

Každá identita uvedená v této tabulce platí pro ta  $x \in \mathbb{R}$ , pro něž jsou definovány výrazy na obou stranách rovnice ( $a, b, C \in \mathbb{R}$  jsou konstanty).

$$[C \cdot f(x)]' = C \cdot f'(x) \qquad \int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx \qquad (1a)$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \qquad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \qquad (1b)$$

$$C' = 0 \qquad \int 0 dx = C \qquad (2)$$

$$F'(x) = [F(x) + C]' = f(x) \qquad \int f(x) dx = F(x) + C \qquad (3)$$

$$F[\varphi(x)]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \qquad \int F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] \qquad (4)$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ \int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx \qquad (5)$$

$$\left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \\ \int \frac{u'(x)}{v(x)} dx = \frac{u(x)}{v(x)} + \int \frac{u(x) v'(x)}{v(x)^2} dx \qquad (6)$$

$y = f(x)$  spojitá a ryze monotonní v  $\mathcal{O}(x_0) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$  je rovněž spojitá a ryze monotonní v  $\mathcal{O}(y_0)$ ,  $y_0 := f(x_0)$ , a platí:

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (7)$$

**Některé rekurentní vztahy získané metodou per-partes (5):**

$$K_n := \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad \Rightarrow \qquad K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n + \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n} \qquad (8)$$

$$I_n := \int \sin^n x dx \qquad \Rightarrow \qquad I_n = -\frac{1}{n} \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2} \qquad (9a)$$

$$I'_k := \int \frac{dx}{\sin^k x} \qquad \Rightarrow \qquad I'_k = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1} I'_{k-2} \qquad (9b)$$

$$J_n := \int \cos^n x dx \qquad \Rightarrow \qquad J_n = \frac{1}{n} \cdot \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2} \qquad (10a)$$

$$J'_k := \int \frac{dx}{\cos^k x} \qquad \Rightarrow \qquad J'_k = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1} J'_{k-2} \qquad (10b)$$

Návod:

(8):  $u' = 1, v = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ , (9a):  $u' = \sin x, v = \sin^{n-1} x$ , (10a):  $u' = \cos x, v = \cos^{n-1} x$ .

Vyjádříme-li  $I_{n-2}$  z (9a) pomocí  $I_n$ , kde pak položíme  $-k := n-2$  a  $I'_k := I_{-k}$ , obdržíme (9b). Podobně se odvodí (10b) z (10a).

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \int \cos x \, dx = \sin x \qquad (11a)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x \qquad (11b)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \qquad (12a)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad = -\arccos x \qquad (12b)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x \qquad (13a)$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x \qquad (13b)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x \qquad (14a)$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad = -\operatorname{arccotg} x \qquad (14b)$$

$$(e^x)' = e^x \qquad \int e^x \, dx = e^x \qquad (15a)$$

$$(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} \qquad (15b)$$

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \qquad (15c)$$

$$(x^x)' = x^x (\ln x + 1) \qquad (15d)$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| \qquad (16a)$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad = (\ln a) \cdot \log_a|x| \qquad (16b)$$

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| \qquad (16c)$$

$$(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \qquad (16d)$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1} \qquad \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \qquad (17)$$

$n$ -ta derivace,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(u(x) \cdot v(x))^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)}(x) \cdot v(x) + \binom{n}{1} u^{(n-1)}(x) \cdot v'(x) + \binom{n}{2} u^{(n-2)}(x) \cdot v''(x) + \dots \\ + \binom{n}{n-1} u'(x) \cdot v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n} u(x) \cdot v^{(n)}(x) \quad (18a)$$

neboli

$$(u(x) \cdot v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x) \cdot v^{(k)}(x), \text{ kde } u^{(0)}(x) := u(x) \text{ a } v^{(0)}(x) := v(x) \quad (18b)$$

$$(x^k)^{(n)} = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) x^{k-n}, \quad n \leq k \in \mathbb{N} \quad (19)$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad (a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n \quad (\ln|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \quad (20)$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (21)$$

Některé často potřebné integrály ( $0 < b \in \mathbb{R}$ ):

$$\int \frac{dx}{b^2 + x^2} = \frac{1}{b} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \quad \int \frac{dx}{b^2 - x^2} = \frac{1}{2b} \cdot \ln \left| \frac{b+x}{b-x} \right| \quad (22)$$

$$\int \sqrt{b^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{b^2 - x^2} + \frac{b^2}{2} \arcsin \frac{x}{b} \quad (23)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{b} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (25)$$

$$\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \cdot \ln|a^2 \pm x^2| \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} \quad (26)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \quad (27)$$

**Popis vlastností:**

- Linearita derivace a integrace: viz (1a) a (1b)
- Derivování složené funkce: viz (4)
- Substituční metoda integrace: zavedeme novou proměnnou  $u := \varphi(x)$  — viz (4)
- Derivace součinu dvou funkcí: viz (5) a tzv. **Leibnitzův vzorec** (18a), resp. (18b)
- Integrace metodou per-partes: viz (5)
- Derivace podílu dvou funkcí: viz (6)
- Derivace inverzní funkce: viz (7)
- Logaritmická derivace: viz (16c)



Integrování (hledání neurčitého integrálu) zadané funkce představuje operaci inverzní k derivování. Zatímco derivování funkcí vzniklých složením elementárních funkcí se řídí jasnými pravidly, v případě integrování je situace složitější. Je totiž třeba tato pravidla aplikovat pozpátku, což je mnohem obtížnější.

V dalším uvedeme přehled základních integračních metod pro nejčastěji užívané typy integrálů. Pokud správně určíme typ zadaného integrálu a aplikujeme kroky odpovídající integrační metody, redukuje se úloha vždy na výpočet integrálů z elementárních funkcí uvedených v předchozí části.

V textu se vyskytují odkazy do skript autorů *V. Novák: Integrální počet v R, MU Brno, 3. vyd., 2001* a do sbírky příkladů *V.P. Minorskij: Sbíрка úloh z vyšší matematiky, SNTL Praha, 1964*. Odkazy jsou ve tvaru [No:č.# s.#], resp. [Min:č.# s.#].

Dále užívané označení:

- $J$  je interval, na němž vyhodnocujeme uvažované integrály.
- $P(x)$ , resp.  $P(x_1, \dots, x_n)$  je polynom jedné, resp.  $n$  proměnných.
- $R(x)$ , resp.  $R(x_1, \dots, x_n)$  je racionální funkce jedné, resp.  $n$  proměnných.

## 1. ZÁKLADNÍ INTEGRAČNÍ METODY [No:odst.1.2 s.5-9]

### 1.1. Integrál z lineární kombinace funkcí.

Ze vztahů (1a) a (1b) dostáváme:

$$\int (c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)) dx = c_1 \int f_1(x) dx + \dots + c_n \int f_n(x) dx \quad (28a)$$

Přitom integrál na levé straně existuje na  $J$ , pokud zde existují všechny integrály na pravé straně [No:Věta 2.1 s.5].

Příklad použití

Integrál z polynomu: Necht'  $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , pak užitím (17)

$$\int P(x) dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (28b)$$

Další řešené příklady: [No:Př.2.1 s.5]

Příklady do cvičení: [Min:VIII/1 s.125-127]

### 1.2. Metoda per-partes.

Jestliže v rovnici (5) mají funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  derivace na  $J$ , a existuje zde integrál  $\int u(x)v'(x) dx$ , pak

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx \quad (29)$$

Přitom integrál na levé straně existuje na  $J$ , pokud na pravé straně existuje integrál  $\int u(x) \cdot v'(x) dx$  [No:Věta 2.2 s.6].

Typické použití

(1) Odvozování rekurentních vztahů typu (8)–(10b). Ty pak užíváme tak, že integrál spočteme pro malou hodnotu  $n$ , například integrál  $K_1$  užitím (14a), a pak pomocí rekurentních vztahů postupně počítáme  $K_2, \dots, K_n$ . Samozřejmě je možno provést výpočet  $K_n$  přímo opakovaným použitím metody per-partes. Podobně pro ostatní integrály.

(2) Integrovaná funkce je ve tvaru součinu s polynomem:  $\int f(x)P(x) dx$ , kde

a)  $f(x)$  umíme opakovaně integrovat, např.  $f(x) = e^{ax}$ ,  $f(x) = \sin ax$ ,  $f(x) = \cos ax$ , pak položíme  $u'(x) := f(x)$ ,  $v(x) := P(x)$  a vícenásobným užitím per-partes postupně dostáváme integrály téhož typu, kde se stupeň polynomu snižuje až na nulu, tj. po posledním kroku je roven konstantně a získaný integrál je již integrálem, který umíme spočít.

b)  $f(x)$  neumíme opakovaně integrovat, ale pouze derivovat; pak obvykle opačná volba  $u'(x) := P(x)$ ,  $v(x) := f(x)$  vede po jednom nebo vícenásobném použití per-partes k jinému typu integrálu, který umíme řešit. Je tomu tak například u integrálů, kde  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  nebo  $f(x) = (\ln x)^n$ , které vedou na integrál z racionální funkce (viz odst. 2).

Řešené příklady: [No:Př.2.2-2.4 s.6-7]

Příklady do cvičení: [Min:VIII/4 s.131-132].

### 1.3. Substituční metoda.

#### 1. varianta

Položíme-li ve (4)  $f(t) := F'(t)$  na intervalu  $\mathcal{J}'$  a  $t := \varphi(x)$  na  $\mathcal{J}$ , kde  $\varphi(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}'$ , dostaneme vztah pro integraci substitucí ve tvaru

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f(t) dt =: F(t), \text{ kde dosadíme } t = \varphi(x), x \in \mathcal{J} \quad (30a)$$

Z výše uvedeného vyplývá, že  $f(t)$  musí mít primitivní funkci  $F(t)$  na  $\mathcal{J}'$  (k tomu stačí podle [No:věta 1.2 s.2], aby  $f$  byla na  $\mathcal{J}$  spojitá) a  $\varphi(x)$  musí mít derivaci na  $\mathcal{J}$  [No:věta 2.3 s.7]. Uvážíme-li, že  $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x) dx$ , vidíme, že integrál vpravo dostaneme z integrálu vlevo formálním dosazením  $\varphi(x) =: t$  a  $\varphi'(x) dx =: dt$ .

#### 2. varianta

Nechť  $\varphi(\mathcal{J}) = \mathcal{J}'$ , pak záměnou role  $t \leftrightarrow x$  a pravé a levé strany v (30a) dostáváme

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt, \text{ kde dosadíme } t = \psi(x), x \in \mathcal{J}' \quad (30b)$$

pro libovolnou funkci  $\psi(x)$  definovanou na  $\mathcal{J}'$  takovou, že  $\varphi(\psi(x)) = x$  pro každé  $x \in \mathcal{J}'$  (neboli  $\psi(x) \in \varphi^{-1}(\{x\})$ ). V případě, že  $\varphi'(t) \neq 0$  na  $\mathcal{J}$ , pak  $\varphi$  je ryze monotónní<sup>1</sup> na  $\mathcal{J}$  a tedy  $\psi(x) := \varphi^{-1}(x)$  je jediná možná volba (viz [No:věta 2.4 s.8]).

Řešené příklady: [No:Př.2.5-2.6 s.7-9]

Příklady do cvičení: [Min:VIII/2 s.127-130].

<sup>1</sup>Stačí ověřit, že  $\varphi'(t) > 0$  nebo  $\varphi'(t) < 0$  všude na  $\mathcal{J}$ . Předpokládejme opak. Kdyby existovaly body  $t_1, t_2 \in \mathcal{J}, t_1 < t_2 : \varphi'(t_1)\varphi'(t_2) < 0$ , pak existuje  $\xi \in [t_1, t_2]$ , kde nabývá  $\varphi$  maxima nebo minima dle Weierstrasseovy věty (je zde totiž spojitá, neboť zde má všude derivaci); takový bod nemůže být vnitřním bodem  $\mathcal{J}$ , protože funkce by zde měla lokální extrém a tudíž i nulovou derivaci, což není možné. Je-li  $\varphi'(t_1) > 0$  a  $\varphi'(t_2) < 0$ , tak  $\varphi$  je v pravém okolí  $t_1$  rostoucí a v levém okolí  $t_2$  klesající, tj.  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$  musí být minimum. Dle Rolleovy věty pak má  $\varphi$  nulovou derivaci v nějakém vnitřním bodě, spor. Podobně se vyšetří případ  $\varphi'(t_1) < 0$  a  $\varphi'(t_2) > 0$ .

## 2.1. První speciální případ.

$$I := \int \frac{A}{(x - \alpha)^n} dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad (31a)$$

řešíme substitucí  $x - \alpha = t$ ,  $dx = dt$ :

$$I = A \int \frac{1}{t^n} dt = \begin{cases} A \ln|t| & = A \ln|x - \alpha| \text{ pro } n = 1 \\ A \frac{t^{-n+1}}{-n+1} & = \frac{A}{1-n} \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} \text{ pro } n > 1. \end{cases}$$

## 2.2. Druhý speciální případ.

$$I := \int \frac{Bx + C}{[(x - a)^2 + b^2]^n} dx, \quad b \neq 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (31b)$$

Postup řešení:

(1) Čítec vyjádříme pomocí derivace výrazu  $((x - a)^2 + b^2)' = 2(x - a) = 2x - 2a$  vystupujícím ve jmenovateli

$$Bx + C = \frac{B}{2}(2x - 2a) + Ba + C.$$

(2) Integrál  $I$  rozložíme na součet dvou integrálů:

$$I = \underbrace{\frac{B}{2} \int \frac{2x - 2a}{[(x - a)^2 + b^2]^n} dx}_{I_1} + \underbrace{(Ba + C) \int \frac{dx}{[(x - a)^2 + b^2]^n}}_{I_2}.$$

(3) Integrál  $I_1$  spočteme pomocí substituce  $(x - a)^2 + b^2 = t$ ,  $(2x - 2a)dx = dt$ :

$$I_1 = \frac{B}{2} \int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} \frac{B}{2} \ln|t| & = \frac{B}{2} \ln((x - a)^2 + b^2) \text{ pro } n = 1 \\ \frac{B}{2} \frac{t^{-n+1}}{-n+1} & = \frac{B}{2(1-n)} \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}} \text{ pro } n > 1. \end{cases}$$

(4) Integrál  $I_2$  spočteme pomocí substituce  $(x - a) = tb$ ,  $dx = b dt$ :

$$I_2 = (Ba + C) \int \frac{b dt}{(t^2 b^2 + b^2)^n} = \frac{Ba + C}{b^{2n-1}} \underbrace{\int \frac{dt}{(1 + t^2)^n}}_{K_n}.$$

Pokud je  $n > 1$ , snižujeme při výpočtu  $K_n$  jeho řád  $n$  opakovaným užitím rekurentního vzorce (8), až dostaneme integrál  $K_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} \stackrel{(14a)}{=} \operatorname{arctg} t$ . V obdrženém výrazu za proměnnou  $t$  dosadíme zpět  $t = \frac{x-a}{b}$ .

## 2.3. Obecný případ.

$$I = \int R(x) dx \quad (31c)$$

Postup řešení:

(1)  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  rozložíme dle algoritmu dělení se zbytkem:  $P(x) = Q(x)S(x) + T(x)$ .

Odtud po vydělení  $Q(x)$  dostáváme

$$I = \int R(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \underbrace{\int S(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{T(x)}{Q(x)} dx}_{I_2},$$

kde  $S(x)$  je polynom a  $\frac{T(x)}{Q(x)}$  je ryze lomená racionální funkce.

Poznamenejme, že  $S(x) \equiv 0$  a  $T(x) = P(x)$ , pokud  $\text{st}P(x) < \text{st}Q(x)$ , tj. pokud  $R(x)$  již byla přímo ryze lomená.

(2) Spočteme integrál  $I_1$  podle vztahu (28b).

(3)  $\frac{T(x)}{Q(x)}$  rozložíme na parciální zlomky  $\frac{T(x)}{Q(x)} = R_1(x) + \dots + R_m(x)$ .

(4) Spočteme

$$I_2 \stackrel{(28a)}{=} \int R_1(x) dx + \dots + \int R_m(x) dx,$$

kde každý z integrálů  $\int R_j(x) dx$ ,  $j = 1, \dots, m$  je již některého ze speciálních typů (31a) nebo (31b).

Řešené příklady: [No:Př.3.1 s.11-12]

Příklady do cvičení: [Min:VIII/6 s.133-135].

### 3. INTEGROVÁNÍ JINÝCH FUNKCÍ [No:odst.1.4 s.12-17]

#### 3.1. Integrace některých iracionálních algebraických funkcí.

##### 3.1.1. Typ I.

$$\int R\left(x^m, \left(\frac{ax^m+b}{cx^m+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax^m+b}{cx^m+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) x^{m-1} dx; \quad p_i, q_i \in \mathbb{Z}, \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (32a)$$

kde  $R(x_0, x_1, \dots, x_n)$  je racionální funkce  $n+1$  proměnných. Tato funkce nemusí záviset na  $x_0$ , takže zahrnuje i případ racionální funkce  $R(x_1, \dots, x_n)$  o  $n$  proměnných.

Postup řešení:

(1) Najdeme nejmenší společný násobek  $s \in \mathbb{N}$  čísel  $q_1, \dots, q_n$ .

(2) Provedeme substituci

$$\frac{ax^m+b}{cx^m+d} = t^s, \quad \text{odkud } x^m = \frac{dt^s-b}{-ct^s+a}, \quad x^{m-1}dx = \frac{1}{m} \left( \frac{dt^s-b}{-ct^s+a} \right)' dt.$$

(3) Touto substitucí přejde (32a) v integrál z racionální funkce, který řešíme dle odst. 2.

Po jeho nalezení dosadíme zpět  $t = \sqrt[s]{\frac{ax^m+b}{cx^m+d}}$ .

Speciální případy:

(i)  $m = 1, a = d = 1, b = c = 0$  se substitucí  $x = t^s, dx = st^{s-1} dt$  :

$$\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx; \quad p_i, q_i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (32b)$$

(ii)  $m = n = 1, a = d = 1, b = c = 0, p_1 = 1, q_1 = s$  se substitucí  $x = t^s, dx = st^{s-1} dt$  :

$$\int R\left(x, \sqrt[s]{x}\right) dx \quad \text{nebo} \quad \int R\left(\sqrt[s]{x}\right) dx \quad (32c)$$



(iii)  $m = n = 1, p_1 = 1, q_1 = s = 1, c \neq 0$ : pro (32a) při  $m = 1$ :

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\int R\left(\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx} \quad (32d)$$

(iv)  $m = n = 1, p_1 = 1, q_1 = s = 1, c \neq 0$ :

$$\boxed{\int \frac{ax+b}{cx+d} dx} \quad (32e)$$

Tento integrál trikově upravíme na součet dvou integrálů:

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \underbrace{\frac{a}{c} \int dx}_{I_1} + \underbrace{\left(b - \frac{ad}{c}\right) \int \frac{dx}{cx+d}}_{I_2},$$

kde  $I_1 = \frac{a}{c}x$  a druhý snadno spočteme substitucí  $cx + d = t, c dx = dt$ , což dává  $I_2 = \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right) \ln|cx + d|$ .

Řešené příklady: [No:Př.4.1-4.2 s.12-13]

Příklady do cvičení: [Min:VIII/7 s.135-137].

### 3.1.2. Typ II.

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx; a \neq 0} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\int R(\sqrt{ax^2 + bx + c}) dx; a \neq 0} \quad (33a)$$

kde  $R(x, y)$ , resp.  $R(y)$  je racionální funkce dvou, resp. jedné proměnné. Poznamenejme, že pro  $a = 0$  je (33a) speciálním případem (32d).

Postup řešení:

Můžeme užít některou z následujících tří tzv. **Eulerových substitucí** (E1)-(E3):

(1) Má-li  $ax^2 + bx + c$  reálné kořeny  $\alpha, \beta$ , pak  $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$  a můžeme pro  $x \neq \alpha$  užít substituci

$$\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t} \quad (E1)$$

Dále postupujeme takto:

(a) Vztah (E1) umocníme na druhou a dále upravíme tak, abychom vyjádřili  $x - \alpha$  pomocí substituční proměnné  $t$ :

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^2 t^2 \Rightarrow a[(x - \alpha) + (\alpha - \beta)] = (x - \alpha)t^2,$$

Odtud

$$x - \alpha = \frac{a(\alpha - \beta)}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\alpha - \beta)t}{t^2 - a}$$

a

$$dx = a(\alpha - \beta) \left(\frac{1}{t^2 - a}\right)' dt = a(\beta - \alpha) \frac{2t}{(t^2 - a)^2} dt.$$

(b) Výše uvedenou substitucí přejde (33a) opět v integrál z racionální funkce, který řešíme dle odst. 2. Po jeho nalezení dosadíme zpět  $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - \alpha}$ .

(2) Je-li  $a > 0$ , pak můžeme užít substituci

$$\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{ax} \pm t}, \quad (E2)$$

kde znaménka  $\pm$  zvolíme tak, aby v daném konkrétním případě byl výpočet co nejjednodušší. Dále postupujeme analogicky jako v předchozím případě:

(a) Vztah (E2) umocníme na druhou a dále upravíme tak, abychom vyjádřili  $x$  a  $dx$  pomocí substituční proměnné  $t$ :

$$ax^2 + bx + c = (\pm\sqrt{ax} \pm t)^2 = ax^2 \pm 2\sqrt{ax}t + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}, \quad dx = \left(\frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}\right)' dt,$$

a odtud dále dosazením  $x$  do (E2)

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t} \pm t.$$

(b) Výše uvedenou substitucí přejde (33a) opět v integrál z racionální funkce, který řešíme dle odst. 2. Po jeho nalezení dosadíme zpět  $t = \mp(\sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{ax})$ .

(3) Je-li  $a < 0$ , pak pro  $x \neq 0$  můžeme užít substituci

$$\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}}, \quad (\text{E3})$$

kde znaménka  $\pm$  zvolíme opět tak, aby v daném konkrétním případě byl výpočet co nejjednodušší. Dále postupujeme analogicky jako v předchozím případě:

(a) Vztah (E3) umocníme na druhou a dále upravíme tak, abychom vyjádřili  $x$  a  $dx$  pomocí substituční proměnné  $t$ :

$$ax^2 + bx + c = (\pm xt \pm \sqrt{c})^2 = x^2 t^2 \pm 2\sqrt{c}xt + c \Rightarrow x = \frac{b \mp 2\sqrt{c}t}{t^2 - a}, \quad dx = \left(\frac{b \mp 2\sqrt{c}t}{t^2 - a}\right)' dt.$$

a odtud dále dosazením  $x$  do (E3)

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \frac{bt \mp 2\sqrt{c}t^2}{t^2 - a} \pm \sqrt{c}.$$

(b) Výše uvedenou substitucí přejde (33a) opět v integrál z racionální funkce, který řešíme dle odst. 2. Po jeho nalezení dosadíme zpět  $t = \mp \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{c}}{x}$ .

Uvedeme dále některé speciální případy integrálu typu (33a), které lze řešit pomocí jiných substitucí, které zjednoduší počítání oproti užití Eulerových substitucí.

### 1. speciální případ

$$\boxed{I := \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}} \quad (33b)$$

Řešíme úpravou výrazu pod odmocninou na součet čtverců. Nastanou dvě možnosti:

(1)  $a > 0$ :

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}.$$

Označíme-li  $k := \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ , pak substitucí  $t = x + \frac{b}{2a}$ ,  $dt = dx$  dostaneme

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{t^2 + k} \stackrel{(24)}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln|t + \sqrt{t^2 + k}|,$$

kde za  $k$  a  $t$  dosadíme zpět.

(2)  $a < 0$ :

$$I = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}}.$$

Konstanta  $k^2 := \frac{c}{4a^2} - \frac{c}{a}$  musí být kladná, neboť jinak výraz pod odmocninou by byl všude záporný a tudíž odmocnina by v reálném oboru nebyla nikde definována. Pak substituce  $t = x + \frac{b}{2a}$ ,  $dt = dx$  vede na

$$I = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \stackrel{(24)}{=} \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{t}{k},$$

kde opět za  $k$  a  $t$  dosadíme zpět.

## 2. speciální případ

$$I := \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad (33c)$$

kde  $P_n(x)$  je polynom stupně  $n > 0$ . Postupujeme následovně:

(1) Integrál  $I$  vyjádříme formálně ve tvaru

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = (A_0x^{n-1} + \dots + A_{n-2}x + A_{n-1})\sqrt{ax^2 + bx + c} + A_m \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

(2) Toto vyjádření zderivujeme a pak vynásobíme odmocninou  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ .

Obdržíme:

$$P_n(x) = [(A_0x^{n-1} + \dots + A_{n-2}x + A_{n-1})\sqrt{ax^2 + bx + c}]' \sqrt{ax^2 + bx + c} + A_m.$$

(3) Výpočtem snadno ověříme, že vpravo je rovněž polynom stupně  $n$  závislý na  $n + 1$  neznámých parametrech  $A_0, \dots, A_n$ . Tyto parametry vypočteme porovnáním koeficientů u stejných mocnin polynomů vlevo a vpravo.

(4)  $A_0, \dots, A_n$  dosadíme do vyjádření z kroku (1), kde integrál  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$  je již známého typu (33b).

## 3. speciální případ

$$\int \frac{dx}{(Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c}}, A \neq 0 \quad \text{nebo} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (33d)$$

kde druhý z integrálů je zřejmě speciálním případem prvního při  $A = 1, B = 0$ . Budeme se proto zabývat jen prvním integrálem. Pro  $x \neq -\frac{B}{A}$  vede substituce

$$Ax + B = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{t} - B \right), \quad dx = -\frac{dt}{At^2}$$

opět na integrál typu (33b), po jehož spočtení dosadíme zpět za  $t = \frac{1}{Ax+B}$ .

## 4. speciální případ (Goniometrické substituce)

$$\int R(x, \sqrt{c^2 - x^2}) \quad \text{nebo} \quad \int R(x, \sqrt{c^2 + x^2}) \quad (33e)$$

Tyto integrály jsou speciálním případem (33a), kde  $c$  nahradíme kladnou konstantou  $c^2 > 0$  a  $a = \pm 1$ . Provedení substituce  $x = c \cdot \sin t$ ,  $dx = c \cdot \cos t dt$  pro první integrál, resp.  $x = c \cdot \operatorname{tg} t$ ,  $dx = c \frac{dt}{\cos^2 t}$  pro druhý integrál, vede na integrál typu  $\int R(\sin t, \cos t) dt$ , jehož řešení je popsáno v následujícím odstavci 3.2.

### 3.1.3. Typ III (Binomický integrál).

$$I := \int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad a, b, m, n, p \in \mathbb{R} \quad (34)$$

Mohou nastat tyto případy:

(1)  $p \in \mathbb{N}$ : Výraz  $(a + bx^n)^p$  rozvineme podle binomické věty, po roznásobení jeho součinu s  $x^m$  dostaneme lineární kombinaci mocninných funkcí. Její integrál spočteme užitím (28a) a (17).

(2)  $p \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ ,  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ ,  $p := \frac{r}{s}$ : Substituce  $z = x^n$ ,  $x = z^{\frac{1}{n}}$ ,  $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$  dává

$$I = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m}{n}} (a + bz)^{\frac{r}{s}} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (\sqrt[s]{a + bz})^r dz.$$

a) Jestliže  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , pak tento integrál je typu (32d) a tudíž pokračujeme v řešení substitucí  $a + bz = t^s$ , která vede na integrál z racionální funkce. Výsledná substituce je tedy  $a + bx^m = t^s$ .

b) Jestliže  $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$  a  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ , upravíme vyjádření pro  $I$  dále takto:

$$I = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}+p-1} z^{-p} (\sqrt[s]{a + bz})^r dz = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}+p-1} \left( \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}} \right)^r dz.$$

Dostáváme opět integrál typu (32d), takže tentokrát substituce  $\frac{a+bz}{z} = t^s$  opět vede na integrál z racionální funkce. Výsledná substituce je tedy  $ax^{-n} + b = t^s$ .

(3) Ostatní případy: dá se ukázat (Čebyšev), že řešením jsou v tomto případě tzv. vyšší transcendentní funkce: viz [No: s. 17].

Řešené příklady: [No: PŘ. 4.5 s. 16-17]

Příklady do cvičení: [Min: VIII/7 s. 135-137].

## 3.2. Integrace goniometrických funkcí.

### 3.2.1 Integrál typu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (35a)$$

kde  $R(x_1, x_2)$  je racionální funkce dvou proměnných.

Postup řešení: Substitucí  $\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$  se integrál převede na integrál z racionální funkce.

Ověřme to. Z pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  a 1 dostáváme dle Pythagorovy věty:

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

a odtud užitím známých vzorců:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} & \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ x &= 2 \operatorname{arctg} t \stackrel{(14a)}{\Rightarrow} dx = \frac{2}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Po dosazení do (35a) dostaneme integrál z goniometrických funkcí v proměnné  $t$ , po jehož spočtení dosadíme zpět  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

Výše uvedenou obecnou substitucí lze zjednodušit v těchto speciálních případech:

(1)  $R$  je lichá funkce v první proměnné:  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ .

V takovém případě vystačíme se substitucí  $\boxed{\cos x = t}$ . Pak

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2}, \quad x = \arccos t, \quad dx \stackrel{(12b)}{=} -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

(2)  $R$  je lichá funkce v druhé proměnné:  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ .

V takovém případě vystačíme se substitucí  $\boxed{\sin x = t}$ . Pak analogicky

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^2}, \quad x = \arcsin t, \quad dx \stackrel{(12a)}{=} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

(3)  $R$  je lichá nebo sudá v obou proměnných:  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ .

V takovém případě vystačíme se substitucí  $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$ , kdy podobně jako při výše popsané substituci  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  dostáváme vyjádření:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Ve všech třech případech přitom dle potřeby užíváme známých goniometrických vzorců

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

### 3.2.2 Integrál typu

$$\boxed{\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\int \cos mx \cdot \sin nx \, dx} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx} \quad (35b)$$

Převědeme na lineární kombinaci integrálů z goniometrických funkcí (11a) nebo (11b) úpravou integrované funkce pomocí známých součtových vzorců:

$$\begin{aligned} \sin mx \cdot \cos nx &= \frac{1}{2} [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)] \\ \cos mx \cdot \cos nx &= \frac{1}{2} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)] \\ \sin mx \cdot \sin nx &= \frac{1}{2} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Integrál typu

$$\boxed{\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx} \quad (35c)$$

Jestliže  $m, n \in \mathbb{Z}$ , pak se jedná o speciální případ (35a).

Jsou-li  $m, n \in \mathbb{Q}$ , pak substituce  $\sin x = t$ ,  $\cos x \, dx = dt$ , dává binomický integrál (34):

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx = \int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

Řešené příklady: [No:Př.4.4 s.14-15]

Příklady do cvičení: [Min:VIII/5 s.132-133].

### 3.3. Integrace některých transcendentních funkcí.

Jedná se o některé integrály typu

$$\boxed{\int R[\varphi(x)]\varphi'(x) dx} \quad (36)$$

kde  $R$  je racionální funkce jedné proměnné.

Podle (30a) klademe substituci  $t = \varphi(x)$ ,  $dt = \varphi'(x) dx$ , která vždy vede na integrál z racionální funkce:  $\int R(t) dt$ . Příkladem mohou být integrály:

$$\int \frac{R(\ln|x|)}{x} dx, \int \frac{R[\arcsin(x)]}{\sqrt{1-x^2}} dx, \int \frac{R[\operatorname{arctg}(x)]}{1+x^2} dx, \int R(e^{ax}) dx.$$

V posledním případě stačí integrand  $R(e^{ax})$  upravit:

$$R(e^{ax}) = \frac{R(e^{ax})}{ae^{ax}} ae^{ax} dx.$$

Zlomek v tomto výrazu totiž opět představuje (jinou) racionální funkci.

Příklady do cvičení: [Min:VIII/8 s.137-138].