

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad P(z) = ?$$

Přímý výpočet:

$$\begin{array}{ccccccc}
 z^2 = z z & & z^3 = z^2 z & & \dots & & z^n = z^{n-1} z \Rightarrow n-1 \text{ násobení} \\
 a_1 z & & a_2 z^2 & & \dots & & a_n z^n \Rightarrow n \text{ násobení} \\
 a_0 & + & a_1 z & + & \dots & + & a_n z^n \Rightarrow n \text{ sečítání}
 \end{array}$$

↓

Celkem $2n - 1$ násobení a n sečítání

Princip Hornerova schématu:

$$\underbrace{(\dots((a_n z + a_{n-1})z + a_{n-2})z + \dots + a_1)z + a_0}_{n-1}$$

↓

Celkem n násobení a n sečítání = **teoretické minimum**

Věta 1.1 (Hornerovo schéma).

$P(x) = P_1(x)(x - z) + P_0$, $P_1(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_1$, $b_0 := P_0 = P(z)$, kde

$$\left. \begin{array}{l} b_n = a_n \\ b_k = a_k + z b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, 0 \end{array} \right\} \Rightarrow n \text{ násobení a } n \text{ sečítání.}$$

Důkaz.

$$\begin{array}{rcl}
 P_1(x)x + P_0 & = & b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \\
 -zP_1(x) & = & -z b_n x^{n-1} - \dots - b_3 z x^2 - b_2 z x - b_1 z \\
 \hline
 P(x) & = & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0
 \end{array}$$

Odtud porovnáním koeficientů obdržíme požadované vztahy pro b_k . □

Algoritmus.

$$\begin{array}{cccccccc}
 P: & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & \dots & a_1 & & a_0 \\
 & \downarrow = & \nearrow \times z + & \downarrow = & \nearrow \times z + & \downarrow = & \dots & \downarrow = & \nearrow \times z + & \downarrow = \\
 & b_n & & b_{n-1} & & b_{n-2} & \dots & b_1 & & \boxed{b_0 = P(z)}
 \end{array}$$

Důsledek 1.2 (Rozšířené Hornerovo schéma).

$P_0(x) := P(x) = P_n(z)(x - z)^n + \dots + P_2(z)(x - z)^2 + P_1(z)(x - z) + P_0(z)$, kde

$P_k(x) = P_{k+1}(x)(x - z) + P_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Důkaz. Rozklad z věty 1.1 aplikujeme n -krát postupně na $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$:

$$\begin{array}{l}
 P_0(x) = \\
 (\dots \underbrace{((P_n(z)(x - z) + P_{n-1}(z))(x - z) + P_{n-2}(z))(x - z) + \dots + P_1(z))(x - z) + P_0(z)}_{P_{n-1}(x)} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{P_{n-2}(x)} \\
 \vdots \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{P_1(x)}
 \end{array}$$

□

Důsledek 1.3 (Výpočet k -té derivace pomocí rozšířeného Hornerova schématu).

$P_0^{(k)}(z) = k! P_k(z)$ pro $k = 0, 1, \dots, n$.

Důkaz.

$$[P_j(z)(x - z)^j]_{x=z}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq k \\ k! P_k(z) & \text{pro } j = k \end{cases}$$

□

Algorithmus.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 P_0 : & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & \dots & a_2 & & a_1 & & a_0 \\
 & \downarrow = & \nearrow \times z+ & \downarrow = & \nearrow \times z+ & \downarrow = & \dots & \downarrow = & \nearrow \times z+ & \downarrow = & \nearrow \times z+ & \downarrow = \\
 P_1 : & b_n^{(1)} & & b_{n-1}^{(1)} & & b_{n-2}^{(1)} & \dots & b_2^{(1)} & & b_1^{(1)} & & b_0^{(1)} = \boxed{P_0(z)} \\
 & \downarrow = & \nearrow \times z+ & \downarrow = & \nearrow \times z+ & \downarrow = & \dots & \downarrow = & \nearrow \times z+ & \downarrow = & & \\
 P_2 : & b_n^{(2)} & & b_{n-1}^{(2)} & & b_{n-2}^{(2)} & \dots & b_2^{(2)} & & b_1^{(2)} & = & \boxed{P_1(z)} \\
 & & & \vdots & & & \dots & & & \vdots & & \\
 P_n : & \downarrow = & \nearrow \times z+ & \downarrow = & & & & & & \vdots & & \\
 & b_n^{(n)} & & b_{n-1}^{(n)} & = & \boxed{P_{n-1}(z)} & & & & & & \\
 & \downarrow = & & & & & & & & & & \\
 & \boxed{P_n(z)} & & & & & & & & & &
 \end{array}$$