3. Teorie produkce

Teorie produkce, jako další z typických oblastí, v níž matematické nástroje slouží k formalizaci mikroekonomické teorie, analyzuje chování typického výrobního ekonomického subjektu (firmy), který usiluje o racionální fungování výrobního procesu v tržním prostředí, kde ceny výrobních faktorů, popř. i výrobků jsou specifikovány mimo vůli výrobce, jsou tedy považovány za exogenní veličiny. Soubor výrobních faktorů v rámci uvažované technologie (souborů výrobních postupů, zkušeností, informací, know-how) vede k dosažení určité úrovně výroby (výstupu, outputu). Výrobce usiluje o maximalizaci ziskové stránky výroby tzn. maximalizuje rozdíl mezi objemem tržeb z prodaných výrobků na jedné straně a s výrobou souvisejícími výrobními náklady tj. náklady na pořízení výrobních faktorů nezbytných pro zajištění výroby.

V prvé části teoretické analýzy výrobního procesu ponecháme stranou cenová hlediska a soustředíme se toliko na "technologickou" stránku výrobního procesu. Popíšeme - pomocí několika pro tento účel vhodných matematických funkcí - elementární vlastnosti, které charakterizují abstraktně chápaný výrobní vztah, jímž se transformují výrobní faktory v rámci dané technologie do hodnoty celkové produkce. Tento vztah se nazývá produkční funkcí. Teprve později k tomuto připojíme analýzu cenově-nákladové stránky výroby, abychom mohli blíže zkoumat zákonitosti, které v uvedeném prostředí platí mezi uvažovanými ekonomickými kategoriemi. Jak uvidíme, určitá jejich část představuje obdobu ekonomických funkcí, se kterými jsme se setkali v prostředí analýzy spotřebitelské poptávky.

1.1 Produkční množiny, produkční funkce

V této části zavedeme základní pojmový aparát umožňující na základě množinových kategorií (tzv. *produkčních množin vstupů a produkčních množin výstupů*) zavést pojem produkční funkce. Pojem vystihuje výrobní vztahy v naturálním pojetí, bez nutnosti zavedení cenových vektorů (výrobních činitelů, resp. výrobků).

Produkční funkce, kterou zde zavedeme, tedy nemusí být výchozím fundamentálním pojmem. případě vícerozměrných vektorů výstupů (případ tzv. sdružené produkce *joint production*) by však bylo zapotřebí uplatnit složitější analytický aparát (tzv. *produkční korespondence*, či *produkční relace*) který překračuje rámec aktuální potřeby výkladu. Níže uvedené pojmy poprvé důkladně vyšetřoval počátkem 50.let americký matematický ekonom prof. Ronald W.Shephard, který při teoretické analýze elementárních vlastností produkčních vztahů dospěl k možnosti axiomaticky popsat strukturu vlastností produkčních množin.

Definice 1

Uvažujeme-li konkrétní hodnotu velikosti produkce $y^0 > 0$, pak pro danou technologii je příslušná **produkční množina vstupů** $L(\boldsymbol{y^0})$ definována jako množina kombinací všech výrobních faktorů, s nimiž lze v dané technologii dosáhnout produkce y^0. Jestliže této technologii odpovídá konkrétní produkční funkce $F(x)$, lze $L(y^0)$ vyjádřit jako:

(1.1) $$L(y^0) = \{\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{x} \geq 0, F(\boldsymbol{x}) \geq y^0\}$$

Protože však v produkční množině vstupů budou, jak patrno, obsaženy i neefektivní kombinace vstupních výrobních faktorů (ty jsou přítomny ve větších množstvích, než je nezbytně nutné k dosažení produkce y^0) , je účelné se v některých směrech analýzy zaměřit pouze na hraniční body množiny $L(y^0)$ nebo její část. Proto zavedeme následující definice :

Definice 2

Izokvanta $Q(y^0)$ (na hladině produkce y^0) produkční množiny vstupů $L(y^0)$ je definována jako:

(1.2) $$Q(y^0) = \{x \in L(y^0); \Theta \cdot x \notin L(y^0) \text{ pro skalární } \Theta \in (0,1)\}$$

Jde tedy o množinu hraničních bodů produkční množiny vstupů, vymezující takové kombinace výrobních faktorů, které jsou v níže uvedeném smyslu právě postačující pro dosažení produkce na úrovni y^0. Izokvantu lze ve vztahu k produkční funkci chápat jako obdobu indiferenční křivky vůči užitkové funkci $u(x)$ z předchozí části. Jinak se ale produkční funkce vzhledem k objektivní možnosti měřit velikost produkce (peněžně i naturálně) od užitkové funkce liší právě svým kardinálním vymezením.

Definice 3

Účinná (efektivní) podmnožina $E(y^0)$ produkční množiny vstupů je množina vymezená definicí

(1.3) $$E(y^0) = \{x \in L(y^0);\ z \leq x (\text{ avšak } z \neq x) \Rightarrow z \notin L(y^0)\}$$

Je patrné, že účinná podmnožina $E(y^0)$ reprezentuje takové varianty nasazení výrobních faktorů, při kterých jsou tyto faktory vynakládány právě v minimálních nutných množstvích.

Abychom si lépe uvědomili *rozdíl mezi izokvantou a účinnou podmnožinou* (téže produkční množiny vstupů $L(y^0)$), všimněme si, že bod x (tzn. kombinace výrobních faktorů) leží na izokvantě $Q(y^0)$ právě tehdy, neexistuje-li žádný jiný bod z, který by byl jeho proporčním zmenšením (ležel by tedy na polopřímce spojující počátek souřadnic s bodem x nacházejícím se na izokvantě) a který by rovněž na této izokvantě ležel. Naproti tomu bod x účinné podmnožiny produkční množiny vstupů $E(y^0)$ nemůže být "zmenšen" v žádném směru rovnoběžném s osami souřadnic (aby tímto zmenšením získaný jiný bod z ještě ležel v účinné podmnožině). Je očividné, že bod účinné podmnožiny musí být nutně bodem izokvanty, pokud jsou produkční množiny vstupů konvexní útvary.Opačně tomu tak být nemusí.

Jako příklad může sloužit [obrázek **č. 3.1A** *, v němž se pro možnost grafického vyjádření omezíme na dva výrobní faktory : práci L zobrazenou na vodorovné ose a kapitál K na svislé ose. Množiny bodů (výrobních faktorů) odpovídajících hodnotám produkce o velikosti y^o, y^1, y^2, nám vytvářejí soustavu izokvant I_1, I_2, I_3.....*

Na obrázku **3.1B,** *lze zřejmě v bodě A dosáhnout úspory nákladů snížením množství výrobního faktoru K (čímž se dostaneme do až bodu A´ ležícího na téže izokvantě y^1), zatímco téhož nelze docílit v bodě účinné B podmnožiny $E(y^1)$, kde pohyb jakýmkoliv "úsporným" směrem (při snížení kteréhokoliv z výrobních faktorů K nebo L) nutně vede k opuštění účinné podmnožiny na hladině y^1.*

Jiným příkladem jsou body C a D izokvanty tzv. Leontiefovy produkční funkce obrázku ***3D****: zatímco v bodě C lze snadno zmenšením množství faktoru K o ΔK dosáhnout úspornější (méně nákladné) faktorové kombinace, nelze téhož dosáhnout v bodě D, v němž se současně nabývá minima pro oba výrobní faktory (při daných pevných technologických koeficientech určujících sklon polopřímky OD). Jak je patrné, v bodě D k témuž cíli nevede ani snížení faktoru L (Bod D zde představuje jednoprvkovou účinnou podmnožinu na hladině produkce y^1).*

Jednou z typických vlastností produkční množiny vstupů $L(y^0)$ je její konvexnost, která vyjadřuje možnost připuštění technologií dělitelných v čase. Jestliže dva různé body $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ náleží do $L(y^0)$, pak lze produkce y^0 dosáhnout tak, že po dobu λ používáme faktory v kombinaci $\boldsymbol{x}$ a po zbývající časový úsek $(1-\lambda)$ v kombinaci $\boldsymbol{z}$.

Stejně jako vymezuje vztahem (1.1) produkční funkce $F(\boldsymbol{x})$ soustavu produkčních množin vstupů, lze také obráceně pomocí posloupnosti produkčních množin vstupů $L(y)$ s vhodnými vlastnostmi definovat produkční funkci $F(x)$ vztahem

(1.4) $$F(x) = Max\,\{y\ ; \boldsymbol{x} \in L(y)\}$$

Produkční funkce je takto definována jako maximální dosažitelný výstup pro danou množinu výrobních faktorů $\boldsymbol{x}$. K vlastnostem, které musí množinový systém $L(y^j)$, $j = 1, 2, \dots, \dots$ splňovat , patří mj. jejich uzavřenost, konvexnost pro každou úroveň produkce y^j, prázdný průnik těchto množin při $\lim_{j \to \infty} y^j \to \infty$ (tj. při neomezeně rostoucí produkci)

1.2 Vlastnosti obecné produkční funkce

Jednotlivé axiomy R.W.Shephardem zavedené soustavy pro produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$ jsou:

(P1) $\boldsymbol{F(0) = 0}$; tj. hodnototvorný výrobní proces může být realizován pouze s kladnými hodnotami (alespoň některých) výrobních faktorů.

(P2) $\boldsymbol{F(x)}$ ***je konečná reálná a nezáporná funkce proměnných*** $x_1, x_2, \dots, x_n$ při jakýchkoliv konečných hodnotách výrobních faktorů vzatých z nezáporných definičních oborů $X_j = \langle 0, +\infty)$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$.

(P3) $\boldsymbol{F(x)}$ ***je neklesající funkce v každé své proměnné.*** Přidáním množství kteréhokoliv výrobního faktoru nemůže dojít k poklesu produkce. Připouští se však, že mezní produktivita určitého faktoru v dané výrobní situaci může být nulová, tzn. že ne ve všech případech musí vést zvýšení množství výrobního faktoru k růstu produkce.

(P4) ***Existuje-li taková kombinace výrobních faktorů*** $\boldsymbol{x > 0}$ ***nebo*** $\boldsymbol{x \geq 0}$***, že*** $\boldsymbol{F(\lambda x) > 0}$ ***pro nějaké skalární*** $\boldsymbol{\lambda > 0}$***, pak*** $\lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda x) = +\infty$

Předpoklad charakterizuje vlastnost neomezeného růstu produkce, jestliže proporčním způsobem zvětšujeme množství faktorů v kombinaci, která poskytuje nenulový výnos. To např. vylučuje uplatnění (jako produkčních) funkcí, které jsou rostoucí, avšak jejichž degresívní růst je limitován shora asymptotou y = konst. (jako je např. v jednorozměrném případě funkce F(x) = arctg (x)).

(P5) $\boldsymbol{F(x)}$ ***je shora polospojitá funkce*** v celém definičním oboru. Vzhledem k předpokladu (P3) lze ekvivalentně mluvit o polospojitosti zprava. Vlastnost upřesníme definicí z matematické analýzy :
Funkce $F(x)$ je polospojitá shora (tj. je-li neklesající, zprava) v bodě $x^0 \in E_n$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $S\delta(x^0)$ taková, že pro všechna $x \in S\delta(x^0)$ platí $F(x) < F(x^0) + \varepsilon$.

Pro uvažované výrobní situace to znamená, že za určitých okolností může dojít ke skokovitému růstu produkce (při přidání "nepatrně malého" množství některého z výrobních činitelů).

Vlastnost koresponduje s připuštěním "kvalitativních změn v technologii" majících příčinu např. v technických inovacích (spíše tedy půjde o změny na straně výrobních faktorů charakteru *kapitálu* či *technického pokroku* než na straně *práce* či *surovin*).

(P6) $\boldsymbol{F(x)}$ ***je kvazikonkávní funkce*** v celém definičním oboru. Formálně vyjádřeno platí nerovnost

(1.5) $$F(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{z}) \geq Min[F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{z})]$$

pro libovolnou dvojici bodů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ z definičního oboru produkční funkce $F(x)$ a pro libovolné λ z intervalu $(0,1)$. Tato vlastnost je přímým důsledkem konvexnosti produkčních množin vstupů a garantuje udržení produkce v bodech $[\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{z}]$ při přechodu mezi dvěma faktorovými kombinacemi $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ alespoň v té výši, která odpovídá méně produktivní faktorové kombinaci.

Vlastnost připouští racionální využití "technologií dělitelných v čase" , kdy během časového intervalu délky 1 jsou faktory nasazeny v kombinaci x po dobu λ a po zbývající dobu $(1-\lambda)$ jsou nasazeny v množstvích z . Pokud tyto kombinace vedou k hodnotám produkce $F(x)$ resp. $F(z)$, je zaručeno, že během časového intervalu délky 1 produkce neklesne pod menší z hodnot v krajních bodech.

Konečně poslední vlastností, která se váže nikoliv přímo k produkční funkci, nýbrž k účinné podmnožině $E(y^0)$, je tzv. ***asymetrický Shephardův axiom***:

(P7*) ***Účinná podmnožina*** $\boldsymbol{E(y^0)}$ ***produkční množiny vstupů*** $\boldsymbol{L(y^0)}$ ***je ohraničená*** pro jakoukoliv hodnotu produkce y^0.

Znamená to, že množiny $E(y)$ jako účinné části izokvant $[E(y^0) \subset Q(y^0)]$ jsou ohraničené křivky. Uvedený axiom se nazývá asymetrický mj. proto, že jeho platnost není vyžadována pro analogicky k $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}^0)$ zkonstruované produkční množiny výstupů $P(x^0)$ reprezentující takové kombinace výrobků, které jsou variantně dosažitelné pomocí pevné kombinace výrobních faktorů x^0 .

Jak však uvidíme dále, dost podstatná část analytických funkčních tvarů užívaných k popisu produkčních vztahů jako produkční funkce, tento asymetrický axiom nesplňuje.

Na obrázcích 3B, 3C, 3D jsou, jak patrno účinné podmnožiny omezené křivky (u 3D jde o body, tedy o jednoprvkové množiny), zatímco na obrázku 3A účinné podmnožiny ohraničené nejsou (k souřadnicovým osám se izokvanty a tedy i účinné podmnožiny blíží pouze asymptoticky, aniž se jich v konečných hodnotách druhého faktoru dotknou.).