Základní pravidla derivování a integrování

Každá identita uvedená v této tabulce platí pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro něž jsou definovány výrazy na obou stranách rovnice ($a, b, C \in \mathbb{R}$ jsou konstanty).

$$[C.f(x)]' = C.f'(x) \qquad \int C.f(x)\,dx = C.\int f(x)\,dx \tag{1a}$$

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x) \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{1b}$$

$$C' = 0 \qquad \int 0\,dx = C \tag{2}$$

$$F'(x) = [F(x)+C]' = f(x) \qquad \int f(x)\,dx = F(x)+C \tag{3}$$

$$F[\varphi(x)]' = F'(\varphi(x)).\varphi'(x) \qquad \int F'(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] \tag{4}$$

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx \tag{5}$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$\int \frac{u'(x)}{v(x)}\,dx = \frac{u(x)}{v(x)} + \int \frac{u(x)}{v(x)}\frac{v'(x)}{v(x)}\,dx \tag{6}$$

$y = f(x)$ spojitá a ryze monotonní v $\mathcal{O}(x_0) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ je rovněž spojitá a ryze monotonní v $\mathcal{O}(y_0)$, $y_0 := f(x_0)$, a platí:

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{7}$$

Některé rekurentní vztahy získané metodou per-partes (5):

$$K_n := \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad \Rightarrow \qquad K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}K_n + \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n} \tag{8}$$

$$I_n := \int \sin^n x\,dx \qquad \Rightarrow\ I_n = -\frac{1}{n}\cdot\cos x\cdot\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2} \tag{9a}$$

$$I'_k := \int \frac{dx}{\sin^k x} \qquad \Rightarrow\ I'_k = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{k-1}x} + \frac{k-2}{k-1}I'_{k-2} \tag{9b}$$

$$J_n := \int \cos^n x\,dx \qquad \Rightarrow J_n = \frac{1}{n}\cdot\sin x\cdot\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\cdot J_{n-2} \tag{10a}$$

$$J'_k := \int \frac{dx}{\cos^k x} \qquad \Rightarrow J'_k = \frac{1}{k-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{k-1}x} + \frac{k-2}{k-1}J'_{k-2} \tag{10b}$$

Návod:
(8): $u' = 1, v = \frac{1}{(1+x^2)^n}$, (9a): $u' = \sin x, v = \sin^{n-1}x$, (10a): $u' = \cos x, v = \cos^{n-1}x$.
Vyjádříme-li I_{n-2} z (9a) pomocí I_n, kde pak položíme $-k := n-2$ a $I'_k := I_{-k}$, obdržíme (9b). Podobně se odvodí (10b) z (10a).

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \int \cos x \, dx = \sin x \tag{11a}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x \tag{11b}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \tag{12a}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad = -\arccos x \tag{12b}$$

$$(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \text{tg } x \tag{13a}$$

$$(\text{cotg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\text{cotg } x \tag{13b}$$

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \text{arctg } x \tag{14a}$$

$$(\text{arccotg } x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad = -\text{arccotg } x \tag{14b}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad \int e^x \, dx = e^x \tag{15a}$$

$$(a^x)' = (\ln a).a^x \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} \tag{15b}$$

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \tag{15c}$$

$$(x^x)' = x^x(\ln x + 1) \tag{15d}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| \tag{16a}$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad = (\ln a).\log_a|x| \tag{16b}$$

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| \tag{16c}$$

$$(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \tag{16d}$$

$$(x^a)' = a.x^{a-1} \qquad \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \tag{17}$$

n-tá derivace, $n \in \mathbb{N}$:

$$(u(x) \cdot v(x))^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)}(x) \cdot v(x) + \binom{n}{1} u^{(n-1)}(x) \cdot v'(x) + \binom{n}{2} u^{(n-2)}(x) \cdot v''(x) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-1} u'(x) \cdot v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n} u(x) \cdot v^{(n)}(x) \tag{18a}$$

neboli

$$(u(x) \cdot v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x) \cdot v^{(k)}(x), \text{ kde } u^{(0)}(x) := u(x) \text{ a } v^{(0)}(x) := v(x) \tag{18b}$$

$$(x^k)^{(n)} = k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) x^{k-n}, \ n \leq k \in \mathbb{N} \tag{19}$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x \qquad (a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n \qquad (\ln|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \tag{20}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\Big(x + n\frac{\pi}{2}\Big) \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\Big(x + n\frac{\pi}{2}\Big) \tag{21}$$

Některé často potřebné integrály ($0 < b \in \mathbb{R}$):

$$\int \frac{dx}{b^2 + x^2} = \frac{1}{b} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \qquad \int \frac{dx}{b^2 - x^2} = \frac{1}{2b} \cdot \ln\left|\frac{b+x}{b-x}\right| \tag{22}$$

$$\int \sqrt{b^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{b^2 - x^2} + \frac{b^2}{2} \arcsin \frac{x}{b} \tag{23}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{b} \tag{24}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \tag{25}$$

$$\int \frac{x\, dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2} \cdot \ln|a^2 \pm x^2| \qquad \int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} \tag{26}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \tag{27}$$

Popis vlastností:

- Linearita derivace a integrace: viz (1a) a (1b)
- Derivování složené funkce: viz (4)
- Substituční metoda integrace: zavedeme novou proměnnou $u := \varphi(x)$ — viz (4)
- Derivace součinu dvou funkcí: viz (5) a tzv. **Leibnitzův vzorec** (18a), resp. (18b)
- Integrace metodou per-partes: viz (5)
- Derivace podílu dvou funkcí: viz (6)
- Derivace inverzní funkce: viz (7)
- Logaritmická derivace: viz (16c)

Metodika integrování

Integrování (hledání neurčitého integrálu) zadané funkce představuje operaci inverzní k derivování. Zatímco derivování funkcí vzniklých složením elementárních funkcí se řídí jasnými pravidly, v případě integrování je situace složitější. Je totiž třeba tato pravidla aplikovat pozpátku, což je mnohem obtížnější.

V dalším uvedeme přehled základních integračních metod pro nejčastěji užívané typy integrálů. Pokud správně určíme typ zadaného integrálu a aplikujeme kroky odpovídající integrační metody, redukuje se úloha vždy na výpočet integrálů z elementárních funkcí uvedených v předchozí části.

V textu se vyskytují odkazy do skript autorů *V. Novák: Integrální počet v* **R**, *MU Brno, 3. vyd., 2001* a do sbírky příkladů *V.P. Minorskij: Sbírka úloh z vyšší matematiky, SNTL Praha, 1964* Odkazy jsou ve tvaru `[No:č.# s.#]`, resp. `[Min:č.# s.#]`.

Dále užívané označení:

- $\mathcal{J}$ je interval, na němž vyhodnocujeme uvažované integrály.
- $P(x)$, resp. $P(x_1,\dots,x_n)$ je polynom jedné, resp. n proměnných.
- $R(x)$, resp. $R(x_1,\dots,x_n)$ je racionální funkce jedné, resp. n proměnných.

1. Základní integrační metody `[No:odst.1.2 s.5-9]`

1.1. Integrál z lineární kombinace funkcí.

Ze vztahů (1a) a (1b) dostáváme:

$$\boxed{\int (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + \cdots + c_n \int f_n(x)\,dx} \tag{28a}$$

Přitom integrál na levé straně straně existuje na $\mathcal{J}$, pokud zde existují všechny integrály na pravé straně `[No:Věta 2.1 s.5]`.

Příklad použití

Integrál z polynomu: Nechť $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, pak užitím (17)

$$\boxed{\int P(x)\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}} \tag{28b}$$

Další řešené příklady: `[No:Př.2.1 s.5]`

Příklady do cvičení: `[Min:VIII/1 s.125-127]`

1.2. Metoda per-partes.

Jestliže v rovnici (5) mají funkce $u(x)$ a $v(x)$ derivace na $\mathcal{J}$, a existuje zde integrál $\int u(x)v'(x)\,dx$, pak

$$\boxed{\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx} \tag{29}$$

Přitom integrál na levé straně straně existuje na $\mathcal{J}$, pokud na pravé straně existuje integrál $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ `[No:Věta 2.2 s.6]`.

Typické použití

(1) Odvozování rekurentních vztahů typu (8)–(10b). Ty pak užíváme tak, že integrál spočteme pro malou hodnotu n, například integrál K_1 užitím (14a), a pak pomocí rekurentních vztahů postupně počítáme $K_2,\dots,K_n$. Samozřejmě je možno provést výpočet K_n přímo opakovaným použitím metody per-partes. Podobně pro ostatní integrály.

(2) Integrovaná funkce je ve tvaru součinu s polynomem: $\int f(x)P(x)\,dx$, kde

a) $f(x)$ umíme opakovaně integrovat, např. $f(x) = e^{ax}$, $f(x) = \sin ax$, $f(x) = \cos ax$, pak položíme $u'(x) := f(x), v(x) := P(x)$ a vícenásobným užitím per-partes postupně dostáváme integrály téhož typu, kde se stupeň polynomu snižuje až na nulu, tj. po posledním kroku je roven konstantně a získaný integrál je již integrálem, který umíme spočíst.
b) $f(x)$ neumíme opakovaně integrovat, ale pouze derivovat; pak obvykle opačná volba $u'(x) := P(x), v(x) := f(x)$ vede po jednom nebo vícenásobném použití per-partes k jinému typu integrálu, který umíme řešit. Je tomu tak například u integrálů, kde $f(x) = \operatorname{arctg} x$ nebo $f(x) = (\ln x)^n$, které vedou na integrál z racionální funkce (viz odst. 2).

Řešené příklady: `[No:Př.2.2-2.4 s.6-7]`
Příklady do cvičení: `[Min:VIII/4 s.131-132]`.

1.3. **Substituční metoda.**
1. varianta
Položíme-li ve (4) $f(t) := F'(t)$ na intervalu $\mathcal{J}'$ a $t := \varphi(x)$ na $\mathcal{J}$, kde $\varphi(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}'$, dostaneme vztah pro integraci substitucí ve tvaru

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt =: F(t), \text{ kde dosadíme } t = \varphi(x), x \in \mathcal{J}} \tag{30a}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že $f(t)$ musí mít primitivní funkci $F(t)$ na $\mathcal{J}'$ (k tomu stačí podle `[No:věta 1.2 s.2]`, aby f byla na $\mathcal{J}$ spojitá) a $\varphi(x)$ musí mít derivaci na $\mathcal{J}$ `[No:věta 2.3 s.7]`. Uvážíme-li, že $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)\,dx$, vidíme, že integrál vpravo dostaneme z integrálu vlevo formálním dosazením $\varphi(x) =: t$ a $\varphi'(x)\,dx =: dt$.
2. varianta
Nechť $\varphi(\mathcal{J}) = \mathcal{J}'$, pak záměnou role $t \leftrightarrow x$ a pravé a levé strany v (30a) dostáváme

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt, \text{ kde dosadíme } t = \psi(x), x \in \mathcal{J}'} \tag{30b}$$

pro libovolnou funkci $\psi(x)$ definovanou na $\mathcal{J}'$ takovou, že $\varphi(\psi(x)) = x$ pro každé $x \in \mathcal{J}'$ (neboli $\psi(x) \in \varphi^{-1}(\{x\})$). V případě, že $\varphi'(t) \neq 0$ na $\mathcal{J}$, pak φ je ryze monotonní[1] na $\mathcal{J}$ a tedy $\psi(x) := \varphi^{-1}(x)$ je jediná možná volba (viz `[No:věta 2.4 s.8]`).

Řešené příklady: `[No:Př.2.5-2.6 s.7-9]`
Příklady do cvičení: `[Min:VIII/2 s.127-130]`.

[1]Stačí ověřit, že $\varphi'(t) > 0$ nebo $\varphi'(t) < 0$ všude na $\mathcal{J}$. Předpokládejme opak. Kdyby existovaly body $t_1, t_2 \in \mathcal{J}, t_1 < t_2 : \varphi'(t_1)\varphi'(t_2) < 0$, pak existuje $\xi \in [t_1, t_2]$, kde nabývá φ maxima nebo minima dle Weierstrasseovy věty (je zde totiž spojitá, neboť zde má všude derivaci); takový bod nemůže být vnitřním bodem $\mathcal{J}$, protože funkce by zde měla lokální extrém a tudíž i nulovou derivaci, což není možné. Je-li $\varphi'(t_1) > 0$ a $\varphi'(t_2) < 0$, tak φ je v pravém okolí t_1 rostoucí a v levém okolí t_2 klesající, tj. $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ musí být minimum. Dle Rolleovy věty pak má φ nulovou derivaci v nějakém vnitřním bodě, spor. Podobně se vyšetří případ $\varphi'(t_1) < 0$ a $\varphi'(t_2) > 0$.

2. Integrování racionálních funkcí [No:odst.1.3 s.10-12]

2.1. První speciální případ.

$$\boxed{I := \int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx,\ n \in \mathbb{N}} \tag{31a}$$

řešíme substitucí $x - \alpha = t,\ dx = dt$:

$$I = A\int \frac{1}{t^n}\,dt = \begin{cases} A\ln|t| & = A\ln|x-\alpha| \text{ pro } n = 1 \\ A\frac{t^{-n+1}}{-n+1} & = \frac{A}{1-n}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} \text{ pro } n > 1. \end{cases}$$

2.2. Druhý speciální případ.

$$\boxed{I := \int \frac{Bx+C}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,dx,\ b \neq 0,\ n \in \mathbb{N}} \tag{31b}$$

Postup řešení:

(1) Čitatel vyjádříme pomocí derivace výrazu $((x-a)^2+b^2)' = 2(x-a) = 2x-2a$ vystupujícím ve jmenovateli

$$Bx + C = \frac{B}{2}(2x-2a) + Ba + C.$$

(2) Integrál I rozložíme na součet dvou integrálů:

$$I \;= \underbrace{\frac{B}{2}\int \frac{2x-2a}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,dx}_{I_1} + \underbrace{(Ba+C)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}}_{I_2}.$$

(3) Integrál I_1 spočteme pomocí substituce $(x-a)^2+b^2 = t,\ (2x-2a)dx = dt$:

$$I_1 = \frac{B}{2}\int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} \frac{B}{2}\ln|t| & = \frac{B}{2}\ln((x-a)^2+b^2) \text{ pro } n = 1 \\ \frac{B}{2}\frac{t^{-n+1}}{-n+1} & = \frac{B}{2(1-n)}\frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}} \text{ pro } n > 1. \end{cases}$$

(4) Integrál I_2 spočteme pomocí substituce $(x-a) = t\,b,\ dx = b\,dt$:

$$I_2 = (Ba+C)\int \frac{b\,dt}{(t^2b^2+b^2)^n} = \frac{Ba+C}{b^{2n-1}}\underbrace{\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}}_{K_n}.$$

Pokud je $n > 1$, snižujeme při výpočtu K_n jeho řád n opakovaným užitím rekurentního vzorce (8), až dostaneme integrál $K_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} \overset{(14a)}{=} \operatorname{arctg} t$. V obdrženém výrazu za proměnnou t dosadíme zpět $t = \frac{x-a}{b}$.

2.3. Obecný případ.

$$\boxed{I = \int R(x)\,dx} \tag{31c}$$

Postup řešení:

(1) $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ rozložíme dle algoritmu dělení se zbytkem: $P(x) = Q(x)S(x) + T(x)$.

Odtud po vydělení polynomem $Q(x)$ dostáváme

$$I = \int R(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int S(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{T(x)}{Q(x)}\,dx}_{I_2},$$

kde $S(x)$ je polynom a $\frac{T(x)}{Q(x)}$ je ryze lomená racionální funkce.
Poznamenejme, že $S(x) \equiv 0$ a $T(x) = P(x)$, pokud $\mathrm{st}P(x) < \mathrm{st}Q(x)$, tj. pokud $R(x)$ již byla přímo ryze lomená.
(2) Spočteme integrál I_1 podle vztahu (28b).
(3) $\frac{T(x)}{Q(x)}$ rozložíme na parciální zlomky $\frac{T(x)}{Q(x)} = R_1(x) + \cdots + R_m(x)$.
(4) Spočteme

$$I_2 \overset{(28a)}{=} \int R_1(x)\,dx + \cdots + \int R_m(x)\,dx,$$

kde každý z integrálů $\int R_j(x)\,dx$, $j = 1, \dots, m$ je již některého ze speciálních typů (31a) nebo (31b).

Řešené příklady: `[No:Př.3.1 s.11-12]`
Příklady do cvičení: `[Min:VIII/6 s.133-135]`.

3. Integrování jiných funkcí `[No:odst.1.4 s.12-17]`

3.1. **Integrace některých iracionálních algebraických funkcí.**

3.1.1. *Typ I.*

$$\boxed{\int R\left(x^m, \left(\frac{a\,x^m + b}{c\,x^m + d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{a\,x^m + b}{c\,x^m + d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) x^{m-1}\,dx;\ p_i, q_i \in \mathbb{Z},\ m, n \in \mathbb{N}} \qquad (32a)$$

kde $R(x_0, x_1, \dots, x_n)$ je racionální funkce $n+1$ proměnných. Tato funkce nemusí záviset na x_0, takže zahrnuje i případ racionální funkce $R(x_1, \dots, x_n)$ o n proměnných.

Postup řešení:
(1) Najdeme nejmenší společný násobek $s \in \mathbb{N}$ čísel $q_1, \dots, q_n$.
(2) Provedeme substituci

$$\frac{a\,x^m + b}{c\,x^m + d} = t^s, \text{ odkud } x^m = \frac{d\,t^s - b}{-c\,t^s + a},\ x^{m-1}dx = \frac{1}{m}\left(\frac{d\,t^s - b}{-c\,t^s + a}\right)' dt.$$

(3) Touto substitucí přejde (32a) v integrál z racionální funkce, který řešíme dle odst. 2. Po jeho nalezení dosadíme zpět $t = \sqrt[s]{\frac{a\,x^m+b}{c\,x^m+d}}$.

Speciální případy:
(i) $m = 1, a = d = 1, b = c = 0$ se substitucí $x = t^s, dx = st^{s-1}\,dt$:

$$\boxed{\int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}})\,dx;\ p_i, q_i \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}} \qquad (32b)$$

(ii) $m = n = 1, a = d = 1, b = c = 0, p_1 = 1, q_1 = s$ se substitucí $x = t^s, dx = st^{s-1}\,dt$:

$$\boxed{\int R(x, \sqrt[s]{x})\,dx} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\int R(\sqrt[s]{x})\,dx} \qquad (32c)$$

(iii) $m = n = 1, p_1 = 1, q_1 = s$ se substitucí jako v kroku (2) pro (32a) při $m = 1$:

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}\right)dx} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\int R\left(\sqrt[s]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}\right)dx} \tag{32d}$$

(iv) $m = n = 1, p_1 = 1, q_1 = s = 1, c \neq 0$:

$$\boxed{\int \frac{a\,x+b}{c\,x+d}\,dx} \tag{32e}$$

Tento integrál trikově upravíme na součet dvou integrálů:

$$\int \frac{a\,x+b}{c\,x+d}\,dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}\,dx = \underbrace{\frac{a}{c}\int dx}_{I_1} + \underbrace{\left(b-\frac{ad}{c}\right)\int \frac{dx}{cx+d}}_{I_2},$$

kde $I_1 = \frac{a}{c}x$ a druhý snadno spočteme substitucí $cx+d = t, c\,dx = dt$, což dává $I_2 = \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)\ln|cx+d|$.

Řešené příklady: `[No:Př.4.1-4.2 s.12-13]`
Příklady do cvičení: `[Min:VIII/7 s.135-137]`.

3.1.2. *Typ II.*

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx;\ a\neq 0} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\int R\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx;\ a\neq 0} \tag{33a}$$

kde $R(x,y)$, resp. $R(y)$ je racionální funkce dvou, resp. jedné proměnné. Poznamenejme, že pro $a = 0$ je (33a) speciálním případem (32d).

Postup řešení:
Můžeme užít některou z následujících tří tzv. **Eulerových substitucí** (E1)-(E3):
(1) Má-li ax^2+bx+c reálné kořeny α, β, pak $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ a můžeme pro $x \neq \alpha$ užít substituci

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t} \tag{E1}$$

Dále postupujeme takto:
(a) Vztah (E1) umocníme na druhou a dále upravíme tak, abychom vyjádřili $x-\alpha$ pomocí substituční proměnné t:

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = ax^2+bx+c = (x-\alpha)^2t^2 \Rightarrow a[(x-\alpha)+(\alpha-\beta)] = (x-\alpha)t^2,$$

Odtud

$$x-\alpha = \frac{a(\alpha-\beta)}{t^2-a},\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}$$

a

$$dx = a(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{t^2-a}\right)'dt = a(\beta-\alpha)\frac{2t}{(t^2-a)^2}dt.$$

(b) Výše uvedenou substitucí přejde (33a) opět v integrál z racionální funkce, který řešíme dle odst. 2. Po jeho nalezení dosadíme zpět $t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\alpha}$.

(2) Je-li $a > 0$, pak můžeme užít substituci

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t}, \tag{E2}$$

kde znaménka $\pm$ zvolíme tak, aby v daném konkrétním případě byl výpočet co nejjednodušší. Dále postupujeme analogicky jako v předchozím případě:

(a) Vztah (E2) umocníme na druhou a dále upravíme tak, abychom vyjádřili x a dx pomocí substituční proměnné t:

$$ax^2+bx+c = (\pm\sqrt{a}x\pm t)^2 = ax^2\pm 2\sqrt{a}xt+t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}\,t},\ dx = \Big(\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}\,t}\Big)'dt,$$

a odtud dále dosazením x do (E2)

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}\,t}\pm t.$$

(b) Výše uvedenou substitucí přejde (33a) opět v integrál z racionální funkce, který řešíme dle odst. 2. Po jeho nalezení dosadíme zpět $t = \mp(\sqrt{ax^2+bx+c}\mp\sqrt{a}x)$.

(3) Je-li $a < 0$, pak pro $x \neq 0$ můžeme užít substituci

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}}, \tag{E3}$$

kde znaménka $\pm$ zvolíme opět tak, aby v daném konkrétním případě byl výpočet co nejjednodušší. Dále postupujeme analogicky jako v předchozím případě:
(a) Vztah (E3) umocníme na druhou a dále upravíme tak, abychom vyjádřili x a dx pomocí substituční proměnné t:

$$ax^2+bx+c = (\pm xt\pm\sqrt{c})^2 = x^2t^2\pm 2\sqrt{c}xt+c \Rightarrow x = \frac{b\mp 2\sqrt{c}\,t}{t^2-a},\ dx = \Big(\frac{b\mp 2\sqrt{c}\,t}{t^2-a}\Big)'dt.$$

a odtud dále dosazením x do (E3)

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\frac{bt\mp 2\sqrt{c}\,t^2}{t^2-a}\pm\sqrt{c}.$$

(b) Výše uvedenou substitucí přejde (33a) opět v integrál z racionální funkce, který řešíme dle odst. 2. Po jeho nalezení dosadíme zpět $t = \mp\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}\mp\sqrt{c}}{x}$.

Uvedeme dále některé speciální případy integrálu typu (33a), které lze řešit pomocí jiných substitucí, které zjednoduší počítání oproti užití Eulerových substitucí.
1. speciální případ

$$\boxed{I := \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}} \tag{33b}$$

Řešíme úpravou výrazu pod odmocninou na součet čtverců. Nastanou dvě možnosti:
(1) $a > 0$:

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}.$$

Označíme-li $k := \frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$, pak substitucí $t = x+\frac{b}{2a}, dt = dx$ dostaneme

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{t^2+k} \overset{(24)}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|t+\sqrt{t^2+k}|,$$

kde za k a t dosadíme zpět.
(2) $a < 0$:

$$I = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}-(x+\frac{b}{2a})^2}}.$$

Konstanta $k^2 := \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ musí být kladná, neboť jinak výraz pod odmocninou by byl všude záporný a tudíž odmocnina by v reálném oboru nebyla nikde definována. Pak substituce $t = x + \frac{b}{2a}, dt = dx$ vede na

$$I = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \overset{(24)}{=} \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{t}{k},$$

kde opět za k a t dosadíme zpět.

<u>2. speciální případ</u>

$$\boxed{I := \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx} \tag{33c}$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně $n > 0$. Postupujeme následovně:
(1) Integrál I vyjádříme formálně ve tvaru

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = (A_0 x^{n-1} + \cdots + A_{n-2}x + A_{n-1})\sqrt{ax^2 + bx + c} + \\ + A_m \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

(2) Toto vyjádření zderivujeme a pak vynásobíme odmocninou $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Obdržíme:

$$P_n(x) = [(A_0 x^{n-1} + \cdots + A_{n-2}x + A_{n-1})\sqrt{ax^2 + bx + c}]' \sqrt{ax^2 + bx + c} + A_m.$$

(3) Výpočtem snadno ověříme, že vpravo je rovněž polynom stupně n závislý na $n+1$ neznámých parametrech $A_0, \ldots, A_n$. Tyto parametry vypočteme porovnaním koeficientů u stejných mocnin polynomů vlevo a vpravo.
(4) $A_0, \ldots, A_n$ dosadíme do vyjádření z kroku (1), kde integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ je již známého typu (33b).

<u>3. speciální případ</u>

$$\boxed{\int \frac{dx}{(Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c}}, A \neq 0} \text{ nebo } \boxed{\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}} \tag{33d}$$

kde druhý z integrálů je zřejmě speciálním případem prvního při $A = 1, B = 0$. Budeme se proto zabývat jen prvním integrálem. Pro $x \neq -\frac{B}{A}$ vede substituce

$$Ax + B = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{A}\Big(\frac{1}{t} - B\Big),\ dx = -\frac{dt}{At^2}$$

opět na integrál typu (33b), po jehož spočtení dosadíme zpět za $t = \frac{1}{Ax+B}$.

<u>4. speciální případ (Goniometrické substituce)</u>

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{c^2 - x^2})} \text{ nebo } \boxed{\int R(x, \sqrt{c^2 + x^2})} \tag{33e}$$

Tyto integrály jsou speciálním případem (33a), kde c nahradíme kladnou konstantou $c^2 > 0$ a $a = \pm 1$. Provedení substituce $x = c.\sin t, dx = c.\cos t\, dt$ pro první integrál, resp. $x = c.\mathrm{tg}\ t, dx = c\frac{dt}{\cos^2 t}$ pro druhý integrál, vede na integrál typu $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$, jehož řešení je popsáno v následujícím odstavci 3.2.

Řešené příklady: [No:Př.4.3 s.13-14]
Příklady do cvičení: [Min:VIII/7 s.135-137].

3.1.3. *Typ III (Binomický integrál).*

$$\boxed{I := \int x^m (a+bx^n)^p \, dx, \ \ a,b,m,n,p \in \mathbb{R}} \tag{34}$$

Mohou nastat tyto případy:
(1) $p \in \mathbb{N}$: Výraz $(a+bx^n)^p$ rozvineme podle binomické věty, po roznásobení jeho součinu s x^m dostaneme lineární kombinaci mocninných funkcí. Její integrál spočteme užitím (28a) a (17).
(2) $p \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}, \ m,n,p \in \mathbb{Q}, p := \frac{r}{s}$: Substituce $z = x^n, x = z^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} \, dz$ dává

$$I = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m}{n}}.(a+bz)^{\frac{r}{s}}.z^{\frac{1}{n}-1} \, dz = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1}.(\sqrt[s]{a+bz})^r \, dz.$$

a) Jestliže $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, pak tento integrál je typu (32d) a tudíž pokračujeme v řešení substitucí $a + bz = t^s$, která vede na integrál z racionální funkce. Výsledná substituce je tedy $a + bx^m = t^s$.
b) Jestliže $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ a $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, upravíme vyjádření pro I dále takto:

$$I = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}+p-1}.z^{-p}(\sqrt[s]{a+bz})^r \, dz = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}+p-1}.\left(\sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}\right)^r dz.$$

Dostáváme opět integrál typu (32d), takže tentokrát substituce $\frac{a+bz}{z} = t^s$ opět vede na integrál z racionální funkce. Výsledná substituce je tedy $ax^{-n} + b = t^s$.

(3) Ostatní případy: dá se ukázat (Čebyšev), že řešením jsou v tomto případě tzv. vyšší transcendentní funkce: viz [No: s.17].

Řešené příklady: [No:Př.4.5 s.16-17]
Příklady do cvičení: [Min:VIII/7 s.135-137].

3.2. **Integrace goniometrických funkcí.**

3.2.1 Integrál typu

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x) \, dx} \tag{35a}$$

kde $R(x_1, x_2)$ je racionální funkce dvou proměnných.

Postup řešení: Substitucí $\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$ se integrál převede na integrál z racionální funkce.
Ověřme to. Z pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ a 1 dostáváme dle Pythagorovy věty:

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

a odtud užitím známých vzorců:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \overset{(14a)}{\Rightarrow} dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt.$$

Po dosazení do (35a) dostaneme integrál z racionální funkce v proměnné t, po jehož spočtení dosadíme zpět $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Výše uvedenou obecnou substituci lze zjednodušit v těchto speciálních případech:
(1) R je lichá funkce v první proměnné: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
V takovém případě vystačíme se substitucí $\boxed{\cos x = t}$. Pak

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2},\ x = \arccos t,\ dx \overset{(12b)}{=} -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

(2) R je lichá funkce v druhé proměnné: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
V takovém případě vystačíme se substitucí $\boxed{\sin x = t}$. Pak analogicky

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2},\ x = \arcsin t,\ dx \overset{(12a)}{=} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

(3) R je lichá nebo sudá v obou proměnných: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.
V takovém případě vystačíme se substitucí $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$, kdy podobně jako při výše popsané substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ dostáváme vyjádření:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ve všech třech případech přitom dle potřeby užíváme známých goniometrických vzorců

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x.\cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

3.2.2 Integrál typu

$$\boxed{\int \sin mx.\cos nx\,dx} \text{ nebo } \boxed{\int \cos mx.\sin nx\,dx} \text{ nebo } \boxed{\int \sin mx.\sin nx\,dx} \qquad (35b)$$

Převedeme na lineární kombinaci integrálů z goniometrických funkcí (11a) nebo (11b) úpravou integrované funkce pomocí známých součtových vzorců:

$$\begin{aligned}
\sin mx.\cos nx &= \frac{1}{2}[\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)] \\
\cos mx.\cos nx &= \frac{1}{2}[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)] \\
\sin mx.\sin nx &= \frac{1}{2}[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)].
\end{aligned}$$

3.2.3 Integrál typu

$$\boxed{\int \sin^m x.\cos^n x\,dx} \qquad (35c)$$

Jestliže $m, n \in \mathbb{Z}$, pak se jedná o speciální případ (35a).
Jsou-li $m, n \in \mathbb{Q}$, pak substituce $\sin x = t, \cos x\,dx = dt$, dává binomický integrál (34):

$$\int \sin^m x.\cos^n x\,dx = \int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt.$$

Řešené příklady: `[No:Př.4.4 s.14-15]`
Příklady do cvičení: `[Min:VIII/5 s.132-133]`.

3.3. **Integrace některých transcendentních funkcí.**
Jedná se o některé integrály typu

$$\boxed{\int R[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx} \tag{36}$$

kde R je racionální funkce jedné proměnné.
Podle (30a) klademe substituci $t = \varphi(x), dt = \varphi'(x)\,dx$, která vždy vede na integrál z racionální funkce: $\int R(t)\,dt$. Příkladem mohou být integrály:

$$\int \frac{R(\ln|x|)}{x}\,dx, \quad \int \frac{R[\arcsin(x)]}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int \frac{R[\mathrm{arctg}\ (x)]}{1+x^2}\,dx, \quad \int R(e^{ax})\,dx.$$

V posledním případě stačí integrand $R(e^{ax})$ upravit:

$$R(e^{ax}) = \frac{R(e^{ax})}{ae^{ax}} ae^{ax}\,dx.$$

Zlomek v tomto výrazu totiž opět představuje (jinou) racionální funkci.

Příklady do cvičení: `[Min:VIII/8 s.137-138]`.