

### 3 Racionální chování spotřebitele : maximalizace užítku, minimalizace výdajů

Spotřebitel si při nákupu komodit počíná tak, že svůj peněžní příjem o velikosti  $M$  rozdělí beze zbytku na nákup  $s$  komodit ( $1 \leq s \leq n$ ), a to tak, aby dosáhl svého maximálního užítku. Jinými slovy : komodity kupuje v takových množstvích (ne však nutně všechny dostupné), aby požadované hladiny užítku dosáhl co nejlevněji. Bude tedy preferovat - při variantní možnosti dosáhnout hladiny užítku  $u^*$  různými kombinacemi komodit - takovou kombinaci, při níž celkový výdaj na pořízení všech užitek mu přinášejících statků (závisející zřejmě na množstvích statků a na jejich jednotkových cenách) bude nejmenší možný. Je tedy mj. zřejmé, že při jinak stejném příspěvku několika komodit k užítku (při shodných mezních užitečných těchto komodit) bude preferovat nákup komodity nejlevnější.

#### 3.1 Formulace maximalizačního problému

Pokud tuto situaci zformalizujeme, dostáváme optimalizační problém řešící nalezení maxima

$$(3.1A) \quad \text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{za podmínky}$$

$$(3.1B) \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M \quad \text{a podmínek nezápornosti}$$

$$(3.1C) \quad x_i \geq 0 \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, n.$$

Z matematického pohledu jde tedy o úlohu nalezení vázaného extrému (maxima) obecně nelineární funkce na množině rozpočtového omezení  $\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M$ . Jak je známo, vzhledem k tomu, že omezující podmínka spolu s podmínkami nezápornosti proměnných (3.1C) představuje kompaktní (tj. omezenou a uzavřenou) množinu, nabývá jakákoliv spojitá a ve všech proměnných rostoucí nelineární funkce svého maxima na hranicích takovéto množiny.

Lze tedy rozpočtové omezení stejně dobře psát ve tvaru  $\sum_{i=1}^n p_i x_i = M$ .

Úloha uvedeného typu se standardně řeší s použitím Lagrangeova multiplikátoru. Při této reformulaci nabývá kriteriální funkce tvar

$$(3.2) \quad \text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i - M \right),$$

kde  $\lambda$  je právě zmíněný Lagrangeův multiplikátor. S touto (hodnotou neznámou) veličinou se zachází obdobně jako s jinými proměnnými : v dalším ji budeme považovat za funkci implicitně závislou na „parametrech úlohy“ tzn. na cenách obsažených v cenovém vektoru  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  a na příjmu jednotlivce  $M$ .

Stejně jako v jiných extrémálních úlohách postupujeme dále tak, že jednotlivé parciální derivace extremalizované funkce  $u(\mathbf{x}) - \lambda \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i - M \right)$  ve vztahu (6) podle proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a  $\lambda$  položíme rovny nule. Po přeskupení členů dostaneme

$$(3.3A) \quad u_r = \lambda \cdot p_r \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \text{ (derivace podle } x_r \text{)}$$

$$(3.3B) \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i = M \quad \text{(derivace podle } \lambda \text{)}.$$

Rovnice (3.3A) a (3.3B) jsou nutnými podmínkami k tomu, aby pro řešení optimalizačního problému existovalo řešení, tedy maximum. Povšimněme si, že těchto podmínek je právě stejný počet (tj.  $n + 1$ ) jako je neznámých veličin modelu (velikostí poptávky po jednotlivých komoditách  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a  $\lambda$ ).

V lineární situaci by se dalo očekávat, že řešení bude dáno jednoznačně. Zde však  $n$  vztahů (7A) nemusí být lineárními funkcemi, přičemž jejich tvar je závislý na specifikaci užitkové funkce  $u$ , v níž jako argumenty vystupují neznámé  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Poznámka 1** Od typické úlohy matematického programování se řešený problém liší ve dvou směrech:

a) Tvar omezení (3.1B) je představován jedinou nadrovinou  $n$ -rozměrného prostoru (omezující množství komodit jen "shora")

b) Užitková funkce  $u(x)$  bude mít zpravidla komplikovanější tvar, než je obvykle lineární funkce konvenčního problému lineárního programování a problém nalezení optima bude představovat zpravidla podstatně komplikovanější analytickou úlohu než tu, která může být řešena technikami matematického programování (např. simplexovou metodou).

**Poznámka 2** *Jak patrně, v předchozím nerozlišujeme mezi důchodem spotřebitele a jeho výdajem vynaloženým na nákup užitek mu přinášejících komodit. V realitě se spotřebitel bude rozhodovat nejen podle příjmu aktuálního období, ale rovněž podle stavu svých úspor, možných půjček, jiných nutných výdajů v rozhodovacím období apod. V tomto smyslu je zřejmé, že příjem může být hodně vzdálen bezprostřední hotovosti v peněženke a bude silně záviset na tom, zda spotřebitel řeší „optimalizační problém“ nákupu potravin pro denní potřebu nebo nákladnějšího pořízení statku dlouhodobé spotřeby (např. campingového automobilu).*

Z podmínek (3A) tedy bezprostředně plyne, že v rovnovážné situaci (kdy se poptávka spotřebitele po jednotlivých komoditách při maximálním užitku přizpůsobí cenovým relacím) bude platit vztah

$$(3.4) \quad \lambda = \frac{u_1}{P_1} = \frac{u_2}{P_2} = \dots = \frac{u_n}{P_n}$$

Vztahy (3.4) představují soustavu podmínek nutných pro dosažení rovnovážného stavu. Vyjadřují požadavek, aby podíl mezního užitku kterékoliv komodity a její jednotkové ceny byl konstantní pro všechny uvažované komodity. Sekundárně je odtud vidět, že také veličina  $\lambda$  (uplatňující se jako Lagrangeův multiplikátor) je rovna právě těmto podílovým hodnotám. O rovnováze lze oprávněně mluvit tehdy, jestliže je dosaženo maximálního užitku při daném příjmu a dané množině relativních cen. Jakékoliv vychýlení z rovnováhy vede vždy ke snížení hodnoty užitku spotřebitelem pocíťovaného.

Jestliže tedy každé  $u_r$  představuje mezní užitek (úměrný v rovnovážné situaci ceně  $r$ -té komodity), můžeme veličině  $\lambda$  přisoudit interpretaci jako „mezní užitek peněz“ (který je ovšem také funkcí cen  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  a důchodu  $M$ ). Za těchto okolností pak platí pro podíl mezních užitků (tedy mezní míru substituce mezi  $r$ -tou a  $s$ -tou komoditou) vztah

$$(3.5A) \quad m_{rs} = \frac{u_r}{u_s} = \frac{P_r}{P_s} \quad \text{a podobně} \quad (3.5B) \quad m_{r\lambda} = \frac{u_r}{\lambda_s} = \frac{P_r}{1}$$

Na základě tohoto zjištění můžeme říci, že mezní míra substituce mezi  $r$ -tou a  $s$ -tou komoditou je v rovnovážné situaci rovna podílu jednotkových cen obou těchto komodit. Cenu  $p_r$  lze pak interpretovat jako mezní míru substituce mezi  $r$ -tou komoditou a penězi.

Maximalizační problém, tak jak byl představen vztahy (3.1), může být ovšem formulován i duálním způsobem. Maximalizace účelové funkce (3.1A) za podmínek (3.1B-C) má svou duální formulaci následujícím tvaru

$$(3.6A) \quad \text{Min } M = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad \text{za podmínky}$$

$$(3.6B) \quad u(\mathbf{x}) = u^0 \quad \text{opět při } p_i > 0 \text{ pro libovolné } i.$$

$$(3.6C) \quad x_i \geq 0 \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, n.$$

Maximalizuje-li spotřebitel svůj užitek z komoditní kombinace při rozpočtovém omezení (3.1B), řeší v podstatě tentýž problém, jako je minimalizace jím vynaložených výdajů spojených pořízením komodit v množstvích, která zaručují dosažení užítku na požadované hladině  $u^0$ . V tomto smyslu lze s plnou oprávněností mluvit o dvojici duálních úloh.

Dále, protože maximalizace užítku a minimalizace s tím souvisejících nákladů vedou k téže (optimální) volbě komoditních množství  $x_i$  (parametry úlohy jsou  $\mathbf{p}$  a  $M$ ), výdaj při prvé z úloh se musí rovnat minimálním nákladům v duálním problému. V původním problému představuje řešení soustava Marshallových poptávkových funkcí  $g_i(M, \mathbf{p})$ , zatímco v duálním problému jsou determinujícími veličinami - argumenty poptávkových funkcí - úroveň užítku  $u^0$  a cenový vektor  $\mathbf{p}$ . Tyto poptávkové funkce minimalizující výdaje označíme  $h_i(u, \mathbf{p})$  a jsou známy jako Hicksovy (také kompenzované) poptávkové funkce. Z interpretačního hlediska jsou charakteristické tím, že informují o tom, jak jsou poptávky  $x_i$  ovlivněny/kompenzovány cenami  $\mathbf{p}$  (při pevném  $u$ ).

Obě řešení dvou výše uvedených problémů musí být, přirozeně, táž. Proto lze psát

$$(3.7) \quad x_i = g_i(M, \mathbf{p}) = h_i(u, \mathbf{p}) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

Každé z těchto řešení přitom můžeme zpět dosadit do výchozího příslušného problému. V prvním případě obdržíme nejvyšší dosažitelný užitek, ve druhém případě nejmenší dosažitelné náklady. Lze tedy psát :

$$(3.8) \quad u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u[g_1(M, \mathbf{p}), g_2(M, \mathbf{p}), \dots, g_n(M, \mathbf{p})] = \psi(M, \mathbf{p})$$

$$(3.9) \quad M = \sum_{k=1}^n p_k h_k(u, \mathbf{p}) = E(u, \mathbf{p})$$

Funkce  $\psi(M, \mathbf{p})$  v (3.8) vyjadřuje maximální dosažitelný užitek (při pevně daném příjmu  $M$  a cenovém vektoru  $\mathbf{p}$ ). Nazývá se **nepřímá užítková funkce** a může být definována vztahem

$$(3.10) \quad \psi(M, \mathbf{p}) = \text{Max}_x \left[ u(\mathbf{x}); \sum_{k=1}^n p_k x_k = M \right]$$

Funkce  $E(u, \mathbf{p})$  v (3.9) vyjadřuje minimální dosažitelný výdaj (při požadované úrovni užitku  $u^0$  a vektoru cen  $\mathbf{p}$ ). Nazývá se *výdajová funkce* a lze ji definovat vztahem

$$(3.11) \quad E(u^0, \mathbf{p}) = \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \left[ \sum_{k=1}^n p_k x_k ; u(\mathbf{x}) = u^0 \right]$$

Nepřímá užitková a výdajová funkce jsou vzájemně velmi úzce propojeny. Protože platí  $E(u, \mathbf{p}) = M$ , můžeme invertovat argument  $u$ , abychom dostali  $u$  jako funkci  $M$  a  $\mathbf{p}$ , což nám dá  $u = \psi(M, \mathbf{p})$ . Úplně obdobně inverze vztahu  $u = \psi(M, \mathbf{p})$  povede přímo k relaci  $E(u, \mathbf{p}) = M$ . Obě funkce tedy obsahují v podstatě tutéž informaci (zapsanou jen pomocí jiných argumentů, byť  $\mathbf{p}$  zůstává v obou).