,y) = 0$.

b) $p(x,y) = \frac{1}{3},\ (x,y) \in \{(0,2),(1,1),(2,0)\}$, jinak je $p(x,y) = 0$.

c) $p(x,y) = \frac{1}{3},\ (x,y) \in \{(0,0),(1,1),(2,0)\}$, jinak je $p(x,y) = 0$.

Vypočtěte korelační koeficient X a Y. Dále ověřte, zda X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

Příklad 6.30. Simultánní pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X a Y je zadána následující tabulkou.

(x,y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
$p(x,y)$	2/15	4/15	3/15	1/15	1/15	4/15

Jinak je funkce $p(x,y) = 0$. Nalezněte korelační koeficient ρ. Ověřte, zda X a Y jsou nezávislé.

Příklad 6.31. Nechť korelační koeficient ρ náhodných veličin X a Y existuje. Ukažte, že $-1 \leq \rho \leq 1$. [Vezměte v úvahu diskriminant nezáporné kvadratické funkce $g(v) = \mathrm{E}\{[(X-\mu_1)+v(Y-\mu_2)]^2\}$, kde reálné číslo v není funkcí X ani Y.]

Příklad 6.32. Nechť X_1, X_2 a X jsou nezávislé náhodné veličiny, pro které platí $\mathrm{E}X_1 = 1$, $\mathrm{E}X_2 = 2$, $\mathrm{E}X = 3$, $\mathrm{D}X_1 = 4$, $\mathrm{D}X_2 = 5$, $\mathrm{D}X = 6$. Položme $Y = X_1 + X$, $Z = X_2 - X$. Vypočtěte korelační koeficient $\rho_{Y,Z}$, parciální korelační koeficient $\rho_{Y,Z.X}$ a koeficient mnohonásobné korelace $\rho_{X,(Y,Z)}$.

Příklad 6.33. Nechť pro náhodné veličiny Y a Z platí $P(Y = 0, Z = 0) = 0,1; P(Y = 0, Z = 1) = 0,2; P(Y = 1, Z = 0) = 0,3; P(Y = 1, Z = 1) = 0,4$. Vypočtěte korelační koeficient $\rho_{Y,Z}$.

Příklad 6.34. Nechť náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in (0,\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2},1) \cup (\frac{1}{2},1) \times (0,\frac{1}{2}), \\ 2, & (x,y) \in (\frac{1}{2},1) \times (\frac{1}{2},1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočtěte korelační koeficient $\rho_{X,Y}$. (Doplňující úloha: takto zadanou hustotu načrtněte a ověřte, zda skutečně má vlastnosti, které má hustota mít. Ověřte tyto vlastnosti i u spočtených marginálních hustot.)

Příklad 6.35. Nechť X_1, X_2 a X_3 jsou náhodné veličiny s konečnými druhými momenty a s kladnými rozptyly. Označme ρ_{ij} korelační koeficient mezi X_i a X_j, (i,j=1,2,3). Dokažte, že platí

$$\rho_{12}\rho_{13} - [(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2)]^{1/2} \leq \rho_{23} \leq \rho_{12}\rho_{13} + [(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2)]^{1/2}.$$

Příklad 6.36. Nechť náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočtěte marginální hustoty veličin X a Y, dále vypočtěte $\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y, \mathrm{D}X, \mathrm{D}Y$ a $\rho_{X,Y}$.

Příklad 6.37. Dokažte, že pro koeficient mnohonásobné korelace platí

$$\boldsymbol{\rho}_{Y,\boldsymbol{X}}^2 = \frac{\det(\mathrm{var}(Y, X_1, \ldots, X_n)')}{\det(\mathrm{var}(X_1, \ldots, X_n)')},$$

za předpokladu, že varianční matice $\mathrm{var}(Y, X_1, \ldots, X_n)'$ je regulární, přičemž $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

Příklad 6.38. Nechť $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ jsou náhodné vektory o rozměrech $m \times 1$ a $n \times 1$, $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou reálné vektory o rozměrech $m \times 1$ a $n \times 1$. Dokažte, že pro kovarianční matici platí

$$\operatorname{cov}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{b}) = \operatorname{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}).$$

Příklad 6.39. Dokažte, že $\operatorname{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}') - (\mathrm{E}\boldsymbol{X})(\mathrm{E}\boldsymbol{Y})'$.

Příklad 6.40. Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor a uvažujme náhodné veličiny $Y_1 = X_1$, $Y_i = X_i - X_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Najděte varianční matici $\operatorname{var}(\boldsymbol{X}) = \operatorname{var}(X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ za předpokladu, že náhodné veličiny Y_i jsou navzájem nezávislé a každá z nich má stejný rozptyl σ^2.

Příklad 6.41. Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor a uvažujme náhodné veličiny $Y_1 = X_1$, $Y_i = X_i - X_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Najděte varianční matici $\operatorname{var}(\boldsymbol{Y}) = \operatorname{var}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)'$ za předpokladu, že náhodné veličiny X_i jsou navzájem nezávislé a každá z nich má stejný rozptyl σ^2.

Příklad 6.42. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny, které mají stejný rozptyl σ^2. Položme $Z_1 = X_1$ a $Z_{i+1} = \rho Z_i + a$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$, kde a a ρ jsou reálná čísla. Najděte varianční matici $\operatorname{var}(\boldsymbol{Z}) = \operatorname{var}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)'$.

Příklad 6.43. Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická matice a $\boldsymbol{X}$ je náhodný vektor. Dokažte, že $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X}) = \operatorname{tr}[\mathbf{A}\mathrm{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')]$, kde $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ značí stopu matice $\mathbf{A}$.

Příklad 6.44. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se stejnými středními hodnotami μ a rozptyly $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, $\overline{X}$ je jejich průměr. Spočtěte $\mathrm{D}(\overline{X})$.

Příklad 6.45. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se stejnými středními hodnotami μ a rozptyly $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Dokažte, že $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/[n(n-1)]$ je nestranným odhadem $\mathrm{D}(\overline{X})$.

Příklad 6.46. Nechť náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mají stejné střední hodnoty μ, stejné rozptyly σ^2 a korelace libovolného páru těchto různých náhodných veličin je rovna konstantě ρ. Najděte $\mathrm{D}(\overline{X})$ a ukažte odtud, že $\frac{-1}{n-1} \le \rho \le 1$.

Příklad 6.47. Nechť $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Položme

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

Dokažte, že S^2 je nestranným odhadem σ^2.

Příklad 6.48. Nechť $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Položme

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

$$Q = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i-1} - X_i)^2.$$

a) Dokažte, že $\mathrm{var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

b) Dokažte, že Q je nestranný odhad parametru σ^2.

Příklad 6.49. Nechť náhodné veličiny X a Y mají stejný rozptyl. Dokažte, že $\mathrm{C}(X+Y, X-Y) = 0$. Najděte protipříklad, kterým ukážete, že z nulovosti této kovariance neplyne nezávislost těchto náhodných veličin.

Příklad 6.50. Nechť každá z náhodných veličin X a Y nabývá pouze hodnot 0 a 1, přičemž $P(X = i, Y = j) = p_{ij}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$. Dokažte, že tyto veličiny jsou nezávislé právě tehdy, když $\mathrm{C}(X, Y) = 0$.

Příklad 6.51. Nechť náhodná veličina X má symetrickou hustotu ($f(-x) = f(x)$) a nulové střední hodnoty. Předpokládejme navíc, že existují její 3. momenty. Dokažte, že $\mathrm{C}(X, X^2) = 0$.

Příklad 6.52. Nechť hustota náhodných veličin X, Y a Z má tvar

$$f(x, y, z) = \tfrac{1}{8}(1 + xyz), \quad -1 \le x, y, z \le 1.$$

Dokažte, že tyto veličiny jsou po dvou nezávislé, ale nejsou vzájemně nezávislé.

Příklad 6.53. Nechť náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mají stejné střední hodnoty μ a jsou stochasticky nezávislé. Položme

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

$$Q_2 = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \cdots + (X_{n-1} - X_n)^2 + (X_n - X_1)^2.$$

Dokažte, že

$$\mathrm{E}\left[\frac{3Q_1 - Q_2}{n(n-3)}\right] = \mathrm{var}(\overline{X}).$$

Příklad 6.54. Nechť $\boldsymbol{X}$ je náhodný vektor o rozměrech 3×1,

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Položme $Z = X_1 - 2X_2 + X_3$. Najděte $\mathrm{D}(Z)$

b) Najděte varianční matici $\mathrm{var}(\boldsymbol{Y}) = \mathrm{var}(Y_1, Y_2)'$, když $Y_1 = X_1 + X_2$ a $Y_2 = X_1 + X_2 + X_3$.

Příklad 6.55. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením $N(0, \sigma^2)$ a $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou symetrické reálné matice o rozměrech $n \times n$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor. Dokažte, že $\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}'\mathrm{B}\boldsymbol{X}) = 2\sigma^4 \mathrm{tr}(\mathbf{AB})$.

Kapitola 7

Náhodné vektory

Příklad 7.1. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na kružnici o rovnici $x^2 + y^2 = 1$.

a) Nalezněte marginální hustoty náhodné veličiny X a náhodné veličiny Y.

b) Vypočtěte $\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y, \mathrm{D}X, \mathrm{D}Y$.

c) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.

Příklad 7.2. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na oblasti:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Nalezněte marginální hustotu náhodné veličiny X.

b) Nalezněte marginální hustotu náhodné veličiny Y.

c) Vypočtěte $\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y$.

d) Vypočtěte $\mathrm{C}(X, Y)$. Přesvědčte se, že náhodné veličiny X a Y jsou nekorelované, ale závislé.

Příklad 7.3. Náhodný vektor $(X, Y, Z)'$ má hustotu $f(x, y, z)$ rovnou konstantě c, když $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Jinak je hustota $(X, Y, Z)'$ rovna 0.

a) Stanovte konstantu c.

b) Nalezněte marginální hustoty náhodných veličin X, Y, Z.

c) Nalezněte marginální hustoty vektorů $(X, Y)'$ a $(X, Z)'$.

d) Vypočtěte $\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y, \mathrm{E}Z, \mathrm{D}X, \mathrm{D}Y, \mathrm{D}Z, \mathrm{C}(X, Y)'$ a $\mathrm{var}(X, Y, Z)'$.

Příklad 7.4. Hustota náhodného vektoru $(X, Y)'$ je tvaru

$$f(x, y) = \begin{cases} [(1 + ax)(1 + ay) - a] \, \mathrm{e}^{-x-y-axy}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $0 < a < 1$. Určete

a) marginální hustoty náhodných veličin X, Y.

b) distribuční funkci $(X,Y)'$.

c) střední hodnoty $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$, rozptyly $\mathrm{D}X$, $\mathrm{D}Y$ a kovarianci $\mathrm{C}(X,Y)$.

Příklad 7.5. Hustota náhodného vektoru $(X,Y)'$ je tvaru

$$f(x,y) = \begin{cases} 24x^2y(1-x), & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Nalezněte marginální hustotu náhodné veličiny X.

b) Nalezněte marginální hustotu náhodné veličiny Y.

c) Dokažte, že jsou X a Y nezávislé.

Příklad 7.6. Nechť $f_X(x)$ a $f_Y(y)$ jsou hustoty, $F_X(x)$ a $F_Y(y)$ příslušné distribuční funkce, $|a| < 1$. Dokažte, že

a) $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\left\{1 + a\left[2F_X(x) - 1\right]\left[2F_Y(y) - 1\right]\right\}$ je hustota náhodné vektoru (X,Y).

b) hustota náhodné veličiny X, resp. Y je rovna $f_X(x)$, resp. $f_Y(x)$

Příklad 7.7. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením N(0,1). Vypočtěte $\mathrm{P}\left(X^2 + Y^2 \leq r^2\right)$.

Příklad 7.8. Hustota náhodného vektoru $(X,Y)'$ je rovna

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy(1-x^2), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dokažte, že jsou X a Y nezávislé.

Příklad 7.9. Hustota náhodného vektoru $(X,Y)'$ je rovna

$$f(x,y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte marginální hustoty náhodných veličin X a Y.

Příklad 7.10. Hustota náhodného vektoru $(X,Y)'$ je rovna

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(y-x)^{q-1}\mathrm{e}^{-y}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte marginální hustoty náhodných veličin X a Y.

Příklad 7.11. Náhodné veličiny X_1 a X_2 jsou nezávislé a $X_i \sim$ Ro(0,1), $i = 1, 2$. Stanovte distribuční funkci náhodné veličiny

$$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}.$$

Příklad 7.12. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a $X_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2$. Vypočtěte hustotu náhodné veličiny $Y = \max(|X_1|, |X_2|)$.

Příklad 7.13. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a $X_i \sim \mathrm{Ro}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $i = 1, 2$. Najděte hustotu náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

Příklad 7.14. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotami

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \qquad f_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x\mathrm{e}^{-x^2/2}, & x > 0. \end{cases}$$

Dokažte, že náhodná veličina XY má normální rozdělení.

Příklad 7.15. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a $X_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2$. Dokažte, že náhodná veličina $Y = X_1/X_2$ má Cauchyovo rozdělení.

Příklad 7.16. Náhodné veličiny X_1 a X_2 jsou nezávislé a stejně rozdělené s hustotou $f_1(x) = f_2(x) = \frac{c}{1+x^4}$. Určete

a) konstantu c.

b) hustotu náhodné veličiny $Y = X_1/X_2$.

Příklad 7.17. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a $X_i \sim \mathrm{Ex}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dokažte, že hustota náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$ je rovna

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 y} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 y}}{\lambda_1 - \lambda_2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Nalezněte hustotu Y pro případ $\lambda_1 = \lambda_2$.

Příklad 7.18. Nechť náhodný vektor (X_1, X_2) má hustotu $f_{(X_1,X_2)}(x, y)$. Vypočtěte hustotu součinu X_1X_2 a hustotu podílu X_1/X_2.

Příklad 7.19. Hustota náhodného vektoru (X_1, X_2) je rovna

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočtěte hustotu náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

Příklad 7.20. Nechť $(X_1, X_2) \sim \mathrm{N}_2(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $Y_1 = X_1 \cos\alpha + X_2 \sin\alpha$, $Y_2 = -X_1 \sin\alpha + X_2 \cos\alpha$, kde α je daná reálná konstanta.

a) Nalezněte hustotu (Y_1, Y_2).

b) Dokažte, že když $\tan^2\alpha = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}$, jsou náhodné veličiny Y_1 a Y_2 nezávislé.

Příklad 7.21. Nechť $(X_1, X_2) \sim \mathrm{N}_2(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. Odvoďte hustotu náhodné veličiny $Y = X_1/X_2$.

Příklad 7.22. Nechť náhodný vektor (X, Y) má dvourozměrné normální rozdělení, přičemž $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y = 0$, $\mathrm{E}X^2 = \mathrm{E}Y^2 = 1$ a $\mathrm{E}XY = \rho$. Dokažte, že

$$\mathrm{E}(\max\{X, Y\}) = \frac{\sqrt{1-\rho}}{\pi}.$$

Kapitola 8

Marginální a podmíněná rozdělení

Příklad 8.1. Nechť náhodné veličiny X_1, X_2 mají simultánní hustotu $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$, 0 jinak. Nalezněte podmíněnou střední hodnotu a podmíněný rozptyl X_2 za podmínky $X_1 = x_1, 0 < x_1 < 1$.

Příklad 8.2. Nechť $f(x_1|x_2) = c_1 x_1/x_2^2, 0 < x_1 < x_2, 0 < x_2 < 1$ a $f(x_1|x_2) = 0$ jinak, resp. $f_2(x_2) = c_2 x_2^4, 0 < x_2 < 1$ a $f(x_2) = 0$ jinak, značí podmíněnou hustotu X_1 za podmínky $X_2 = x_2$, resp. marginální hustotu X_2. Stanovte

a) konstanty c_1 a c_2,

b) simultánní hustotu X_1 a X_2,

c) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4} < X_1 < \frac{1}{2} \middle| X_2 = \frac{5}{8}\right)$,

d) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4} < X_1 < \frac{1}{2}\right)$.

Příklad 8.3. Nechť $f(x_1, x_2) = 21 x_1^2 x_2^2, 0 < x_1 < x_2 < 1$ a $f(x_1, x_2) = 0$ jinak, je simultánní hustota X_1 a X_2. Vypočtěte podmíněnou střední hodnotu a rozptyl X_1 za podmínky $X_2 = x_2, 0 < x_2 < 1$.

Příklad 8.4. Nechť X_1 a X_2 jsou diskrétní náhodné veličiny se simultánní pravděpodobnostní funkcí

$$p(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2)/18, (x_1, x_2) \in \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}.$$

Nalezněte podmíněnou střední hodnotu a podmíněný rozptyl X_2 za podmínky $X_1 = x_1, x_1 \in \{1, 2\}$.

Příklad 8.5. Z balíčku bridžových karet je náhodně bez vracení vytaženo 5 karet. Nechť X_1, X_2 a X_3 označují počet ♠, resp. počet ♡, resp. počet ♢ v takto vytažených 5 kartách.

a) Určete simultánní pravděpodobnostní funkci X_1, X_2 a X_3.

b) Nalezněte marginální pravděpodobnostní funkce X_1, X_2 a X_3.

c) Jaká je simultánní podmíněné rozdělení X_2 a X_3 za podmínky $X_1 = 3$?

Příklad 8.6. Simultánní pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X_1 a X_2 je zadána následující tabulkou.

(x, y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)
$f(x, y)$	1/18	3/18	4/18	3/18	6/18	1/18

Jinak je funkce $f(x, y) = 0$. Nalezněte marginální pravděpodobnostní funkce a obě podmíněné střední hodnoty.

Příklad 8.7. Nechť $f(x)$, resp. $F(x)$, značí hustotu, resp. distribuční funkci, náhodné veličiny X. Podmíněná hustota X za podmínky $X > x_0$, kde x_0 je dané reálné číslo, je definovaná jako $f(x|\ X > x_0) = f(x)/[1 - F(x_0)], x_0 < x$ a 0 jinak. Tato podmíněná hustota je často užívána pro popis času do úmrtí, pokud víme, že jedinec přežil až do času x_0.

a) Ukažte, že $f(x|\ X > x_0)$ je hustota.

b) Nechť $f(x) = \mathrm{e}^{-x}, 0 < x < \infty$) a $f(x) = 0$ jinak. Vypočtěte pravděpodobnost $\mathrm{P}\,(X > 2|\ X > 1)$.

Příklad 8.8. Nechť $f(x, y) = 2,\ 0 < x < y, 0 < y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak, je simultánní hustota náhodných veličin X a Y.

a) Vypočtěte podmíněné střední hodnoty náhodných veličin X a Y

b) Ukažte, že korelační koeficient X a Y je $\rho = 1/2$.

c) Vypočtěte rozptyl podmíněného rozdělení Y za podmínky $X = x$ a rozptyl podmíněného rozdělení X za podmínky $Y = y$.

Příklad 8.9. Předpokládejme, že osoba odchází do práce ráno mezi 8:00 a 8:30 a do své kanceláře se z domu dopraví za 40 až 50 minut. Označme X dobu odchodu a Y dobu cesty. Předpokládejme, že jsou tyto náhodné veličiny nezávislé a mají rovnoměrné rozdělení. Určete pravděpodobnost, že osoba přijde do kanceláře před 9:00.

Kapitola 9

Charakteristická funkce

Příklad 9.1. Nechť náhodná veličina X nabývá hodnot 1 a -1, každé s pravděpodobností 1/2. Určete charakteristickou funkci X.

Příklad 9.2. Dokažte, že funkce $\psi(t) = \cos^2 t$ je charakteristickou funkcí a určete příslušné rozdělení pravděpodobnosti.

Příklad 9.3. Nechť náhodná veličina X nabývá hodnot -1, 0, 1, každou s pravděpodobností 1/3. Určete charakteristickou funkci X.

Příklad 9.4. Vypočtěte charakteristickou funkci rozdělení $\mathrm{Ro}(0,1)$, $\mathrm{Ro}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{N}(0,1)$, $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, $\mathrm{Ex}(\lambda)$, $\chi^2(\nu)$, $\mathrm{A}(\theta)$, $\mathrm{Bi}(n,\theta)$, $\mathrm{Po}(\lambda)$.

Příklad 9.5. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž každá z nich nabývá hodnot 1 a -1 s pravděpodobnostmi 1/2. Vypočtěte charakteristickou funkci náhodné veličiny $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Příklad 9.6. Dokažte, že pro každé přirozené n je $\psi(t) = \cos^n t$ charakteristickou funkcí.

Příklad 9.7. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s charakteristickou funkcí $\psi(t)$. Určete charakteristickou funkci náhodné veličiny $X_1 - X_2$.

Příklad 9.8. Dokažte, že je-li $\psi(t)$ charakteristická funkce, pak $|\psi(t)|^2$ je také charakteristickou funkcí.

Příklad 9.9. Dokažte, že pokud je charakteristická funkce $\psi(t)$ náhodné veličiny X absolutně integrovatelná, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| \mathrm{d}t < \infty,$$

pak náhodná veličina X má hustotu $f(x)$, přičemž

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-itx} \psi(t) \mathrm{d}t.$$

Příklad 9.10. Uveďte příklad závislých náhodných veličin X a Y, pro které je charakteristická funkce součtu $X + Y$ shodná se součinem charakteristických funkcí veličin X a Y.

Kapitola 10

Zákon velkých čísel

Příklad 10.1. Náhodná veličina X má střední hodnotu $\mathrm{E}(X) = 1$ a směrodatnou odchylku $\sigma = 0,2$. Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost, že $0,5 < X < 1,5$.

Příklad 10.2. (Pravidlo „tří σ") Odhadněte pravděpodobnost toho, že odchylka libovolné náhodné veličiny od její střední hodnoty nebude větší než tři směrodatné odchylky této veličiny.

Příklad 10.3. Směrodatná odchylka chyby měření kurzu letadla je $\sigma = 2^\circ$. Předpokládejme, že střední hodnota chyby měření je rovna nule. Odhadněte pravděpodobnost toho, že chyba při daném měření kurzu letadla bude větší než 56°.

Příklad 10.4. Pomocí Čebyševovy nerovnosti určete pravděpodobnost, že relativní četnost padnutí líce při stech hodech mincí se liší od pravděpodobnosti padnutí líce nejvýše o 0,1. Výsledek porovnejte s pravděpodobností získanou využitím Moivre-Laplaceovy věty.

Příklad 10.5. Pravděpodobnost jevu A v každém pokuse z n nezávislých pokusů je $p = 1/3$.

a) Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost, že odchylka relativní četnosti jevu A od jeho pravděpodobnosti je v případě, že bylo provedeno $n = 9000$ pokusů, v absolutní hodnotě nejvýše 0,01. Získaný odhad porovnejte s výsledkem vypočteným pomocí Moivre-Laplaceovy věty.

b) Řešte úlohu a) pro $n = 75000$ pokusů.

c) Pomocí Čebyševovy nerovnosti stanovte nejmenší počet pokusů, při kterém bude s pravděpodobností alespoň 0,99 odchylka relativní četnosti jevu A od jeho pravděpodobnosti p nejvýše 0,01.

d) Úlohu c) řešte pomocí Moivre-Laplaceovy věty.

e) Pomocí Čebyševovy nerovnosti stanovte maximální absolutní hodnotu odchylky relativní četnosti jevu A od jeho pravděpodobnosti, kterou je možné očekávat s pravděpodobností alespoň 0,99, když bylo provedeno 12100 pokusů.

f) Úlohu e) řešte pomocí Moivre-Laplaceovy věty.

Příklad 10.6. Rozptyl každé z 2500 nezávislých náhodných veličin je nejvýše 5. Odhadněte pravděpodobnost, že odchylka aritmetického průměru těchto náhodných veličin od aritmetického průměru jejich středních hodnot nebude větší než 0,4.

Příklad 10.7. Technická kontrola prověřuje soubor přístrojů. S pravděpodobností 0,01 může mít každý přístroj vadu A a nezávisle na tom s pravděpodobností 0,02 může mít vadu B. V jaký mezích bude prakticky jistě stanoven počet vadných výrobků v souboru o tisíci kusech, pokud za dostatečnou pravděpodobnost bereme 0,997?

Příklad 10.8. Dokažte následující zobecnění Čebyševovy nerovnosti.

a) Diskrétní náhodná veličina X nabývá nezáporných hodnot. Potom pro libovolná kladná čísla a a α platí nerovnost

$$\mathrm{P}\left(X \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}(X^{\alpha})}{a^{\alpha}}, \text{ pokud } \mathrm{E}(X^{\alpha}) \text{ existuje.}$$

b) Rozšiřte předchozí zobecnění na libovolné spojité nezáporné náhodné veličiny.

Příklad 10.9. Dokažte, že pokud je $f(x)$ nezáporná funkce nabývající při $x \geq a$ hodnot alespoň $b \geq 0$ a pokud existuje $\mathrm{E}(f(X))$, pak

$$\mathrm{P}\left(X \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}(f(X))}{b}.$$

Příklad 10.10. Dokažte, že pokud existuje $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{aX})$, kde a je konstanta, pak

$$\mathrm{P}\left(X \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{aX})}{\mathrm{e}^{a\varepsilon}}.$$

Příklad 10.11. Dokažte, že pro libovolnou náhodnou veličinu X při libovolném $a > 0$ platí následující odhady shora i zdola pro $\mathrm{P}\left(|X| \geq a\right)$.

a) $\mathrm{P}\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}(f(X))}{f(a)}$, pokud $f(x)$ je nezáporná a pro $a \geq 0$ neklesající funkce.

b) $\mathrm{P}\left(|X| \geq a\right) \geq \frac{\mathrm{E}(f(X))-f(a)}{k}$, pokud $f(x)$ je sudá nezáporná a pro kladné x neklesající ohraničená funkce, $f(x) \leq k$.

c) $\mathrm{P}\left(|X| \geq a\right) \geq \frac{\mathrm{E}(f(X))-f(a)}{f(M)}$, pokud je podmínka ohraničenosti funkce $f(x)$ nahrazena podmínkou ohraničenosti X, $|X| \leq M$.

Kapitola 11

Statistika

Příklad 11.1. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z rozdělení s hustotou $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta},\ 0 < x < \infty,\ 0 < \theta < \infty$, 0 jinak. Ukažte, že $\overline{X}$ je nestranným odhadem θ a má rozptyl θ^2/n.

Příklad 11.2. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z normálního rozdělení $\mathrm{N}(0,\theta)$, $0 < \theta < \infty$. Ukažte, že $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i^2$ je nestranným odhadem θ a má rozptyl $2\theta^2/n$.

Příklad 11.3. Nechť Y_1 a Y_2 jsou nezávislé nestranné odhady θ. Předpokládejme, že rozptyl Y_1 je dvojnásobkem rozptylu Y_2. Stanovte konstanty k_1 a k_2 tak, aby $k_1 Y_1 + k_2 Y_2$ byl nestranným odhadem s nejmenším možným rozptylem.

Příklad 11.4. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z rozdělení s hustotou

a) $f(x;\theta) = \theta^x \mathrm{e}^{-\theta}/x!, x = 1, 2, \dots,\ 0 \le \theta < \infty$, 0 jinak, přičemž $f(0;0) = 1$.
b) $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1,\ 0 < \theta < \infty$, 0 jinak.
c) $f(x;\theta) = (1/\theta)\mathrm{e}^{-x/\theta}, 0 < x < \infty,\ 0 < \theta < \infty$, 0 jinak.
d) $f(x;\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\theta|}, -\infty < \theta < \infty$.
e) $f(x;\theta) = \mathrm{e}^{-(x-\theta)}, \theta \le x < \infty, -\infty < \theta < \infty$, 0 jinak.

Nalezněte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}$ parametru θ.

Příklad 11.5. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = (1/\theta_2)\mathrm{e}^{-(x-\theta_1)/\theta_2}, \theta_1 \le x < \infty,\ -\infty < \theta_1 < \infty, 0 < \theta_2 < \infty,$$

$f(x;\theta_1,\theta_2) = 0$ jinak. Nalezněte maximálně věrohodné odhady parametrů θ_1, θ_2.

Příklad 11.6. Paretovo rozdělení se často užívá pro modelování příjmů a má distribuční funkci $F(x;\theta_1,\theta_2) = 1-(\theta_1/x)^{\theta_2}, \theta_1 \le x$, 0 jinak, kde $0 < \theta_1$ a $0 < \theta_2$. Označuje-li $X_1,\dots,X_n$ náhodný výběr z tohoto rozdělení, nalezněte maximálně věrohodné odhady parametrů θ_1, θ_2.

Příklad 11.7. Nechť Y_n je statistika taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) = \theta$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}(Y_n) = 0$. Dokažte, že Y_n je konzistentní odhad θ.

Příklad 11.8. Pro každé rozdělení z příkladu 11.4 nalezněte metodou momentů odhad parametru θ a ukažte, že je konzistentní.

Příklad 11.9. Nechť pozorování průměru $\overline{X}$ náhodného výběru rozsahu 20 z rozdělení $\mathrm{N}(\mu, 80)$ je 81,2. Stanovte 95%-ní interval spolehlivosti pro μ.

Příklad 11.10. Nechť $\overline{X}$ je aritmetický průměr náhodného výběru rozsahu n z rozdělení $\mathrm{N}(\mu, 9)$. Nalezněte n takové, aby přibližně platilo

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}-1 < \mu < \overline{X}+1\right) = 0,9.$$

Příklad 11.11. Z realizace náhodného výběru rozsahu 17 z rozdělení $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ bylo vypočteno $\overline{x} = 4,7$ a $s^2 = 5,76$. Určete 90%-ní interval spolehlivosti pro μ.

Příklad 11.12. Nechť $X_1,\dots,X_9$ je náhodný výběr rozsahu 9 z rozdělení $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.

a) Je-li σ známé, nalezněte délku 95%-ního intervalu spolehlivosti pro μ založeného na náhodné veličině $\sqrt{9}(\overline{X}-\mu)/\sigma$.

b) Je-li σ neznámé, vypočtěte střední hodnotu délky 95%-ního intervalu spolehlivosti pro μ založeného na náhodné veličině $\sqrt{8}(\overline{X}-\mu)/S$.

c) Porovnejte obě tyto odpovědi. [Rozepište $\mathrm{E}(S) = (\sigma/\sqrt{n})\mathrm{E}(\sqrt{nS^2/\sigma^2})$.]

Příklad 11.13. Nechť $X_1,\dots,X_n,X_{n+1}$ je náhodný výběr rozsahu $n+1, n>1$, z rozdělení $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Nechť $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ a $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$. Určete konstantu c tak, aby měla statistika $c(\overline{X}-X_{n+1})/S$ Studentovo t rozdělení. Pro $n=8$ určete k tak, aby $\mathrm{P}\left(\overline{X}-kS < X_9 < \overline{X}+kS\right) = 0,8$. Pozorovaný interval $(\overline{x}-ks, \overline{x}+ks)$ se často nazývá 80%-ní predikční interval pro X_9.

Příklad 11.14. Nechť $Y \sim \mathrm{Bi}(300,p)$. Je-li $y = 75$ pozorovaní náhodné veličiny Y, stanovte přibližný 90%-ní interval spolehlivosti pro p.

Příklad 11.15. Uvažujme dva nezávislé náhodné výběry rozsahu 10, z rozdělení postupně $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma^2)$ a $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma^2)$. Z jejich realizací bylo vypočteno $\overline{x} = 4,8$, $s_1^2 = 8,64$, $\overline{y} = 5,6$, $s_2^2 = 7,88$. Stanovte 95%-ní interval spolehlivosti pro $\mu_1-\mu_2$.

Příklad 11.16. Nechť Y_1, Y_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a $Y \sim \mathrm{Bi}(100, p_1)$, $Y \sim \mathrm{Bi}(100, p_2)$. Jejich pozorování jsou $y_1 = 50$ a $y_2 = 40$. Stanovte přibližný 90%-ní interval spolehlivosti pro $p_1 - p_2$.

Příklad 11.17. Nechť $\overline{X}$ a $\overline{Y}$ jsou aritmetické průměry dvou nezávislých náhodných výběrů rozsahu n z rozdělení postupně $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ a $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž rozptyl σ^2 je známý. Nalezněte n takové, že

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} - \overline{Y} - \sigma/5 < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X} - \overline{Y} + \sigma/5\right) = 0,9.$$

Příklad 11.18. Nechť 8,6; 7,9; 8,3; 6,4; 8,4; 9,8; 7,2; 7,8; 7,5 je realizace náhodného výběru rozsahu 9 z rozdělení $\mathrm{N}(8, \sigma^2)$. Stanovte 90%-ní interval spolehlivosti pro σ^2.

Příklad 11.19. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Nechť $0 < a < b$. Ukažte, že střední hodnota délky náhodného intervalu

$$\left(\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right)$$

je $(b - a)\frac{n\sigma^2}{ab}$.

Příklad 11.20. Z realizace náhodného výběru rozsahu 15 z rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ bylo vypočteno $\overline{x} = 3,2$ a $s^2 = 4,24$. Stanovte 90%-ní interval spolehlivosti pro σ^2.

Příklad 11.21. Z realizace dvou nezávislých náhodných výběrů rozsahu $n_1 = 16$, resp. $n_2 = 10$, z rozdělení $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, resp. $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, byly vypočteny hodnoty $\overline{x} = 3,6$ a $s_1^2 = 4,14$, $\overline{y} = 13,6$ a $s_2^2 = 7,26$. Stanovte 90%-ní interval spolehlivosti pro σ_2^2/σ_1^2, jsou-li parametry μ_1 a μ_2 neznámé.

Příklad 11.22. Rozeberte problém stanovení intervalu spolehlivosti pro podíl rozptylů σ_2^2/σ_1^2 dvou neznámých rozptylů dvou nezávislých normálních rozdělení, jsou-li parametry μ_1 a μ_2 známé.

Příklad 11.23. Nechť S_1^2, resp. S_2^2, značí výběrový rozptyl výběru rozsahu n, resp. m, z dvou nezávislých normálních rozdělení $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$, resp. $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$. Využijte toho, že

$$(nS_1^2 + mS_2^2)/\sigma^2 \sim \chi^2(n + m - 2),$$

pro nalezení intervalu spolehlivosti pro neznámý rozptyl σ^2.

Příklad 11.24. Nechť $X_1, \ldots, X_{10}$ je náhodný výběr rozsahu 10 z normálního rozdělení $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Nalezněte nejlepší kritický obor rozsahu $\alpha = 0,05$ pro testování H_0: $\sigma^2 = 1$ proti H_1: $\sigma^2 = 2$. Je tento obor i oborem pro testování H_0: $\sigma^2 = 1$ proti H_1: $\sigma^2 = 4$? Proti H_1: $\sigma^2 = \sigma_1^2 > 1$?

Příklad 11.25. Nechť $X_1, \dots, X_{10}$ je náhodný výběr rozsahu 10 z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\theta_1, \theta_2)$. Nalezněte nejlepší test jednoduché hypotézy H_0: $\theta_1 = \theta_1' = 0, \theta_2 = \theta_2' = 1$ proti jednoduché alternativě H_1: $\theta_1 = \theta_1' = 1, \theta_2 = \theta_2' = 4$.

Příklad 11.26. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathrm{N}(\theta, 100)$. Ukažte, že $C = \{(x_1, \dots, x_n) |\, c \le \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\}$ je nejlepší kritický obor pro testování H_0: $\theta = 75$ proti H_1: $\theta = 78$. Stanovte n a c tak, aby přibližně platilo

$$\mathrm{P}\left\{(X_1, \dots, X_n) \in C |\, \mathrm{H}_0\right\} = \mathrm{P}\left\{\overline{X} \ge c |\, \mathrm{H}_0\right\} = 0,05,$$

$$\mathrm{P}\left\{(X_1, \dots, X_n) \in C |\, \mathrm{H}_1\right\} = \mathrm{P}\left\{\overline{X} \ge c |\, \mathrm{H}_1\right\} = 0,9.$$

Příklad 11.27. Uvažujme rozdělení $\mathrm{N}(\theta, 4)$. Jednoduchou hypotézu H_0: $\theta = 0$ zamítáme a alternativu H_1: $\theta > 0$ nezamítáme právě tehdy, když pozorovaná hodnota výběrového průměru $\overline{x}$ výběru rozsahu 25 je větší nebo rovna 3/5. Stanovte silofunkci $\beta(\theta), 0 \le \theta$, tohoto testu.

Příklad 11.28. Uvažujme dvě nezávislá rozdělení $\mathrm{N}(\mu_1, 400)$, $\mathrm{N}(\mu_2, 225)$. Nechť $\theta = \mu_1 - \mu_2$. Nechť $\overline{x}$ a $\overline{y}$ značí pozorované hodnoty výběrových průměrů dvou nezávislých výběrů, rozsahu n z těchto dvou rozdělení. Hypotézu H_0: $\theta = 0$ zamítáme a alternativu H_1: $\theta > 0$ nezamítáme právě tehdy, když $\overline{x} - \overline{y} \ge c$. Je-li $\beta(\theta)$ silofunkce tohoto testu, stanovte n a c tak, aby přibližně platilo $\beta(0) = 0,05$ a $\beta(10) = 0,9$.

Příklad 11.29. Nechť $X_1, \dots, X_{25}$ je náhodný výběr rozsahu 25 z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\theta, 100)$. Nalezněte stejnoměrně nejsilnější kritický obor rozsahu $\alpha = 0,1$ pro testování H_0: $\theta = 75$ proti H_1: $\theta > 75$.

Příklad 11.30. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathrm{N}(\theta, 16)$. Nalezněte rozsah výběru n a stejnoměrně nejsilnější test hypotézy H_0: $\theta = 25$ proti alternativě H_1: $\theta < 25$ se silofunkci $\beta(\theta)$ takovou, že přibližně platí $\beta(25) = 0,1$ a $\beta(23) = 0,9$.

Příklad 11.31. Nechť $X_1, \dots, X_n$ a $Y_1, \dots, Y_n$ jsou náhodné výběry z nezávislých rozdělení $\mathrm{N}(\theta_1, \theta_3)$, resp. $\mathrm{N}(\theta_2, \theta_4)$.

a) Ukažte, že věrohodnostní poměr pro testování H_0: $\theta_1 = \theta_2,\ \theta_3 = \theta_4$ proti všem alternativám je tvaru

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2/n\right]^{n/2} \left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})^2/m\right]^{m/2}}{\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - u)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - u)^2\right] \Big/ (m+n)\right\}^{(n+m)/2}},$$

kde $u = (n\overline{x} + m\overline{y})/(n+m)$.

b) Ukažte, že test poměrem věrohodnosti pro testování H$_0$: $\theta_3 = \theta_4$, bez podmínky pro θ_1 a θ_2, proti H$_1$: $\theta_3 \neq \theta_4$, bez podmínky pro θ_1 a θ_2, může být založen na náhodné veličině

$$F = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/(n-1)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2/(m-1)}.$$

Příklad 11.32. V osudí se nachází velký počet černých a bílých kuliček, které jsou hmatem nerozlišitelné. Předpokládáme, že počet černých a bílých kuliček je stejný. Tuto hypotézu přijmeme, jestliže při vytáhnutí 80 kuliček mezi nimi bude 30–40 černých kuliček. Jaká je pravděpodobnost chyby 1. druhu?

Příklad 11.33. K ověření neutrální reakce vody bylo odebráno 9 vzorků. Na Phmetru byly zjištěny hodnoty 7,2 7,09 6,92 7,18 6,79 6,98 6,86 7,18 7,16. Kolísání zjištěných hodnot můžeme vysvětlit jednak nehomogenitou vody, z níž bereme vzorky (jiných 9 vzorků by nejspíš dalo jiných 9 hodnot) a také nepřesností přístroje. Základní soubor představuje všechny možné vzorky vyšetřovaného vodního zdroje kombinované se všemi možnými náhodnými chybami měření.

Testujte hypotézu, že střední hodnota měřené veličiny je rovna hodnotě $\mu_0 = 7$ (reakce je skutečně neutrální a přístroj nemá systematickou chybu) proti oboustranné alternativě.

Příklad 11.34. U 12 pacientů byl zjištěn krevní tlak vždy před podáním (Y) a dvě hodiny po podání (Z) farmaka. Zajímá nás, zda léčivo skutečně způsobuje snížení krevního tlaku. O veličině $X = Y - Z$ můžeme předpokládat, že má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Získané výsledky pokusu jsou uvedeny dále. Užijte hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ a testujte hypotézu H_0: $\mu \leq 0$ proti alternativě H_1: $\mu > 0$.

Y	125	126	138	117	143	128	146	133	127	135	126	131
Z	120	124	130	118	140	128	140	135	126	130	126	127
X	5	2	8	-1	3	0	6	-2	1	5	0	4

Příklad 11.35. Sestrojte 95% oboustranný interval spolehlivosti pro rozptyl normálně rozdělené náhodné veličiny na základě údajů z náhodného výběru 42, 48, 60, 43, 36, 50, 52, 38, 56, 45.

Příklad 11.36. Náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ spojitých náhodných veličin X_1, X_2, X_3 má simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{2}{27}x_3(x_1 + x_2) & 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 2,\ 0 < x_3 < 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete kovarianční matici $\operatorname{cov}(\boldsymbol{X})$.

Příklad 11.37. Velkoobchod dostává balíčky sušenek, o jejichž hmotnosti můžeme předpokládat, že má normální rozdělení s neznámou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou $\sigma = 5[g]$. Z velké dodávky, která má být kontrolována, bylo náhodně vybráno 30 balíčků, u nichž byla zjištěna průměrná hmotnost $\overline{X} = 150,4[g]$. Určete, v jakých mezích lze očekávat střední hmotnost balíčku, jestliže požadovaná spolehlivost odhadu je 0,95.

Příklad 11.38. Hmotnost výrobku má normální rozdělení. Přesným měřením byl kontrolován údaj o hmotnosti na obalu výrobku. Výsledky (skutečná váha minus udaná váha v gramech):

a) -2,-4, -3, -6, -5;

b) -2, -4, -3, -6, -20.

Svědčí výsledky o tom, že udaná hmotnost je zkreslena v neprospěch odběratele $(\alpha = 0,05)$? Vysvětlete případný rozdíl mezi výsledky obou variant příkladu.

Příklad 11.39. 11 stejně starých selat bylo náhodně rozděleno do dvou skupin. Do první skupiny jich připadlo 6 a tato selata byla krmena dietou A, ve druhé skupině jich bylo 5 a byla krmena dietou B. Po šesti měsících byly vypočteny průměrné denní přírůstky v dkg. Byly získány tyto výsledky: Dieta A: 62, 54, 55, 60, 53, 58; dieta B: 52, 56, 49, 50, 51. Je třeba zjistit, zda jsou obě diety stejně efektivní.

Literatura

[1] Anděl, J.: Matematická statistika. SNTL, Praha, 1987.

[2] Berry, D. A., Lindgren, B. W.: Statistics: Theory and Methods. Brooks/Cole Publishing company, Pacific Grove, California, 1990.

[3] Dorogovcev, A. J., Silvestrov, D. S., Skorochod, A. V., Jadrenko, M. I.: Teorija věrojatnostěj. Višča škola, Kijev, 1980.

[4] Feller, V.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume I. Ruský překlad: Izdatelstvo Mir, Moskva, 1967.

[5] Hogg, R. V., Craig, A. T.: Introduction to Mathematical Statistics. Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1978.

[6] Jemeljanov, G. V., Skitovič, V. P.: Zadačnik po teorii věrojatnostěj i matematičeskoj statistike. Izdatelstvo Leningradskovo universitěta, Leningrad, 1967.

[7] McClave, J. T., Dietrich, F. H.: Statistics. Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1991.

[8] Rényi, A.: Teorie pravděpodobnosti. Academia, Praha, 1972.

[9] Seber, G. A. F.: Linear Regression Analysis. Ruský překlad: Izdatelstvo Mir, Moskva, 1980.

[10] Seitz, J.: Úvod do počtu pravděpodobnosti. UK, Praha, 1968.

[11] Svešnikov, A. A.: Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti matematické statistiky a teorie náhodných funkcí. SNTL, Praha, 1971.