Řešené příklady z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné.

Vypracoval: RND.Štěpán Mikoláš

Tento materiál je určen jako pomocný učební text pro posluchače kombinovaného studia na ESF v Brně.

Limita.

Pojem limity je stěžejním pojmem matematické analýzy. Proto mu i v této stručné sbírce příkladů budeme věnovat více pozornosti.

Obecná definice limity funkce - založená na pojmu okolí bodu na rozšířené reálné ose – zahrnuje všechny případy limit. Je uvedena na str. 75-76 DSO Matematika B. Pro lepší pochopení uvedeme definici limity pro některé zvláštní případy.

Definice (vlastní limity ve vlastním bodě)
Nechť $x_0, L \in \mathbf{R}$. Řekneme, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathbf{R}$: $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definice (vlastní limity v nevlastním bodě)
Nechť $L \in \mathbf{R}$. Řekneme, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $A > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathbf{R}$: $x > A$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definice (nevlastní limity ve vlastním bodě)
Nechť $x_0 \in \mathbf{R}$. Řekneme, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, jestliže ke každému $M > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathbf{R}$: $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $f(x) > M$.

Definice (nevlastní limity nevlastním bodě)
Řekneme, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, jestliže ke každému $M > 0$ existuje $A > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathbf{R}$: $x > A$ platí $f(x) > M$.

Poznámky

1.: čísla δ, ε v předchozích definicích jsou velmi malá kladná čísla, čísla A,M jsou velká kladná čísla.

2. Podobně lze vyslovit definice ostatních případů limit.

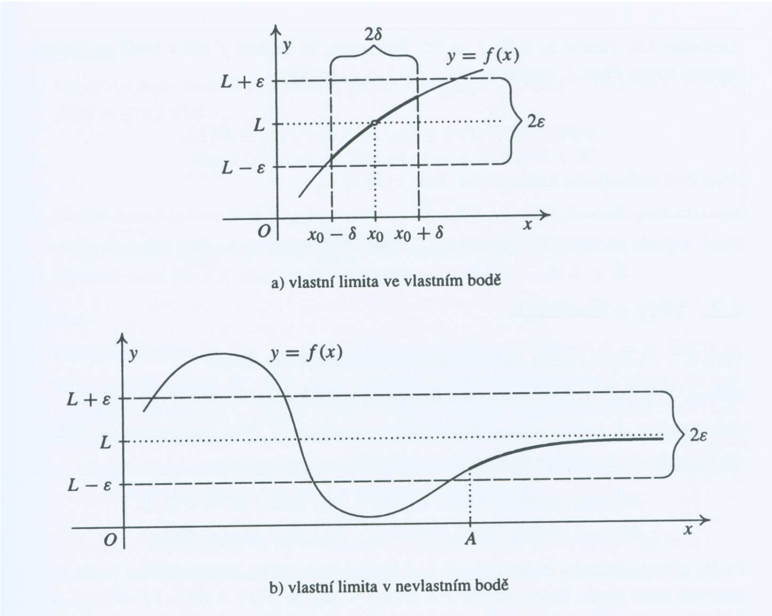
3. Smysl předchozích definic je patrný z obrázků na straně 2.

Uvedeme ještě některá tvrzení o limitách:

Věta. *Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.* **.**

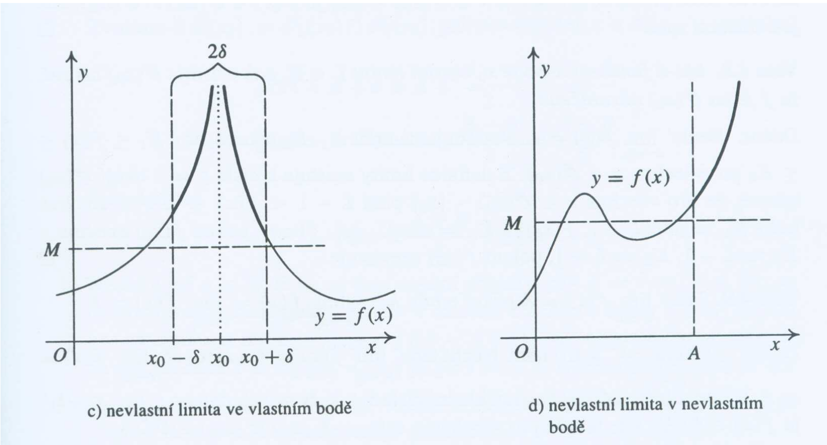
Věta. *Nechť existují obě limity* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, *kde A,B*$\in$ **R.** *Pak platí:*

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ **2.** $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = AB$, **3.** Je-li $B \neq 0$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.



a) vlastní limita ve vlastním bodě

b) vlastní limita v nevlastním bodě



c) nevlastní limita ve vlastním bodě

d) nevlastní limita v nevlastním bodě

Věta (o limitě složené funkce)
Nechť $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \alpha$ *a nechť funkce f je spojitá v bodě* α. *Pak platí, že*
$\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)) = f(\alpha)$.

Věta.
Nechť $x_0, L \in \mathbf{R}$, $L \neq 0$. *Nechť* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. *Nechť existuje* $\delta > 0$ *takové,*
že pro každé $x \in$ ***R*** *:* $0 < |x - x_0| < \delta$ *platí* $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ $\left[\frac{f(x)}{g(x)} < 0\right]$.

Potom $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ $[-\infty]$.

Poznámka. Všechna výše uvedená tvrzení lze vyslovit též pro limitu zprava a limitu zleva.

Věta. *Nechť existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro všechna* $x \in \mathbf{R}$: $0 < |x - x_0| < \delta$ *platí rovnost* $f(x) = g(x)$. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \iff \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$, kde $A \in \mathbf{R}^*$ **.**

Poznámka. Z této věty vyplývá, že při výpočtu limity můžeme zlomek krátit nebo rozšiřovat výrazem, jehož limita v daném bodě je rovna nule.

Věta. *Platí:* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right)$.

Poznámka. Při výpočtu limity $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ vždy nejprve dosazením x_0 do funkce f(x) zjistíme, o jaký typ výrazu se jedná.

Příklady.

Ve všech následujících příkladech spočítejte limitu:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10} = \lim\limits_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 5}\frac{x+1}{x-2} = \frac{6}{3} = 2$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x(\sqrt{x}+1) = 2$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2) = 4$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{(x-3)(x+2)}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2-5}{(x-3)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+5}{4x^2+3x-7} = \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\frac{3}{y^2}-\frac{2}{y}+5}{\frac{4}{y^2}+\frac{3}{y}-7} = \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\frac{3-2y+5y^2}{y^2}}{\frac{4+3y-7y^2}{y^2}} = \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{3-2y+5y^2}{4+3y-7y^2} = \frac{3}{4}$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{1+2x^2}} = \lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\frac{1}{y}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{y^2}}} = \lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\frac{1+y}{y}}{\sqrt{\frac{y^2+2}{y^2}}} = \lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\frac{1+y}{y}}{\frac{\sqrt{y^2+2}}{|y|}} = \lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\frac{1+y}{y}}{\frac{\sqrt{y^2+2}}{-y}} =$

$= \lim\limits_{y\to 0^-} -\frac{1+y}{\sqrt{y^2+2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{(x-1)^3}$.

Po dosazení čísla x = 1 dostaneme v čitateli 1, ve jmenovateli 0. Příklad budeme řešit podle poslední věty ze strany 2.

	$(1-\delta,1)$	$(1,1+\delta)$
2x-1	+	+
$(x-1)^3$	-	+

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{(x-1^3)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{(x-1^3)}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{(x-1)^3}$ neexistuje

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{-x^2+4x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-2}$

	$(2-\delta,2)$	$(2,2+\delta)$
x+3	+	+
2-x	-	+

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{2-x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+3}{2-x}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{-x^2+4x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{2-x}$ neexistuje

Derivace.

Dalším důležitým pojmem je pojem derivace.

Definice.
Nechť funkce je definována v bodě x_0.Existuje-li

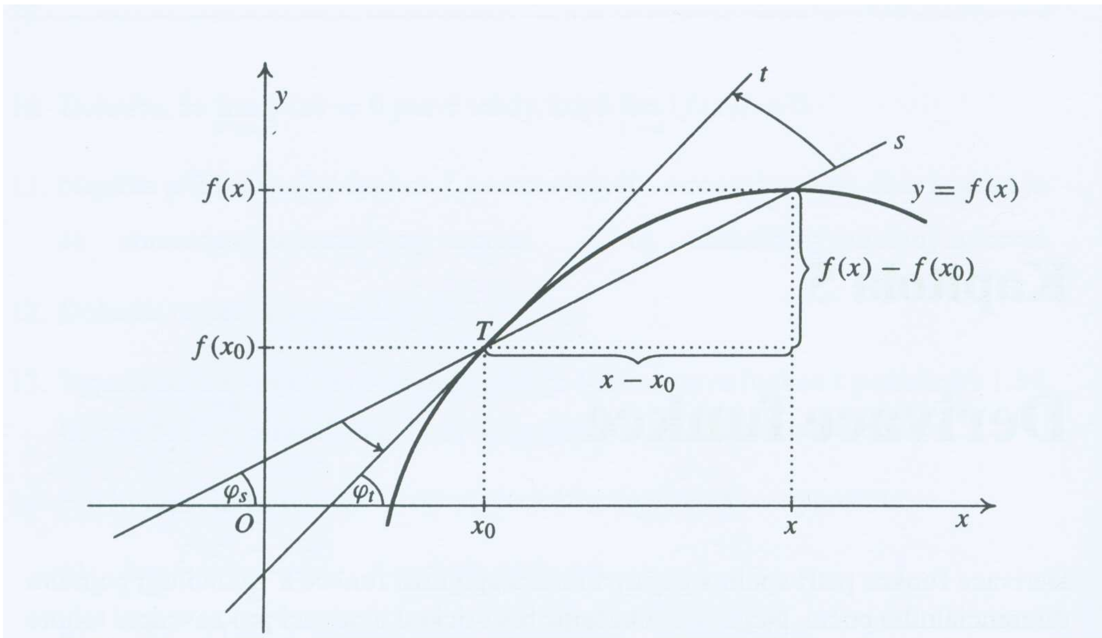
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} ,$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce f(x) v bodě* x_0 *a značíme* $f'(x_0)$

Poznámky.

1. Obdobně nazýváme $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *derivací funkce f(x) bodě* x_0 *zleva, značíme* $f'^-(x_0)$ a $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *derivací funkce f(x) bodě* x_0 *zprava, značíme* $f'^+(x_0)$.

2. Geometrický význam derivace je patrný z následujícího obrázku.



Definice.
Buď f(x) funkce, x_0 bod. Přímku t, která prochází bodem T=$[x_0, f(x_0)]$ a má směrnici f'(x_0) nazýváme *tečnou* ke grafu funkce y=f(x) v bodě T. Její rovnice je

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0).$$

Přímku n, procházející bodem T kolmo k tečně t nazýváme *normálou* ke grafu funkce y=f(x) v bodě T. Je-li $f'(x_0) \neq 0$, má normála rovnici

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Je-li $f'(x_0) = 0$, má normála rovnici $x = x_0$.

Věta. (pravidla pro počítání s derivacemi)
Nechť funkce f,g mají na množině M derivaci. Pak pro všechny body $x \in M$ *platí:*

$$[cf(x)]' = cf'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{pro } g(x) \neq 0$$

Věta (o derivaci složené funkce)
Nechť funkce $u = g(x)$ *má derivaci v bodě* x_0 *a nechť funkce* $f(u)$ *má derivaci v bodě* $u_0 = g(x_0)$. *Pak složená funkce* $h(x) = f[g(x)]$ *má derivaci v bodě* x_0 *a platí*

$$h'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) \; .$$

Poznámka. Tedy v obecném bodě lze psát $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$.

Věta (přehled vzorců pro derivování)
Pro derivace elementárních funkcí platí:

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{cotg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
$c' = 0$	$(x^s)' = sx^{s-1} \quad , s \in \mathbf{R}$

Tyto vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definovány.
Poznámka. Na další vztahy se dívejte jako na návod k počítání, nejsou to vzorce k zapamatování. Jedná se o derivaci tzv. „funkce na funkci".

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\right)\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \left(f(x)^{g(x)}\right)\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Poznámka. Na příkladu funkce $\arcsin x$ uveďme jednoduchý výpočet derivace inverzní funkce. Platí

$\sin(\arcsin x) = x$ celý vztah derivujeme:

$\cos(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)' = 1$ a odtud vypočteme

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Příklady.

V následujících příkladech vypočítejte první derivaci funkce y = f(x).

1. $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 2x^2 + 2}$ $\quad y' = \dfrac{2x(x^3 - 2x^2 + 2) - x^2(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 + 2)^2} = \dfrac{-x^4 + 4x}{(x^3 - 2x^2 + 3)^2}$

2. $y = (x^2 + 3x - 2)\cos x$ $\quad y' = (2x + 3)\cos x - (x^2 + 3\cos x - 2)\sin x$

3. $y = x\sqrt{1+x^2}$

$$y' = 1\cdot\sqrt{1+x^2} + x\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

4. $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$ $\quad y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = e^x x^2$

5. $y = \sin^2(x^3 - x + 2)$

$$y' = 2\sin(x^3 - x + 2)\cos(x^3 - x + 2)\cdot(3x^2 - 1) = (3x^2 - 1)\cdot\sin(2(x^3 - x + 2))$$

6. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ **.** Funkci upravíme $y = \ln\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$ a pak derivujeme

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{-\cos x\cdot(1+\sin x)-(1-\sin x)\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x}$$

7. $y = x^x$ **.** Funkci upravíme na tvar $y = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x\cdot\ln x}$ a pak derivujeme:

$$y' = e^{x\cdot\ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\cdot(1+\ln x)$$

8. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$

$$y' = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2-(1-x^2)}{1-x^4} = \frac{x^2}{1-x^4}$$

9. Vypočtěte čtvrtou derivaci funkce $y = x^3\ln x$.

$$y' = 3x^2\ln x + x^3\cdot\frac{1}{x} = 3x^2\ln x + x^2$$

$$y'' = 6x\ln x + 3x^2\cdot\frac{1}{x} + 2x = 6x\ln x + 5x$$

$$y''' = 6\ln x + 6x\cdot\frac{1}{x} + 5 = 6\ln x + 11$$

$$y^{(4)} = \frac{6}{x}$$

V následujících příkladech určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce y=f(x) v bodě T=[$x_0, f(x_0)$].

10. $f(x) = xe^{2x}$, $T = [-1,?]$

Nejprve spočteme druhou souřadnici bodu T: f(-1) = $-e^{-2}$, $T = [-1,-e^{-2}]$

Dále spočteme derivaci funkce f(x):

$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$ a její hodnotu v bodě -1:

$f'(-1) = e^{-2} - 2e^{-2} = -e^{-2}$

Rovnice tečny je t: $y + e^{-2} = -e^{-2}(x+1)$,

Rovnice normály je n: $y + e^{-2} = e^2(x+1)$

11. $f(x)=(x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$, $T=[2,?]$

$f(2)=3\cdot\sqrt[3]{3-2}=3$, $T=[2,3]$

$$f'(x)=\sqrt[3]{3-x}+(x+1)\frac{-1}{3\cdot\sqrt[3]{(3-x)^2}}$$

$f'(2)=1-1=0$

tečna t má rovnici: y = 3 , normála n má rovnici: x = 2

Extrémy a monotónnost funkcí.

Definice.
Říkáme, že funkce f(x) má v bodě x_0 ***lokální maximum*** [respektive ***lokální minimum***], jestliže existuje takové $\delta>0$, že funkce f(x) je definována na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ a platí $f(x)\le f(x_0)$ [respektive $f(x)\ge f(x_0)$] pro všechna $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Poznámka.
Pokud nerovnosti v předchozí definici jsou pro $x\neq x_0$ ostré, mluvíme o ***vlastním lokálním maximu*** [respektive o ***vlastním lokálním minimu***].

Definice.
Řekneme, že funkce f(x) má ***absolutní maximum*** [respektive ***absolutní minimum***] na množině M v bodě $x_0\in M$, jestliže je funkce f(x) definována na množině M a platí $f(x)\le f(x_0)$
[respektive $f(x)\ge f(x_0)$] pro všechna $x\in M$.

Věta. (Monotónnost funkce na intervalu)
Nechť funkce f(x) je spojitá na intervalu I a nechť I_0 je množina všech vnitřních bodů intervalu I. Nechť funkce f(x) má na intervalu I_0 derivaci.
Jestliže $f'(x)>0$ [respektive $f'(x)\ge 0$] pro $x\in I_0$,,potom f(x) je rostoucí [respektive neklesající] na intervalu I.
Jestliže $f'(x)<0$ [respektive $f'(x)\le 0$] pro $x\in I_0$,,potom f(x) je klesající [respektive nerostoucí] na intervalu I.

Věta.
Nechť funkce f(x) má v bodě x_o lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_o)$. Pak je $f'(x_o)=0$.

Poznámka. Funkce může mít lokální extrém jen v bodech, ve kterých je její první derivace rovna nule, nebo v nichž první derivace neexistuje.

Věta. *Nechť $f'(x_0)=0$. Je-li $f''(x_0)>0$ [respektive je-li $f''(x_0)<0$], má funkce f(x) v bodě x_0 lokální minimum [respektive lokální maximum].*

Věta. *Nechť $f'(x_0)=0$ a nechť existuje $\delta>0$ tak, že pro $x\in(x_0-\delta, x_0)$ je $f'(x)$ definována a platí $f'(x)<0$ [respektive $f'(x)>0$] a pro $x\in(x_0, x_0+\delta)$ je $f'(x)$ definována a platí $f'(x)>0$ [respektive $f'(x<0)$].Potom má funkce f(x) v bodě x_0 lokální minimum [respektive lokální maximum].*
Věta. *Buď f(x) funkce definovaná na intervalu J a nechť má v bodě $x_0\in J$ absolutní extrém. Pak x_0 je koncový bod intervalu nebo má funkce f(x) v bodě x_0 lokální extrém.*

Příklady.

V následujících příkladech určete intervaly monotonnosti a lokální extrémy funkce f(x).

1. $f(x) = 3x - x^3$

$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1-x)(1+x)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

interval	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
f'	-	+	-
f	klesá	roste	klesá

f(-1) = -2 je lokální minimum , f(1) = 2 je lokální maximum

2. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

interval	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
f'	-	+	-
f	klesá	roste	klesá

f(-1) = -1 je lokální minimum , f(1) = 1 je lokální maximum

3. Určete absolutní extrémy funkce f(x) = $x^3 - 2x^2 + x - 1$ na intervalu <0,4>.

Nejprve určíme lokální extrémy:

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \begin{cases} 1/3 \\ 1 \end{cases} \qquad f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$$

interval	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	$(1,\infty)$
f'	+	-	+
f	roste	klesá	roste

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{23}{27}$ je lokální maximum , f(1) = -1 je lokální minimum

Nyní spočteme funkční hodnoty v koncových bodech intervalu <0,4>.

f(0) = -1 , f(4) = 35 a porovnáme je s lokálními extrémy.

Absolutní maximum je f(4) = 35, absolutní minima jsou f(0) = f(1) = -1.

Konvexita a konkávnost funkce. Inflexní body.

Přesná definice konvexity a konkávnosti a průběhu funkce nad tečnou a pod tečnou viz DSO str. 144-149.

Definice.
Řekneme, že funkce f(x) probíhá v bodě x_0 ***nad tečnou*** [respektive ***pod tečnou***], když existuje takové $\delta > 0$, že na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je definována funkce

$$\Phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

a $\Phi(x) > 0$ [respektive $\Phi(x) < 0$] pro $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.
Řekneme, že bod x_0 je ***inflexním bodem*** funkce f(x), jestliže
$\Phi(x) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $\Phi(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x \ \ + \delta)$ nebo
$\Phi(x) < 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $\Phi(x) > 0$ pro $x \in (x_0, x \ \ + \delta)$

.
Poznámky.
1. Názorně lze říct, že funkce probíhá v daném bodě nad tečnou, jestliže v jistém okolí tohoto bodu leží všechny body grafu funkce nad grafem tečny.
   Funkce má v daném bodě inflexní bod, jestliže v něm její graf přechází „ z pod tečny nad tečnu“ nebo „z nad tečny pod tečnu“.
2. Pro naše účely můžeme pojem konvexní ztotožnit s pojmem leží nad tečnou, pojem konkávní ztotožnit s pojmem leží pod tečnou.

Věta. *Nechť I je otevřený interval a funkce f(x) mám druhou derivaci na I.*
Je-li $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in I$*, pak je f(x) na I konvexní.*
Je-li $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in I$*, pak je f(x) na I konkávní.*

Věta. *Nechť* x_0 *je je inflexní bod funkce f(x). Existuje-li* $f''(x_0)$*, pak je* $f''(x_0)$ *=0.*

Poznámka. Funkce může mít inflexi pouze v bodech, v nichž je druhá derivace rovna nule nebo v nichž druhá derivace neexistuje.

Věta. *Nechť* $f''(x_0) = 0$ *a nechť existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *je* $f''(x)$ *definována a platí* $f''(x) < 0$ *[respektive* $f''(x) > 0$*] a pro* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ *je* $f''(x)$ *definována a platí* $f''(x) > 0$ *[respektive* $f''(x < 0)$*].Potom má funkce f(x) v bodě* x_0 *inflexi.*

Věta. *Nechť* $f''(x_0) = 0$. *Je-li* $f'''(x_0) \neq 0$, *má funkce f(x) v bodě* x_0 *inflexi.*

Příklady.

V následujících příkladech určete intervaly konvexity a konkávnosti a inflexní body f(x).

1. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$

$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x$

$f''(x) = 12x^2 - 72x + 96 = 12(x^2 - 6x + 8) = 12(x-2)(x-4) = 0$

interval	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$(4;\infty)$
f''	+	-	+
f	konvexní	konkávní	konvexní

f(2) = 62 a f(4) = 206 jsou inflexní body

2. $f(x)=e^{\text{arctg } x}$

$$f'(x)=\frac{e^{\text{arctg } x}}{1+x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{e^{\text{arctg } x}}{1+x^2}\cdot(1+x^2)-e^{\text{arctg } x}\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{e^{\text{arctg } x}}{(1+x^2)^2}\cdot(1-2x)$$

výraz $\frac{e^{\text{arctg } x}}{(1+x^2)^2}$ > 0 pro všechna $x\in\mathbf{R}$ **,** takže znaménko $f''(x)$ závisí pouze na (1-2x)

interval	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
f''	+	-
f	konvexní	konkávní

$f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\text{arctg}(1/2)}\doteq 1{,}589$ je inflexní bod

l'Hospitalovo pravidlo

Věta. *Nechť je splněna jedna z podmínek:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,

2. $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty.$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *, pak existuje také* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí:*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné limity a limity v nevlastních bodech.

Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo se používá pro výpočet limit typu

$\frac{0}{0}$, $\frac{c}{\infty}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ale lze je použít i pro limity typu $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .

Příklady.

Vypočítejte limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{4x^2+3x-7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-2}{8x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5(1+x)^4-5}{5x^4+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{20(1+x)^3}{20x^3+2}=\dfrac{20}{2}=10$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{-2}{\cos^3 x}\right)\cdot(-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\cos^2 x}=2$

4. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{7}}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2}{3}x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{6}}=\dfrac{2}{3\sqrt[6]{7}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\mathrm{arctg}\,x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{-2}{1+x^2}}{\dfrac{x}{x+1}\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2(x+1)}{x(1+x^2)}=\lim\dfrac{2x^2+2x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+2}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{2}=2$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\left(\dfrac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{-3}{x^2}\right)\cos\left(\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}3\cos\left(\dfrac{3}{x}\right)=3$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot g\,x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x\cdot\sin x-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\cdot\sin x}{\sin x+x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x-x\cdot\cos x}{\cos x+\cos x-x\cdot\sin x}=0$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\ln(1+e^x)}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+e^x)}=e^L$

$L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{e^x}{1+e^x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}=e^1=e$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)\operatorname{arctg} x\right]^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)\operatorname{arctg} x\right]} = e^L$

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)\operatorname{arctg} x\right]}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{-2}{\pi}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x} = \frac{-2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)\operatorname{arctg} x\right]^x = e^{\frac{-2}{\pi}}$$

Asymptoty.

Definice.
Přímku $x = x_0$ nazýváme ***asymptotou bez směrnice*** funkce f(x), jestliže funkce f má v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
Přímku $y = Ax + B$ nazýváme ***asymptotou se směrnicí*** funkce f(x), jestliže platí
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - (Ax + B)\right) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - (Ax + B)\right) = 0.$

Věta.
Přímka $y = Ax + B$ *je asymptotou funkce* f(x) pro $x \to \infty$ *právě tehdy když*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = A \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - Ax\right) = B\ .$$

Přímka $y = Ax + B$ *je asymptotou funkce* f(x) pro $x \to -\infty$ *právě tehdy když*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = A \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - Ax\right) = B$$

Příklady.
V následujících příkladech určete asymptoty funkce f(x).

1. $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

Nejprve určíme asymptoty bez směrnice. Funkce f(x) není definována v bodě $x_0 = 1$

	$(1-\delta,1)$	$(1,1+\delta)$
x^2	+	+
1 - x	+	-

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{1-x} = \infty\ ,\quad \lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{1-x} = -\infty$$

Asymptota bez směrnice je přímka $x = 1$. Dále spočítáme asymptoty se směrnicí:

$$A = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1-x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-1} = -1$$

Výpočet obou limit pro $x \to -\infty$ dává stejné výsledky.

$$B = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1-x} - (-x)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 + x - x^2}{1-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x} = -1$$

Asymptota se směrnicí pro $x \to \infty$ i pro $x \to -\infty$ je přímka $y = -x - 1$.

2. $f(x) = x - 2 \cdot \operatorname{arctg} x$

Funkce je definována pro všechna $x \in \mathbf{R}$, asymptoty bez směrnice neexistují.
Vypočteme asymptotu se směrnicí:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{1+x^2}}{1} = 1 \quad .$$

Výpočet koeficientu A pro $x \to -\infty$ je stejný.

$$B_1 = \lim_{x\to\infty}(x - 2 \cdot \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to\infty}(-2 \cdot \operatorname{arctg} x) = -2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$B_2 = \lim_{x\to-\infty}(x - 2 \cdot \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to-\infty}(-2 \cdot \operatorname{arctg} x) = -2 \cdot \frac{-\pi}{2} = \pi$$

Asymptota se směrnicí pro $x \to \infty$ je $y = x - \pi$,
asymptota se směrnicí pro $x \to -\infty$ je $y = x + \pi$.

3. $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

Funkce není definována v bodě $x_0 = -1$

	$(-1-\delta, -1)$	$(-1, -1+\delta)$
$(x-1)^3$	-	-
$(x+1)^2$	+	+

$$\lim_{x\to-1} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$$

Asymptota bez směrnice je přímka x = -1.
Určíme asymptoty se směrnicí:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 6x + 3}{3x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x - 6}{6x + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{6} = 1$$

$$B = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-10x + 2}{2x + 1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-10}{2} = -5$$

Protože předchozí výpočty zřejmě platí i pro $x \to -\infty$, je přímka $y = x - 5$ asymptotou pro $x \to \infty$ i pro $x \to -\infty$.

Průběh funkce.

Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme takto:

1. Stanovíme definiční obor, zda je funkce sudá, lichá, periodická. Najdeme průsečíky s osami souřadnými a určíme, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Vypočítáme 1. derivaci a podle jejího znaménka určíme, kde je funkce rostoucí a kde je klesající.
3. Určíme lokální extrémy.
4. Vypočítáme 2. derivaci a podle jejího znaménka určíme, kde je gunkce konvexní a kde je konkávní.
5. Určíme inflexní body,
6. Určíme asymptoty bez směrnice a asymptoty se směrnicí.
7. Nakreslíme graf funkce.

Příklady.

V následujících příkladech vyšetřete průběh funkce f(x).

1. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

1. Definiční obor: **R** – {-1,1}

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$$

Funkce je lichá , její graf bude středově souměrný vzhledem k počátku souřadnic.
f(x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = 0 , tedy počátek souřadnice je jediný průsečík grafu funkce se souřadnými osami.
Dále určíme znaménko f(x). Čitatel má trojnásobný kořen x = 0, kořeny jmenovatele x = -1 a x = 1 jsou jednoduché.Tedy

interval	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
funkce	-	+	-	+

2. Vypočteme první derivaci:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2} ,$$

určíme její znaménko a intervaly, kde funkce roste nebo klesá

interval	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
f'	+	-	-	-	-	+
f	roste	klesá	klesá	klesá	klesá	roste

3. Určíme lokální extrémy

$$f(-\sqrt{3})=\frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\doteq-2{,}56$$ je lokální maximum , $$f(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}\doteq 2{,}56$$

je lokální minimum

4.Vypočteme druhou derivaci:

$$f''(x)=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(x^2-1\right)\left[\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)-4x\left(x^4-3x^2\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{4x^5-6x^3-4x^3+6x-4x^5+12x^3}{\left(x^2-1\right)^3}=$$

$$=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

určíme její znaménko a intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní

interval	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
f''	-	+	-	+
f	konkávní	konvexní	konkávní	konvexní

5. Určíme inflexní body: druhá derivace mění znaménko v bodech -1, 0 , 1 , ale protože v bodech -1 a 1 není funkce definována, inflexe v nich nenastane. Inflexní bod je bod x = 0 a funkce v něm nabývá hodnoty f(0) = 0 .

6. Určíme asymptoty bez směrnice. Vyšetříme funkci v okolí bodů nespojitosti x = -1 a x = 1.

interval	$(-1-\delta,-1)$	$(-1,-1+\delta)$	$(1-\delta,1)$	$(1,1+\delta)$
x^3	-	-	+	+
x^2-1	+	-	-	+

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty$$

Asymptoty bez směrnice jsou přímky x = -1 a x = 1 .

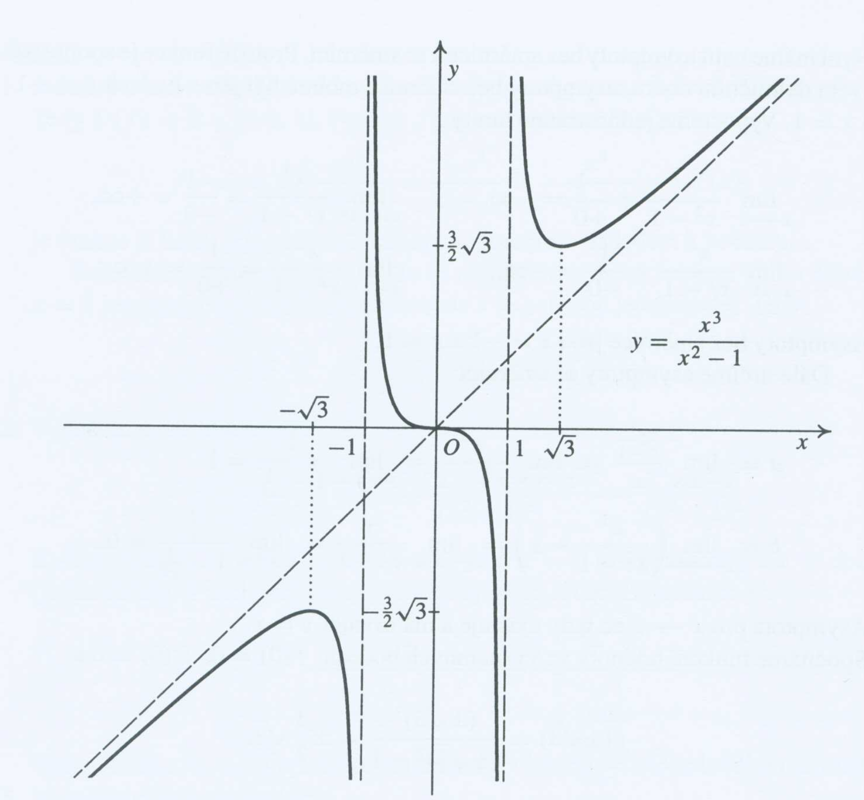
Dále určíme asymptoty se směrnicí:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

$$B=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

Výpočty pro $x\to-\infty$ jsou zřejmě zcela stejné,
Přímka y = x je asymptoutou fukce f(x) pro $x\to\infty$ i pro $x\to-\infty$.

7. Nakreslíme graf funkce.



2. $f(x) = x - 2\text{arctg}\, x$

1. Definiční obor: **R**

   $f(-x) = -x - 2\text{arctg}(-x) = -x + 2\text{arctg}\, x = -f(x)$

   Funkce je lichá, její graf bude středově souměrný vzhledem k počátku souřadnic.

   Rovnici $x - 2\text{arctg}x = 0$ neumíme řešit, víme pouze, že má jeden kořen $x = 0$.

2. Vypočteme první derivaci:

   $$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{1+x^2}$$

   a určíme její znaménko a intervaly, kde funkce roste a kde klesá

interval	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
f'	+	-	+
f	roste	klesá	roste

3. Určíme lokální extrémy:

   $f(1) = 1 - 2\text{arctg}(1) = 1 - \frac{\pi}{2} \doteq 0{,}423$ je lokální maximum

   $f(-1) = -1 - 2\text{arctg} - (1) = -1 + \frac{\pi}{2} \doteq -0{,}423$ je lokální minimum

4.Vypočteme druhou derivaci:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right)'=\frac{2x(1+x^2)-(x^2-1)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

určíme její znaménko a intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní

interval	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
f''	-	+
f	konkávní	konvexní

5. Inflexní bod je bod $x = 0$ a funkce v něm nabývá hodnotu $f(0)=0$.

6. Funkce je spojitá na celém **R**, nemá proto žádné asymptoty bez směrnice.
Dále určíme asymptoty se směrnicí:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{1}=1 \quad .$$

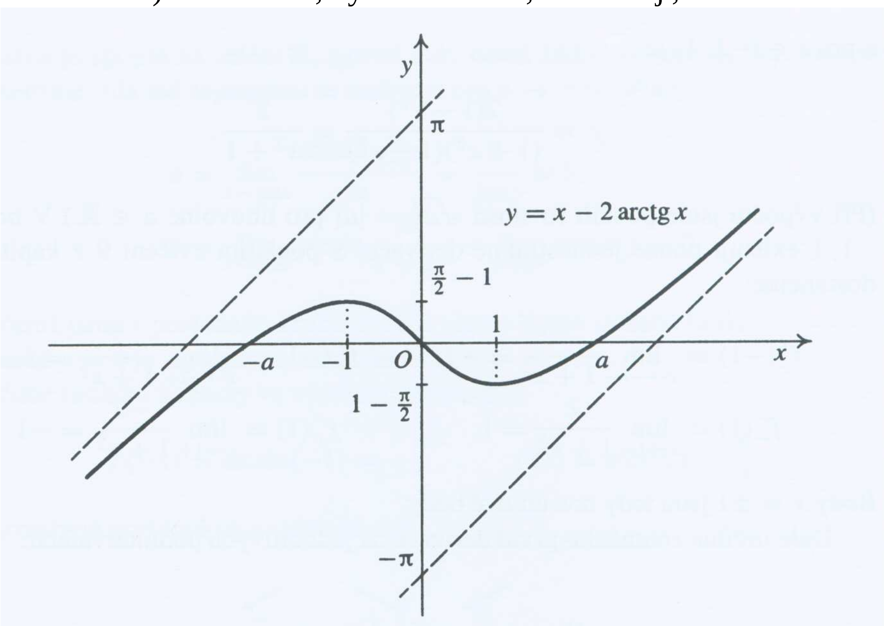
Výpočet koeficientu A pro $x\to-\infty$ je stejný.

$$B_1=\lim_{x\to\infty}(x-2\cdot\operatorname{arctg}x-x)=\lim_{x\to\infty}2\cdot\operatorname{arctg}x=-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi$$

$$B_2=\lim_{x\to-\infty}(x-2\cdot\operatorname{arctg}x-x)=\lim_{x\to-\infty}2\cdot\operatorname{arctg}x=-2\cdot\frac{-\pi}{2}=\pi$$

Asymptota se směrnicí pro $x\to\infty$ je $y=x-\pi$,
asymptota se směrnicí pro $x\to-\infty$ je $y=x+\pi$.

7. Nakreslíme graf funkce.
Z vypočtených hodnot je zřejmé, že graf funkce protíná osu x ve dvou bodech, které označíme -a , a . Neumíme je spočítat (to by bylo třeba udělat numerickými metodami) – viz bod 1, nyní však víme, že existují,



3. $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$

1. Definiční obor: $\mathbf{R} - \{0\}$

   $f(-x) = \dfrac{\ln(-x)^2}{-x} = -\dfrac{\ln x^2}{x} = -f(x)$

   Funkce je lichá, její graf bude středově souměrný vzhleden k počátku souřadnic.

   Řešením rovnice $\dfrac{\ln x^2}{x} = 0$ dostáváme $x^2 = 1$ a odtud $x = \pm 1$.

   Průsečíky grafu funkce s osou x jsou body $[-1,0]$ a $[1,0]$.

   Určíme ještě znaménko funkce:

interval	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
f	-	+	-	+

2. Určíme první derivaci:

   $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{x^2} \cdot x - \ln x^2}{x^2} = \dfrac{2 - \ln x^2}{x^2}$ a položíme ji rovnu 0. Dostaneme

   $\ln x^2 = 2 \iff x = \pm e$ a zjistíme znaménko první derivace v jednotlivých intervalech

interval	$(-\infty,-e)$	$(-e,0)$	$(0,e)$	(e,∞)
f'	-	+	+	-
f	klesá	roste	roste	klesá

3. $f(-e) = -\dfrac{2}{e} \doteq -0{,}74$ je lokální minimum, $f(e) = \dfrac{2}{e} \doteq 0{,}74$ je lokální maximum

4. Druhá derivace je

   $$f''(x) = \left(\frac{2 - \ln x^2}{x^2}\right)' = \frac{-\dfrac{2x}{x^2} \cdot x^2 - \left(2 - \ln x^2\right) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\left(\ln x^2 - 3\right)}{x^3} \quad .$$

   Vypočteme, kde je druhá derivace rovna nule:

   $f''(x) = 0 \iff \ln x^2 = 3 \iff x^2 = e^3 \iff x = \pm\sqrt{e^3} \doteq \pm 4{,}46$

   a určíme její znaménko

interval	$\left(-\infty,-\sqrt{e^3}\right)$	$\left(-\sqrt{e^3},0\right)$	$\left(0,\sqrt{e^3}\right)$	$\left(\sqrt{e^3},\infty\right)$
f''	-	+	-	+
f	konkávní	konvexní	konkávní	konvexní

5. Inflexní body jsou $f\left(-\sqrt{e^3}\right) = -\dfrac{3}{\sqrt{e^3}} \doteq -0{,}67$ a $f\left(\sqrt{e^3}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{e^3}} \doteq 0{,}67$

6. Určíme asymptoty bez směrnice. .

Vyšetříme funkci v okolí bodu $x = 0$, který je jediným bodem její nespojitosti.

interval	$(-\delta, 0)$	$(0, \delta)$
$\ln x^2$	-	-
x	-	+

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln x^2}{x} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x^2}{x} = -\infty$$

Asymptota bez směrnice je přímka $x = 0$.

Najdeme ještě asymptoty se směrnicí:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$B = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Výpočty pro $x \to -\infty$ jsou stejné.

Přímka $y = x$ je asymptotou funkce pro $x \to \infty$ i pro $x \to -\infty$.

7. Nakreslíme graf funkce.