7 Exaktní a superlativní indexní čísla

V této poslední kapitole, která se věnuje teoretickým otázkám souvisejícím s problematikou indexních čísel, přiblížíme stručně význam dvou pojmů, které hrají významnou úlohu v rámci moderní teorie indexních čísel. Jeden i druhý rozšiřují tématiku obsaženou v kapitole 5 pojednávající o mikroekonomickém přístupu k teorii indexních čísel a – na rozdíl od kapitol 2-4 – jsou těsně propojena s pojmy uplatňujícími se ve dvou jiných oblastech matematické ekonomie : v teorii spotřebitelské poptávky a v teorii produkce.

Podotkněme v úvodu, že exaktní ani superlativní indexní čísla nepředstavují „další" návrhy možných a účelných tvarů indexních čísel. Význam těchto přívlastků souvisí spíše s určitými vlastnostmi některých dříve uvedených důležitých indexních čísel. Jak ukážeme, některá z nich jsou více, jiná méně vhodná pro vystižení vývoje souhrnné cenové nebo množstevní změny, pokud se spotřebitel (nebo okruh spotřebitelů) ve svém chování přesně řídí (obvyklými) preferenčními zákonitostmi, čímž je míněno to, že jeho (jejich) preferenční uvažování lze přesně popsat konkrétním tvarem užitkové funkce.

7.1 Exaktní indexní čísla

V návaznosti na výklad v kapitole 5, který byl – též z důvodu návaznosti na historický kontext - veden v prostředí teorie spotřebitelské poptávky, se přidržíme tohoto prostředí i v této kapitole. Poznamenejme, že by mohl být srovnatelně dobře veden též v kontextu pojmů teorie produkce[1]. Znamenalo by to pouze zaměnit trojici funkcí : *(přímá) užitková*, *nepřímá užitková* a *výdajová funkce* za ekvivalentní trojici : *(přímá) produkční*, *nepřímá produkční* a *nákladová funkce* .

Definice 7.1 ***Výdajová funkce (expenditure function)*** $E({}^0u, \boldsymbol{p})$, jejímiž argumenty jsou ${}^0u$ – určitá konkrétní úroveň užitku a $\boldsymbol{p}$ cenový vektor je $N+1$ argumentní funkce definovaná vztahem :

$$E({}^0u, \boldsymbol{p}) = Min\,\{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{q};\;\; u(\boldsymbol{q}) \geq {}^0u\} \qquad , \qquad (7.1)$$

kde $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_N)$ je komoditní vektor a $u(\boldsymbol{q})$ je užitková funkce s příslušnými vlastnostmi.

Jak patrno, výdajová funkce reprezentuje minimální hodnotu výdajů vynaložených na nákup komodit, s nimiž lze dosáhnout (při optimálním složení nákupu) hodnotu užitku ${}^0u$.

Tvrzení 7.1 Výdajová funkce $E\left({}^0u, \boldsymbol{p}\right)$ příslušná k užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$ má tyto vlastnosti :

(V1) $E\left({}^0u, \boldsymbol{p}\right)$ je reálná konečná a nezáporná funkce, přičemž $E\left(u^0, \boldsymbol{p}\right) > 0$ pro libovolné ${}^0u$.

(V2) $E\left({}^0u, \boldsymbol{p}\right)$ je rostoucí a spojitá v u pro jakýkoliv cenový vektor $\boldsymbol{p} > 0$.

(V3) $E\left({}^0u, \boldsymbol{p}\right)$ je neklesající v $\boldsymbol{p}$ a rostoucí aspoň v jedné z cen p_i pro libovolnou úroveň užitku ${}^0u$.

(V4) $E\left({}^0u, \boldsymbol{p}\right)$ je lineárně homogenní v p_i pro libovolnou úroveň užitku ${}^0u$.

(V5) $E\left({}^0u, \boldsymbol{p}\right)$ je konkávní v cenách p_i pro libovolnou úroveň užitku ${}^0u$.

[1] Řada soudobých autorů přistupuje k výkladu problematiky teorie produkce a teorii spotřebitelské poptávky v podstatě rovnocenně (s malým důrazem na rozlišování ordinálního vs. kardinálního pojetí prezentace obou těchto oblastí mikroekonomické teorie). Tak se např. pro souhrnné vyjádření užitkové/produkční funkce užívá pojem „agregátorová funkce", podobně se ztotožňují (nehledě na určité odlišné vlastnosti) výdajová a nákladová funkce, resp. nepřímá užitková a nepřímá produkční funkce.

Důkaz tvrzení vynecháváme; bude uveden v připravovaném učebním textu pojednávajícím o teorii užitku.

Poznámka 7.1 Často se setkáváme s takovou výdajovou funkcí, u které je pevně zvolena hladina užitku a která má za argumenty pouze prvky cenového vektoru $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_N)$. Nejčastěji je volba provedena tak, že ${}^0u = 1$. Pak se výdajová funkce nazývá ***jednotková výdajová funkce***. Budeme ji značit $E^*(\boldsymbol{p})$.

Jednotková výdajová funkce si zachovává všechny vlastnosti výdajové funkce (7.1) , které jsou vztaženy k argumentům, jimiž jsou ceny kupovaných komodit $p_1, p_2, ..., p_N$

Definice 7.2 Cenové indexní číslo P_{01}^{EX}, které může být představováno kterýmkoliv z typů uvedených v kapitole 2 nazveme ***exaktní vzhledem k výdajové funkci*** $E({}^0u, \boldsymbol{p})$, jestliže ho můžeme zapsat jako

$$\vec{P}_{01}^{EX} = \frac{E({}^0u, p(1))}{E({}^0u, p(0))} \qquad (7.2)$$

pro nějakou pevnou hladinu užitku ^{0}u .

Jinými slovy, P_{01}^{EX} je exaktní vzhledem k výdajové funkci $E({}^0u, \boldsymbol{p})$, jestliže se P_{01}^{EX} rovná relevantnímu ekonomickému indexnímu číslu za předpokladu, že spotřebitel (okruh spotřebitelů) optimalizuje své chování, je-li toto chování vyjádřeno užitkovou funkcí $u(\boldsymbol{q})$.

Definice 7.3 Kvantové indexní číslo Q_{01}^{EX}, které může být představováno kterýmkoliv z typů uvedených v kapitole 2 nazveme ***exaktní vzhledem k užitkové funkci*** $u(\boldsymbol{q})$, jestliže ho můžeme zapsat jako

$$\vec{Q}_{01}^{EX} = \frac{u(1)}{u(0)} \qquad (7.3)$$

tzn. je definováno jako podíl dvou hodnot (téže) užitkové funkce, z nichž $u(1)$ představuje hodnotu užitkové funkce v běžném a $u(0)$ hodnotu užitkové funkce v základním období.

Pojem exaktní indexní číslo tedy propojuje určitý specifický tvar cenového nebo kvantového indexního čísla s určitým (lineárním ale zpravidla nelineárním) funkčním typem přímé užitkové, nepřímé užitkové nebo výdajové funkce. Přesněji a obšírněji řečeno to znamená, že pokud se chování spotřebitele řídí některou (ze známých a teoreticky prozkoumaných) preferenčních struktur, která je popsána trojicí těchto ekonomických funkčních typů, vede konstrukce cenového/kvantového indexního čísla vytvořená na základě definičních vztahů (7.2) , (7.3) respektujících zákonitosti chování spotřebitele (který minimalizuje své výdaje ve vztahu k cenovým změnám mezi základním a běžným obdobím příslušnými změnami v nákupech komodit) k určitému přesně danému typu indexního čísla.

Všimněme si, že jednou z možností, jak naplnit vyjádření pravé strany výrazu (7.2), je Koňusův cenový index ve vztahu ke spotřebiteli, jehož preferenční chování se řídí užitkovou funkcí $u(\boldsymbol{q})$ při respektování exogenně (trhem) stanovených cen $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ... p_N)$

Pokud se nacházíme v situaci, že bychom měli definováno např. cenové exaktní indexní číslo $\vec{P}_{01}$, aniž bychom byli schopni matematicky přesným způsobem definovat k němu příslušné kvantové $\overleftrightarrow{Q}_{01}$, nabízí se ještě jedna možnost, jak toto kvantové indexní číslo definovat. Použijeme k tomu předpoklad o tom, že by tato dvojice měla splňovat Fisherův test záměny faktorů (F2) a definujeme nepřímo

Definice 7.4 Kvantové exaktní indexní číslo $\overleftrightarrow{Q}_{01}$ definované vztahem

$$\overleftrightarrow{Q}_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1) \Big/ \sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)}{\overleftrightarrow{P}_{01}}$$

(7.4)

nazýváme ***implicitní kvantové exaktní indexní číslo*** příslušné k cenovému exaktnímu indexnímu číslu $\overleftrightarrow{P}_{01}$.[2]

7.2 Příklady exaktních indexních čísel

Pokud za $E({}^0u, p(1))$ vezmeme užitek příslušející základnímu období, pak lze definiční výraz (7.2) – v notaci kapitoly 5 zapsat jako Koňusovo-Laspeyresovo indexní číslo

$$P_{01}^{KL} = \frac{M^*(1,0)}{M(0,0)}$$

(7.5a)

Pokud za $E({}^0u, p(1))$ vezmeme užitek příslušející základnímu období, pak lze definiční výraz (7.2) – v notaci kapitoly 5 zapsat jako Koňusovo-Paascheho indexní číslo

$$P_{01}^{KP} = \frac{M(1,1)}{M^*(0,1)}$$

(7.5b)

V obou situacích se počítá s tím, že racionálně se chovající spotřebitel přizpůsobí své chování změnám cenových poměrů, tj. z $\boldsymbol{p}(0)$ v základním období na $\boldsymbol{p}(1)$ v běžném období v (7.5a) resp. opačně v (7.5b) tím, že poptávku po komoditách orientuje směrem k nejlevnějšímu možnému nákupu při změněných cenách – tím je nákup o velikosti $M^*(1,0)$ v prvém a nákup o velikosti $M^*(0,1)$ ve druhém případě.

Počátky teorie exaktních indexních čísel souvisí s aplikacemi teorie kvadratických aproximací v prostředí indexních čísel. Nejdříve bylo hledáno indexní číslo, které by bylo exaktní vzhledem ke kvadratické užitkové funkci, a to jak v jejím obecném tvaru

$$u(\boldsymbol{q}) = a_0 + \boldsymbol{a}.\boldsymbol{q} + 0{,}5.\boldsymbol{q}.\boldsymbol{A}.\boldsymbol{q}$$

(7.6)

tak v zúžené podobě představované ryze kvadratickou funkcí

---

[2] K označení exaktních indexních čísel používáme symboliku $\overleftrightarrow{P}_{01}, \overleftrightarrow{Q}_{01}$; jinak není žádné ustálené značení obecně přijato.

$$u(\mathbf{q}) = 0{,}5.\mathbf{q}.\mathbf{A}.\mathbf{q} \qquad (7.6a)$$

V případě (7.6) jde o obecnou kvadratickou funkci s konstantou a_0, vektorem $\boldsymbol{a} = \{a_i\}; i = 1,2,...,N$ koeficientů lineární formy a symetrickou maticí $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}; i, j = 1,...,N$ koeficientů kvadratické formy.

T.L.Bennet [1920] byl první, kdo se pokusil definovat vzorec indexního čísla použitelný k vyjádření indexu skutečných životních nákladů[3], pokud přijmeme hypotézu, že příslušná užitková funkce $u(\boldsymbol{q})$ je obecná kvadratická funkce (7.6). A. S. Bowley následně navázal na Bennetův přístup a předložil vlastní aproximaci navržené formule shodnou s původní do druhého řádu včetně. R. Frisch [1936] podrobil Bowleyho formuli kritice a vyvinul alternativní, kterou pojmenoval „dvojitá výdajová metoda“. Později však A.Wald [1939] a B.M.Balk [1981] poukázali na to, že Frischova formule není exaktní ve vztahu k obecné kvadratické užitkové funkci (7.6). Návazně na to Frisch korektně prokázal, že jím uvedený vzorec sice selhává ve vztahu k obecnému tvaru (7.6), ale plně obstojí, pokud jej vztáhneme k ryze kvadratické funkci (7.6a), při kteréžto situaci je roven Fisherovu indexnímu číslu P_{01}^{F}.

Jiný příklad exaktního čísla vzhledem k obecné kvadratické funkci (7.6) podal A.Wald [1939]. Jím nalezený vzorec, který je skutečně exaktní pro obecnou kvadratickou funkci, je však bohužel značně komplikovaný, takže ho neuvádíme. Navíc, aby mohl být prakticky využit, potřebovali bychom informaci o velikostech příjmových pružností všech komodit, tj. znalost $\partial q_i / \partial M, i = 1,2,...,N.$.

Pokud přijmeme vcelku obvyklý předpoklad o homotetické struktuře spotřebitelských preferencí [4], vyplývají z něj restrikce na nulové hodnoty konstanty a lineárních členů v (7.6), tj. $\alpha_0 = 0$ a $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, tj. máme co činit s tvarem (7.6a). Při těchto omezeních jsou však všechny příjmové pružnosti poptávek spotřebitele rovny 1, což je z ekonomického hlediska těžko udržitelný předpoklad.

V tomto případě Waldem odvozený výraz pro indexní číslo přechází ve Fisherovo indexní číslo, které je exaktní pro ryze kvadratickou funkci (7.6a), což by mj.. podpořilo výsledek, ke kterému došel dříve Frisch. Zajímavé je, že výsledky, kterých dosáhli Frisch a Wald ve vztahu k exaktním indexním číslům, získali o desetiletí dříve Koňus s Bjušgensem [1926]. Jejich fundamentální příspěvek však zůstal dost dlouho neznám anglosaským (ruštinu neznajícím) ekonomům. Přístup obou autorů, jehož základní výsledky byly uvedeny již v kapitole 5, vycházel však nikoliv z výdajové, ale z nepřímé užitkové funkce

Definice 7.5 Nepřímá užitková funkce příslušná k užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$ má tyto vlastnosti : Máme dánu výdajovou funkci $M = E(u, \boldsymbol{p})$ s cenovým vektorem $\boldsymbol{p}$, hodnotou užitku u a současně tím určenu konkrétní velikost výdajů M. Potom funkci

$$\psi(M, \mathbf{p}) = Max\left[\, u(\mathbf{q});\ \mathbf{p}.\mathbf{q} = M \right] \qquad (7.7)$$

[3] Bennet, T.L. : The Theory of Measurement of Changes in Cost of Living. Journal of R.S.S 83, 455-462

[4] Znamená to předpokládat, že užitková funkce je spojitou rostoucí transformací výchozí užitkové funkce, která je sama lineárně homogenní, tzn. platí pro ni u(λq) = λ. u(q) pro libovolné λ > 0 .

nazveme **nepřímá užitková funkce** (***indirect utility function***) ve vztahu k výdajové funkci $E\left({}^{0}u, \boldsymbol{p}\right)$. Argumenty této funkce je tedy cenový vektor $\boldsymbol{p}$ a velikost nanejvýš přípustných výdajů, resp. příjmu M spotřebitele použitelných na nákup komodit v množstvích $\boldsymbol{q}$.

Tvrzení 7.2 Nepřímá užitková funkce $\psi(M, \boldsymbol{p})$ příslušná k výdajové funkci $E\left({}^{0}u, \boldsymbol{p}\right)$ s vlastnostmi (V1) - (V5) je charakterizována těmito vlastnostmi :

(W1) $\psi(M, \boldsymbol{p})$ je reálná konečná a nezáporná funkce, přičemž $\psi(\boldsymbol{p}, 0) = 0$.
(W2) $\psi(M, \boldsymbol{p})$ je rostoucí a spojitá v M pro jakýkoliv cenový vektor $\boldsymbol{p} > 0$.
(W3) $\psi(M, \boldsymbol{p})$ je nerostoucí v $\boldsymbol{p}$ (pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů M) .
(W4) $\psi(M, \boldsymbol{p})$ je homogenní funkce stupně 0 současně v cenách $\boldsymbol{p}$ a výdajích M .
(W5) $\psi(M, \boldsymbol{p})$ je konkávní funkce v p_i pro jakoukoliv úroveň výdajů M .

Důležitou třídu mezi (přímými) užitkovými funkcemi $u(\mathbf{q})$ hrají funkce, které jsou lineárně homogenní. V takovémto případě totiž platí, že nepřímá užitková funkce $\Psi(M, \mathbf{p})$ může být vyjádřena podílem

$$\Psi(M, \mathbf{p}) = \frac{M}{E^*(\mathbf{p})} \qquad , \qquad (7.8)$$

kde M je příjem/výdaj spotřebitele a $E^*(\mathbf{p})$ je příslušná jednotková výdajová funkce.

Koňus s Bjušgensem uvažovali tři případy lineárně homogenních užitkových funkcí resp. homotetických funkcí , kde příslušná preferenční struktura byla definována pomocí nepřímé užitkové funkce nebo výdajové funkce. Jejich závěry uvádíme ve formě tří následujících tvrzení :

Tvrzení 7.3 Laspeyresův cenový index (2.13) a Paascheho cenový index (2.14) jsou exaktní vzhledem k lineární jednotkové výdajové funkci tvaru

$$E^*(p_1, p_2, ..., p_N) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i \qquad (7.9)$$

pokud přijmeme omezení $\beta_i > 0$ pro $i = 1, 2, ..., N.$ nutná mj. pro zajištění kladné velikosti výdajů, resp.

vzhledem k Leontiefově užitkové funkci tvaru

$$u(q_1, q_2, ..., q_N) = Min\left[\frac{q_1}{\beta_1}; \frac{q_2}{\beta_2}; ......, \frac{q_N}{\beta_N}\right], \qquad , \qquad (7.10)$$

která je s touto funkcí konformní [5].

Tvrzení 7.4 Cenové indexní číslo tvaru obecného váženého geometrického průměru (2.2) je exaktní vzhledem ke Cobb-Douglasově jednotkové výdajové funkci tvaru

[5] Konformitou zde rozumíme to, že k (přímé) užitkové funkci tvaru (7.10) přísluší dle kritéria (7.1) právě lineární jednotková výdajová funkce (7.9) .

$$E^*(p_1, p_2, ..., p_N) = \beta_0 . \prod_{i=1}^{N} p_i^{\beta_i} \quad , \qquad (7.11)$$

pokud platí $\beta_0 > 0$ a jsou-li parametry Cobb-Douglasovy funkce představovány výdajovými účastmi příslušné komodity, tj. jestliže

$$\beta_i = \frac{p_i(t) q_i(t)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(t) q_j(t)} \quad \text{pro libovolné období } t \quad \left(\text{a platí tedy } \sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1 \right)$$

.

Důkazy obou předchozích tvrzení lze nalézt v práci Koňus-Bjušgens [1926] .
Další okruh indexních čísel je exaktních ve vztahu ke komplikovanějším funkčním tvarům, jež oplývají větším počtem parametrů – maximálně až počtem $(N+1)(N+2)/2$ parametrů při N komoditách - které na jedné straně umožňují velmi pružně vystihnout chování libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné užitkové nebo výdajové funkce, na druhé straně však (díky velkému počtu parametrů) znesnadňují provedení ekonometrické analýzy (tj. odhad těchto parametrů z dostupných statistických dat). Tyto funkční tvary, které se objevily počátkem 70.let 20.století, obdržely pojmenování „flexibilní“.

Tvrzení 7.5 Fisherovo indexní číslo (2.17) je exaktní vzhledem k (lineárně homogenní) odmocnině užitkové kvadratické funkce tvaru

$$u(q_1, q_2, ..., q_N) = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} q_i q_j \right)^{1/2} , \qquad (7.12)$$

kde $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ je symetrická matice konstant. Takže za předpokladu, že spotřebitel maximalizuje svůj užitek, můžeme spočíst $Q_{01}^F = \dfrac{u(\mathbf{q}(1))}{u(\mathbf{q}(0))}$ a $P_{01}^F = \dfrac{E^*(\boldsymbol{p}(1))}{E^*(\boldsymbol{p}(0))}$, kde $u(\boldsymbol{q}(.))$ je definováno (7.12) a $E^*(\boldsymbol{p}(.))$ je jednotková výdajová funkce odpovídající této užitkové funkci.

Je důležité zmínit, že i když užitková funkce tvaru (7.12) se symetrickou maticí $\boldsymbol{A}$ závisí obecně na $N.(N+1)/2$ parametrech, není nutné tyto parametry znát, abychom mohli Q_{01}^F a P_{01}^F určit. Důkaz lze opět nalézt v práci Koňus-Bjušgens [1926] .

Tvrzení 7.6 Törnqistovo cenové indexní číslo (2.18) je exaktní vzhledem k TRANSLOG - jednotkové výdajové funkci [6], která má tvar

$$\ln E^*(p_1, p_2, ..., p_N) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i . \ln p_i + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{jk} . \ln p_j . \ln p_k \ , \qquad (7.13)$$

jestliže tato splňuje podmínky:

---

[6] Funkční tvar transcendentní logaritmické funkce (zkráceně TRANSLOG) poprvé použili v kontextu užitkové funkce autoři Christensen R.L., Jörgenson D.W. a Lau L. v práci Transcendental Logarithmic Utility Functions uveřejněném v American Economic Review, Vol 65/1975 a titíž autoři o něco dříve v kontextu produkční funkce v článku Transcendental Logarithmic Production Frontiers publikovaném v Review of Economics and Statistics. Vol 55/1973 .

a) jedničkovým součtem normovaných koeficientů u lineárních členů : $\sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1$

b) symetrie koeficientů u matice definující kvadratickou funkci : $\beta_{jk} = \beta_{kj} \quad ; j,k = 1,2,\ldots,N$

c) nulových řádkových součtů matice definující kvadratickou formu $\sum_{k=1}^{N} \beta_{jk} = 0 \,, j = 1,2,..,N$ [7]

Zde opět můžeme spočíst hodnoty $P_{01}^{\ T}$ a $Q_{01}^{\ T}$ neboli podíly $\dfrac{u(\mathbf{q}(1))}{u(\mathbf{q}(0))}$ a $\dfrac{E^*(\boldsymbol{p}(1))}{E^*(\boldsymbol{p}(0))}$ aniž bychom znali parametry TRANSLOG užitkové funkce . Důkaz lze nalézt v práci Diewert [1976].

Tvrzení 7.7 Walshovo indexní číslo (2.16) je exaktní vzhledem k zobecněné Leontiefově užitkové funkci tvaru

$$u(q_1, q_2, \ldots, q_N) = \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_{jk} \sqrt{q_j}\sqrt{q_k} \right), \tag{7.14}$$

pokud parametry této užitkové funkce splňují podmínky nezápornosti $c_{jk} \geq 0$ a podmínky symetrie $c_{jk} = c_{kj}$ pro $j,k = 1,2,\ldots,N$

V tomto případě má příslušné kvantové indexní číslo tvar

$$Q_{01}^{\ W} = \left[\sum_{i=1}^{N} s_i(0).\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right)^{1/2} \right] \left[\sum_{i=1}^{N} s_i(1).\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right)^{-1/2} \right]^{-1},$$

kde $s_i(0), s_i(1)$ jsou výdajové účasti i-té komodity definované jako

$$s_i(0) = \frac{p_i(0)q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)q_j(0)} \qquad s_i(1) = \frac{p_i(1)q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)q_j(1)} ,$$

Toto tvrzení je speciálním případem obecnější věty

Tvrzení 7.8 Kvantové indexní číslo definované

$$\widetilde{Q}_{01}^{\ EX} = \left[\sum_{i=1}^{N} s_i(0).\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right)^{r/2} \right]^{1/r} . \left[\sum_{i=1}^{N} s_i(1).\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right)^{-r/2} \right]^{-1/r} \quad \text{pro } r \neq 0 \tag{7.15}$$

a cenové indexní číslo implicitně definované podílem

$$P_{01}^{\ EX} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{Q_{01}^{\ EX} . \left(\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0) \right)}$$

---

[7] Je proto vcelku opodstatněné mluvit o $P_{01}^{\ T}$ jako o *TRANSLOG* - cenovém indexu .

jsou exaktní vzhledem k užitkové funkci tvaru obecné střední hodnoty řádu r

$$u(q_1, q_2, \ldots, q_N) = \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_{jk} q_j^{\,r/2} q_k^{\,r/2} \right)^{1/r}, \qquad (7.16)$$

pokud $r \neq 0$ a $C = \{c_{jk}\}^N_{j,k=1}$ je symetrická matice konstant.

V (7.15) jsou $s_i(0), s_i(1)$ opět výdajové účasti i-té komodity určené jako

$$s_i(0) = \frac{p_i(0)q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)q_j(0)} \qquad s_i(1) = \frac{p_i(1)q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)q_j(1)}$$

Poznámka 7.2 Speciálními případy této obecné věty jsou jak Tvrzení (7.5) ve vztahu k Fisherovu indexnímu číslu (pro $r = 2$) , tak Tvrzení (7.7) ve vztahu k Walshovu indexnímu číslu (pro $r = 1$) .

Lawrence Lau poprvé v r.1974 použil přívlastek „flexibilní" ve vztahu k N – argumentním funkčním tvarům, které (díky dostatečnému množství parametrů, kterými disponují) mohou sloužit jako aproximace kterékoliv jiné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce tím způsobem, že vystihnou s libovolnou přesností předepsané hodnoty gradientního vektoru (vektoru 1. parciálních derivací) a Hessovy matice (matice 2.parciálních derivací) libovolné funkce s touto vlastností. Pomocí funkční hodnoty, gradientního vektoru a Hessovy matice lze totiž vyjádřit téměř všechny ekonomické charakteristiky užitkové nebo produkční funkce (poptávkové pružnosti, účasti komodit na výdajích, mezní míru a pružnost substituce apod.) – příslušné vztahy viz např. [****] .

V souvislosti s předchozím výkladem budeme funkce uvedené v předchozím textu a nazývané
(7.12) – ***odmocnina kvadratické funkce*** – blíže L.Lau [1974] [8]
(7.13) – ***transcendentní logaritmická funkce*** –blíže Christensen, Jorgenson, Lau [1973] [9]
(7.14) – ***zobecněná Leontiefova funkce*** – viz blíže E.Diewert [1971] [10]
(7.16) – ***obecná střední hodnota r – tého řádu*** – viz blíže E.Diewert [1976] [11]

považovat za příklady tzv. *flexibilních* funkčních tvarů. Tyto funkční tvary hrají důležitou úlohu v definici tzv. *superlativních* indexních čísel, o kterých dále pojednáme.

7.3 Superlativní indexní čísla

Původcem tohoto pojmenování je E.Diewert, který pojem vztáhl k okolnosti, kdy exaktní indexní číslo splňuje navíc tu vlastnost, že analytický funkční tvar, ke kterému je indexní číslo vázáno (užitková nebo výdajová funkce) je dostatečně věrnou aproximací jakékoliv jiné

---

[8] Lau, L.J.: Comments on application of duality theory. In: Intriligator M.D., Kandrick D.A.: Frontiers of Quantitative Economics, Vol.II. 1971. Amsterdam, North Holland ; pp.176-199.

[9] Christensen L..R., Jorgenson D.W., Lau L.J. : Transcendental Logarithmic Production Frontiers. Review of Economics and Statistics 55/ 1973; pp.28-45.

[10] Diewert W.E. : An Application of the Shephard Duality Theorem : A Generalized Leontief Production Function. Journal of Political Economy 79/1971; pp. 481-507.

[11] Diewert W.E. : Separability and a generalization of the Cobb-Douglas cost, production, and indirect utility functions. Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences 1973. TR No 86.

dostatečně hladké (užitkové resp. výdajové) funkce tím, že s touto funkcí má shodné základní funkční charakteristiky přinejmenším do stupně shody druhých parciálních derivací. Přesněji to můžeme vyjádřit následující definicí :

Definice 7.6 ***Superlativní indexní číslo*** $\vec{P}_{01}$ resp. $\vec{Q}_{01}$ je takové (cenové resp. kvantové) indexní číslo , které

(a) vyhovuje vlastnostem exaktního indexního čísla

(b) je vztaženo k takovému tvaru (aspoň) dvakrát spojitě diferencovatelné užitkové nebo výdajové funkce, který má dostatečný počet (volných) parametrů k tomu, aby jimi bylo možno aproximovat libovolnou dvakrát spojitě diferencovatelnou užitkovou nebo výdajovou funkci. Touto aproximací se rozumí, že

- funkční hodnota
- gradientní vektor (vektor prvních parciálních derivací)
- prvky (symetrické) Hessovy matice (matice druhých parciálních derivací)

mohou být s libovolnou přesností vystiženy vhodnou volbou parametrů užitkové nebo výdajové funkce, ke které je vztaženo dané superlativní indexní číslo. Tato aproximace se vyhodnocuje v cenových a kvantových vektorech, pro něž platí $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}(1)$ $q(0) = q(1)$.

Okruh superlativních indexních čísel je tedy určitou podmnožinou exaktních indexních čísel, jejíž členové navíc splňují dodatečnou důležitou vlastnost, že jejich vyjádření jako užitková nebo jednotková výdajová funkce je představováno některým flexibilním funkčním tvarem .
S ohledem na skutečnosti uvedené v předchozím textu, lze konstatovat, že vlastnosti superlativních indexních čísel mají :

- Fisherovo cenové indexní číslo P_{01}^{F}
- Törnqistovo cenové indexní číslo P_{01}^{T}
- Walshovo cenové indexní cenové číslo P_{01}^{W}

Naproti tomu Laspeyresovo a Paascheho indexní číslo nepatří k superlativním indexům, protože funkční tvar, vůči kterému jsou exaktní, není flexibilní a nesplňuje vlastnost (b) v *Definici 7.6* .

Superlativní indexní čísla mají přitom jednu pozoruhodnou vlastnost, kterou ukázal E.Diewert v [1978] :

V důsledku přijetí vlastnosti (b) v *Definici 7.6* lze ukázat, že všechna superlativní indexní čísla jsou hodnotami natolik blízká, že mají tytéž první a druhé parciální derivace vzhledem ke všem $4N$ argumentům $\mathbf{p}(0)$, $\mathbf{p}(1)$, $\mathbf{q}(0)$, $\mathbf{q}(1)$, pokud tyto derivace vyhodnocujeme v bodech, pro něž platí totožnost cenových a množstevních vektorů: $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(1)$, $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(1)$.

Tento teoretický poznatek má i praktický význam: Vzájemné rozdíly v hodnotách, které poskytují superlativní indexní čísla, nepřevyšují zpravidla 0,2%, pokud jsou tato indexní čísla spočtená u dat reprezentovaných časovými řadami a 2%, pokud jsou naopak tato data představována průřezovými vzorky. První empirické výzkumy v tomto směru přinesli již I.Fisher [1922] a A.Ruggles [1967] .

Diewert [1978] však rovněž ukázal, že také Laspeyresův a Paascheho cenové indexy aproximují superlativní indexní čísla, avšak jen do přesnosti (shody parciálních derivací) 1. řádu včetně, pokud je vyčíslujeme v bodech, které mají shodné cenové a množstevní složky v základním a v běžném období. Z praktického hlediska to znamená, že (ve dvou po sobě jdoucích obdobích) zpravidla nedochází k rozdílu u těchto indexů o více než 0,5%, zatímco v kontextu průřezových vzorků může tento rozdíl dosáhnout až 2-4%. Výjimečně však i tyto dva indexy mohou být s přiměřenou opatrností použity k aproximování kvalitnějších superlativních indexních čísel.

Za zmínku stojí, že všechna superlativní indexní čísla vyhovují testu střední hodnoty (F10). Pro každé cenové superlativní indexní číslo platí tedy nerovnost

$$Min_i\ [\frac{p_i(1)}{p_i(0)}] \le \vec{P}_{01} \le Max_i\ [\frac{p_i(1)}{p_i(0)}] \qquad (7.17a)$$

)

Zatímco pro analogické kvantové superlativní indexní číslo je splněno

$$Min_i\ [\frac{q_i(1)}{q_i(0)}] \le \vec{Q}_{01} \le Max_i\ [\frac{q_i(1)}{q_i(0)}] \qquad (7.17b)$$

)

Příslušné závěry vyplývají z nerovností uvedených v monografii [12].

Nyní se vrátíme k výrazům (2.22) a (2,23) z kapitoly 2, kde jsme ukázali, že řada známých indexních čísel může být vyjádřena jako obecná střední hodnota řádu r . Lze tedy takto vyjádřit i některá superlativní indexní čísla. Připomeňme ještě jednou definici obecné střední hodnoty a připojme k ní ještě definici kvadratického průměru obecného řádu :

Definice 7.7 Mějme vektory cen a kvantit v základním a běžném období $\boldsymbol{p}(0)$, $\mathbf{p}(1)$, $\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1)$. Dále mějme vytvořeny výdajové účasti jednotlivých komodit

$$s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t)q_i(t)} \qquad \text{pro } i = 1,2,\ldots,N\ ;\ t = 0,1$$

Pak výraz

$$_sP_{01}^t(r) \quad = (\sum_{i=1}^{N} s_i(t)\cdot(\frac{p_i(1)}{p_i(0)})^r)^{1/r} \qquad \text{pro} \quad r \ne 0$$

(7.18)

případně výraz

$$_sP_{01}^t(0) = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{S_i(t)} \qquad \text{pro} \quad r \to 0$$

(7.19)

nazveme ***obecná střední hodnota řádu r*** .

a výraz

$$P_{01}(r) \equiv \sqrt{P^0{}_{01}(r/2\}.P^1{}_{01}.(-r/2\}}$$

(7.20)

nazveme ***kvadratický průměr řádu r .***

Význam této definice souvisí mj. s platností tvrzení, že obecný kvadratický průměr $P_{01}(r)$ pro $r \ne 0$ je exaktní pro kvadratickou střední hodnotu řádu r jednotkové nákladové funkce tvaru

[12] Hardy G.H., Littlewood J.E. , Pólya G : Inequalities. Cambridge U.P. 1934 str.14-15

$$E^*(p_1,p_2,...,p_N)=\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{ij}p_jp_k\right)^{/2}, \quad \text{při} \qquad \beta_{jk}=\beta_{kj} \qquad (7.21)$$

a $P_{01}(0)$ je exaktní pro lineárně homogenní *TRANSLOG* jednotkovou výdajovou funkci

$$\ln E^*(p_1,p_2,...,p_N)=\beta_0+\sum_{i=1}^{N}\beta_i.\ln p_i+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{jk}.\ln p_j.\ln p_k, \qquad (7.22)$$

jestliže tato splňuje podmínky

$$\sum_{i=1}^{N}\beta_i = 1 \qquad \beta_{jk}=\beta_{kj} \quad ; j,k=1,2,...,N \qquad \sum_{k=1}^{N}\beta_{jk}=0\,, j=1,2,..,N$$

zajišťující homogenitu 1. stupně *TRANSLOG*-funkčního tvaru

Protože tyto jednotkové výdajové funkce jsou reprezentovány flexibilními funkčními tvary a tedy mohou aproximovat libovolnou jednotkovou výdajovou funkci do totožnosti diferenciálních charakteristik 2: řádu včetně, jsou cenová indexní čísla $P_{01}(r), P_{01}(0)$ superlativní pro kterékoliv r.

V případě, že máme určeno exaktní indexní číslo (např. cenové) a hodláme uplatnit duální (kvantové) indexní číslo, které bude zaručeně splňovat test (F2), můžeme zavést implicitní definice tohoto duálního indexního čísla.[13]

Definice 7.8 ***Implicitní cenové indexy střední hodnoty řádu r** a **kvadratického průměru řádu r*** jsou pro (kladné vektory cen a kvantit) definovány jako

$${}_s\widetilde{P}^t{}_{01}(r)=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)q_i(1)}{\left(\sum_{i=1}^{N}p_i(0)q_i(0)\right).Q^{r,t}{}_{01}} \quad \text{resp.} \quad {}_s\widetilde{P}^r{}_{01}(0)=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)q_i(0)}{\left(\sum_{i=1}^{N}p_i(1)q_i(0)\right).Q^r{}_{01}} \qquad (7.23a,b)$$

Z předchozích nerovností (7.17b), (7.23a,b) vyplývá, že pro $P^r{}_{01}$ platí nerovnost

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(0)q_i(0)}Max_i\left[\frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right]\le P^r{}_{01}\le\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(0)q_i(0)}.Min_i\left[\frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right] \qquad (7.24)$$

Pro libovolné kladné vektory cen a kvantit ovšem jinak neplatí, že by byly předchozí dvě nerovnosti vsazením do příslušných hranic splněny. Avšak, jestliže se spotřebitel chová způsobem, při kterém optimalizuje své nákupy ve smyslu výše uvedeném, pak příslušný superlativní index bude splňovat obojí omezení.

Diewert dále ukazuje, že v obecném případě mohou být krajní meze v (7.24) značně široké. K ilustraci postačuje dvoukomoditní případ, ve kterém vezmeme

[13] Prosté superlativní cenové indexní číslo budeme označovat $\ddot{P}_{01}$, implicitně definované pak $\widetilde{P}_{01}$.

$$\boldsymbol{p}(0) = (1{,}1)\ ;\ \boldsymbol{q}(0) = (1{,}0)\ ;\ \boldsymbol{p}(1) = (a, a)\ ;\ \boldsymbol{q}(1) = (0{,}1)$$

Je okamžitě vidět, že obě horní meze v (7.24) se rovnají **a,** a proto $P_r = a$ pro $-2 \le r \le 2$. Avšak, dolní a horní hranice pro implicitní indexy $\widetilde{P}_r$ jsou 0, resp. $+\infty$. Důvod, proč jsou oba přímé cenové indexy $P_{r,t}$ a P_r rovny **a** spočívá v tom, že ceny obou statků mezi obdobími 0 → 1 rostly (pro a > 1) proporčně, tzn. $\boldsymbol{p}(1) = a.\boldsymbol{p}(0)$. Naopak, přírůstky v množstvích jsou neproporční, jsou dokonce vzájemně ortogonální., indexy $Q_{r,t}$ naopak vykazují značnou variabilitu. (Kdyby naopak byly proporční podíly kvantit $q_i(1)/q_i(0)$, pak by přímé množstevní indexy $Q_{r,t}$, $Q_{r,t}$ byly sobě rovny.

Otázka porovnání tedy směřuje k porovnání variability u N cenových změn $p_i(1)/\ p_i(0)$ a u analogických množstevních změn $q_i(1)/q_i(0)$. Pokud je variabilita v cenových změnách menší než variabilita množstevních změn, pak se přímé cenové indexy $\vec{P}_r$ budou přibližně rovnat váženým podílům cenových změn $p_i(1)/\ p_i(0)$ a budou směřovat více k vzájemnému souladu než implicitní cenové indexy $\widetilde{P}_r$. Takže v této situaci lze doporučit použití superlativního přímého cenového indexu a příslušného implicitního kvantového indexu $(\vec{P}_r, \widetilde{Q}r)$ pro nějaké r. Vskutku pak bude platit $(\vec{P}_r, \widetilde{Q}r) = (a, \dfrac{\sum p_i(1)q_i(1)}{a.\sum p_i(0)q_i(0)})$ pro všechna r a preferenci užití dvojice $(\vec{P}_r, \widetilde{Q}r)$ podporuje Hicksův agregační teorém) .

Naproti tomu, jestliže existuje menší variabilita v podílech kvantit než v podílech cen, pak kvantové indexy $\vec{Q}_r$ budou v podstatě vážené průměry množstevních podílů a budou vykazovat vyšší stabilitu než implicitní množstevní indexy $\widetilde{Q}_r$. Skutečně je tomu tak, neboť při $q_i(1)/q_i(0) = a$ pro všechna i, pak $(\widetilde{P}_r, \vec{Q}r) = (\dfrac{\sum p_i(1)q_i(1)}{a.\sum p_i(0)q_i(0)}, a)$ pro všechna r a přednost uplatnění $(\widetilde{P}_r, \vec{Q}_r)$ je opřena o Leontiefův agregační teorém.

Přirozeně vzniká otázka, zda jsou v empirických úlohách zpravidla více proporční ceny nebo kvantity ? Odpověď poskytne jednoduchá procedura : provedou se lineární regrese vektorů $\log(p_i(1)/p_i(0)$ resp. $\log(q_i(1)/q_i(1))$ na jedničkový vektor, přičemž jako $SSE(\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1))$ a $SSE(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1))$ označíme příslušné součty čtverců reziduí v těchto regresích. Tyto statistiky mohou sloužit jako indikátory míry neproporčnosti vektorů cenových a množstevních změn. Charakteristiky SSE mají následující příznivé vlastnosti :

a) $SSE(\boldsymbol{p}(0), a\boldsymbol{p}(0)) = 0$ pro každý skalár $a > 0$, takže jestliže jsou ceny ve dvou srovnávaných obdobích proporční, rozdílnost v odchylkách od proporčnosti je nulová

b) $SSE(\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1)) > 0$, jestliže $p(1) \ne a.p(0)$ pro každý skalár $a > 0$

c) $SSE(\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1)) = SSE(\boldsymbol{p}(1), \boldsymbol{p}(0))$ platí symetrie ve vztahu k pořadí vyhodnocování odchylek

d) $SSE(\boldsymbol{p}(0), a.\boldsymbol{p}(1)) = SSE\ (\boldsymbol{p}(0), .\boldsymbol{p}(1))$ pro každý skalár $a > 0$

f) $SSE(\boldsymbol{Ap}(0), \boldsymbol{A.p}(1)) = SSE(\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1))$, pro diagonální matici A s kladnými diagonálními prvky. Vlastnost zaručuje invarianci vůči změnám měřítka u peněžních jednotek

e) $SSE(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p}(1)) = SSE(\boldsymbol{p}(0),.\boldsymbol{p}(1))$,kde B je symetrická permutační matice (zajišťující symetrické zacházení se všemi statky)

Navíc lze ukázat, že obě SSE rostou se zvyšováním Eukleidovské vzdálenosti mezi logaritmovanými odchylkami cen od jejich průměrů v každém období $\overline{p}(0), \overline{p}(1)$, kde $i-$tá složka, ze kterých jsou průměry vyčíslovány, je definována jako

$$\overline{p}_i(t) = \ln p_i(t) - \frac{\sum_j \ln p_j(t)}{N} \quad \text{pro} \quad t=0 \text{ nebo } t=1$$

Řekneme, že ceny jsou méně proporční než kvantity, jestliže $SSE(\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1)) > SSE(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1))$. V tomto případě lze doporučit užití dvojice superlativních indexů daných jako $(\widetilde{P}_r, \ddot{Q}_r)$ pro nějaké r pro agregaci dat.

Naopak, jestliže $SSE(\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1)) < SSE(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1))$, pak lze doporučit užití dvojice superlativních indexů $(\ddot{P}_r, \widetilde{Q}_r)$ pro určité r.

Numerický příklad o tom, jak to ve skutečnosti může vypadat, podal opět E. Diewert na historických datech o produktivitě amerických oceláren a válcoven soustředěných za roky 1889-1909 - jde tedy o kontext výroby, nikoliv spotřeby. Šetření vedlo k závěru, že ceny byly vzájemně mnohem úměrnější než kvantity: téměř všechny reálné ceny byly v roce 1909 nižší než v roce 1889, zatímco u výroby komodit byly značné rozdílnosti : výroba některých statků silně vzrostla, produkce jiných byla naopak silně utlumena. Číselně vyjádřeno, cenové podíly byly soustředěny v intervalu < 0,4465 ; 1,0437 >, zatímco kvantity byly rozptýleny do daleko širšího rozmezí < 0,2454 ; 16,0963 >. Příslušné regresní součty čtverců činily : $SSE(\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1)) = 0{,}601$, naproti tomu $SSE(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1)) = 18{,}386$

Protože ceny byly úměrnější než kvantity, očekávali bychom menší variabilitu mezi přímými cenovými indexy a implicitním kvantových indexem než mezi implicitním cenovým indexem a přímým kvantovým indexem.

Zbývá udat pravidlo pro situaci, kdy lze stěží rozlišit, zda je větší úměrnost v cenách nebo v kvantitách (buď pro jejich přibližnou shodu nebo pro nedostupnost přesných dat). Zde se nejlépe osvědčuje použití Fisherova indexního čísla¨, protože $P_2 = \widetilde{P}_2$ a vzorec vykazuje přibližnou konzistenci jak ve vztahu k Hicksovu tak Leontiefovu agregačnímu teorému, neboť P_2 splňuje hranice v (****) a v (****) a $\widetilde{P}_2$ splňuje hranice v (****). P_2 je jediné superlativní indexní číslo, které má tuto vlastnost.

Závěrem ještě uveďme příklad dalšího indexního čísla, které patří do okruhu superlativních . Y.Vartia definoval v [*****] indexní číslo tohoto tvaru :

$$\ln P^{V}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} \frac{L(p_i(1)q_i(1); p_i(0)q_i(0))}{L(\sum_{j=1}^{N} p_i(1)q_i(1); \sum_{j=1}^{N} p_i(0)q_i(0))} . \ln\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right) ,$$

(7.25)

přičemž funkce $L(u,v)$ reprezentující logaritmickou střední hodnotu je definována vztahem

$$L(u,v) = \frac{u-v}{\ln u - \ln v} \qquad \text{pro} \quad u \neq v \qquad \text{a} \qquad L(v,v) = v$$

(7.25a)

Analogický vzorec pro kvantové indexní číslo má tvar

$$\ln Q^{V}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} \frac{L(p_i(1)q_i(1); p_i(0)q_i(0))}{L(\sum_{j=1}^{N} p_i(1)q_i(1); \sum_{j=1}^{N} p_i(0)q_i(0))} . \ln\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right) \qquad (7.26)$$

tzn. ceny jsou symetricky zaměněny za kvantity a vice versa. Vartia mj. ukázal, že jeho $P^{V}{}_{01}, Q^{V}{}_{01}$ splňují test záměny faktorů **(F2)** a vykazují vlastnost konzistence v agregaci. [14] Pro tato exaktní indexní čísla platí věta

Tvrzení 7.9 Platí

a) Jediná (jednou) diferencovatelná, lineárně homogenní a konkávní jednotková výdajová funkce , která je exaktní vzhledem k Vartivou cenovému indexnímu číslu (7.25) je Cobb-Douglasova jednotková výdajová funkce (7.11) .

b) Jediná (jednou) diferencovatelná, lineárně homogenní a konkávní užitková funkce , která je exaktní vzhledem k Vartiovu kvantovému indexnímu číslu (7.26), je Cobb-Douglasova užitková funkce.

$$u(q_1, q_2, \ldots, q_N) = \beta_0 . \prod_{i=1}^{N} q_i^{\beta_i} \qquad ,$$

pokud platí nezápornost úrovňové konstanty $\beta_0 > 0$ a jedničkový součet elasticit $\sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1$

Často užívanou diskrétní aproximací Divisiova cenového indexu (4.3a) je indexní číslo

$$\ln P^{AD}{}_{01} = \frac{1}{2} . \sum_{i=1}^{N} [\frac{p_i(1)q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_i(1)q_i(1);} + \frac{p_i(0)q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_i(0)q_i(0);}] . \ln\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right) \qquad ,$$

(7.27)

Podobně diskrétní aproximací Divisiova kvantového indexu (4.3b) je indexní číslo vyjádřené vzorcem

$$\ln Q^{AD}{}_{01} = \frac{1}{2} . \sum_{i=1}^{N} [\frac{p_i(1)q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_i(1)q_i(1);} + \frac{p_i(0)q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_i(0)q_i(0);}] . \ln\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right) \quad , \qquad (7.28)$$

Závěrem uvedeme ještě větu, která určitým způsobem propojí problematiku superlativních indexních čísel s poznatky uvedenými kapitole 4.

Tvrzení 7.10 Vartiův cenový index (7.25) aproximuje diferenciálně superlativní cenový index $P^{AD}{}_{01}$ definovaný v (7.27) do druhého řádu včetně v kterémkoliv $4N-$rozměrném bodě

[14] Allen R., C., Diewert E.W. : Direct versus Implicit Superlative Index Number Formulae.. The Review of Economics andf Statistics . Vol 63 (Aug. 1981) p. 430-435.

$\mathbf{p}(0)$, $\mathbf{p}(1)$, $\mathbf{q}(0)$, $\mathbf{q}(1)$, pokud tento bod splňuje vlastnost, že ceny a kvantity v něm se rovnají, tj. $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}(1)$ a také $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}(1)$. Touto aproximací rozumíme, že první i druhé parciální derivace obou těchto indexních funkcí podle všech argumentů jsou shodné.