

## Vyšetřování průběhu funkce

Cílem tohoto textu je podat ucelený přehled charakteristik, které se obvykle zjišťují u funkcí (křivek) o zadaném analytickém vyjádření a systematicky popsat postup jejich zjišťování. V textu se vyskytují odkazy do skript autorů *Z. Došlá, J. Kuben: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno 2003*. Odkazy jsou ve tvaru [DoKu:č.# s.#].

V dalším  $J := J(a, b)$  značí interval reálných čísel s krajními hodnotami  $a < b$  libovolného typu  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  nebo  $[a, b]$ . Pokud je interval zleva či zprava otevřený, tj.  $a$  nebo  $b$  neleží v  $J$ , pak připouštíme  $a = -\infty$ , případně  $b = \infty$ .

I. Cílem vyšetřování průběhu analyticky zadané funkce  $y = f(x)$  je zejména určení:

- 1. Význačných bodů:** body  $x_i \in \mathbb{R}^*$ , kde
  - a) do výpočtu  $f(x_i)$  vstupují neurčité výrazy [DoKu: s.106];
  - b)  $x_i \in D(f)$  je **izolovaným** bodem definičního oboru funkce  $f$ , tj. existuje ryzí okolí  $\mathcal{O}^*(x_i)$  nenáležející do definičního oboru  $D(f)$ ;
  - c)  $f$  není spojitá: stanovíme typ nespojitosti [DoKu: odst. 4.5 s.80–82], podobně pro nespojitost zleva nebo zprava v krajním bodě intervalu;
  - d)  $f(x_i) = 0 \dots$  tzv. **nulové** body funkce  $f$ ;
  - e)  $f'(x_i) = 0 \dots$  tzv. **stacionární** body funkce  $f$  [DoKu: Pozn. 6.9 s.116];
  - f)  $f(x_i)$  nabývá **lokálního** nebo **globálního** extrému a stanovení jeho typu (**minimum**, **maximum**) [DoKu: def. 6.6, 6.16 s.115, 118];
  - g)  $f$  má inflexi [DoKu: def. 6.29 s.127].
- 2. Význačných intervalů:** maximální intervaly  $J_k := J(a_k, b_k)$ , kde
  - a)  $f$  je definována: definiční obor  $D(f)$  [DoKu: def. 1.21 s.10] je obvykle sjednocením všech takových intervalů a jednobodových množin tvořených izolovanými body  $x_i$  ad 1b), tj.  $D(f) = \bigcup_k J_k \cup \bigcup_i \{x_i\}$ ;
  - b)  $f$  nabývá svých hodnot: obor hodnot  $H(f)$  [DoKu: def. 1.21 s.10] je v takovém případě sjednocením obrazů  $f(J_k)$  všech intervalů  $J_k$  ad a) a jednobodových množin tvořených funkčními hodnotami v izolovaných bodech, tj.  $H(f) = \bigcup_k f(J_k) \cup \bigcup_i \{f(x_i)\}$ ;
  - c)  $f$  je kladná a kde je záporná;
  - d)  $f$  je spojitá [DoKu: def. 4.32 s.76];
  - e)  $f$  je monotonní (rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí), případně konstantní [DoKu: def. 1.35 s.16];
  - f)  $f$  je (ostře) konvexní nebo konkávní [DoKu: odst. 6.3 s.120–127], případně lineární.
- 3. Asymptot:** [DoKu: odst. 6.4 s.128–130]
  - a) **bez směrnice:** bod  $x_0 \in \mathbb{R}$ , který je bodem nespojitosti 2. druhu ad 1c), kde platí  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$  nebo  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ;
  - b) **se směrnicí:** přímka  $ax + b$ , pro niž  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ .
- 4. Další charakteristik:**
  - a) **symetrie**  $f$  [DoKu: Def. 1.30 s.13]: určení středu symetrie  $x_s$  vůči němuž je  $f$  **sudá** nebo **lichá** funkce, neboli  $f(x + x_s)$  je sudá nebo lichá (vzhledem k počátku), tj.  $f(-x + x_s) = f(x + x_s)$  nebo  $f(-x + x_s) = -f(x + x_s)$  platí pro každé  $x \in D(f)$ ;
  - b) **periodicita**  $f$  [DoKu: Def. 1.32 s.15]: určení nejmenší periody, tj. minimální hodnoty  $T > 0$ , pro niž platí  $f(x) = f(x + T)$  pro každé  $x \in D(f)$ .
  - c) **(ne)ohraničenost** funkce  $f$  zdola a shora [DoKu: def. 1.29 s.12];

II. Doporučený systematický postup vyšetřování průběhu zadané funkce  $y = f(x)$ :  
(viz též [DoKu:odst.6.5 s.131-133])

**1. Určení význačných bodů ad I.1a)-d):**

- a) Spočteme limity (oboustranné, případně jednostranné) všech neurčitých výrazů [DoKu: s.106] vznikajících během výpočtu  $f(x_i)$  ve všech relevantních bodech  $x_i$  ad I.1a):  $f(x)$  musí být definována v nějakém alespoň ryzím oboustranném nebo jednostranném okolí každého takového bodu  $x_i$ . Obvykle v takových případech užíváme pro výpočet L'Hospitalova pravidla [DoKu:odst.5.5 s.102-104]. Pro nalezení takových bodů můžeme také využít postup dále popsany v d) v případech, kdy tyto body jsou nulovými body nějaké funkce, která je jmenovatelem nějakého nezkratitelného zlomku vystupujícího v analytickém vyjádření  $f(x)$ .
- b) Rozborem analytického vyjádření  $f(x)$  určíme izolované body definičního oboru.
- c) Ve všech bodech  $x_i$  (včetně bodů dopočtených v a)), kde  $f$  není spojitá, spočteme potřebné limity zleva či zprava a určíme typ této nespojitosti.
- d) Hledáme nulové body
  - přímým výpočtem, pokud je to možné, tj. známe příslušné analytické řešení (například v případě polynomů nižších stupňů, které se snažíme rozložit na součin kořenových činitelů [DoKu: s.39]);
  - numerickým výpočtem, kdy nejprve spočteme  $f(a_i)$  pro dostatečně mnoho hodnot  $a_i \in D(f)$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Separujeme kořeny určením subintervalů  $[a_j, a_{j+1}]$ , kde  $f$  je spojitá a nabývá hodnot opačného znaménka na okrajích, tj.  $f(a_j)f(a_{j+1}) < 0$ . Každý takový interval postupně zužujeme (například půlením) tak dlouho, dokud v něm nenalezneme nulový bod  $x_0 \in [a_j, a_{j+1}]$  přesně a nebo s chybou menší než  $\varepsilon$ , jakmile  $a_{j+1} - a_j < \varepsilon$ . Protože funkce  $f$  je na takovémto uzavřeném a ohraničeném intervalu spojitá, musí v některém jeho bodě nabýt nulové hodnoty podle Bolzanovy věty a jejího důsledku [DoKu:4.35-36 s.77]. Tyto výpočty můžeme snadno provádět například v MATLABu.

**2. Určení definičního oboru  $D(f)$ :**

Je-li  $f(x)$  elementární funkcí, pak  $D(f)$  je známý a jsme hotovi. V opačném případě je třeba  $f(x)$  rozložit na posloupnost elementárních operací (unárních i binárních). Definiční obor operace vyhodnocované jako poslední v pořadí zúžíme na průnik s oborem hodnot předposlední operace. Její takto zúžený obor hodnot opět vynucuje odpovídající zúžení i jejího definičního oboru, kde opět uděláme průnik tohoto zúžení s oborem hodnot další operace v pořadí, atd. Tak postupně zužujeme definiční obory jednotlivých operací v opačném pořadí jejich provádění. Dosažené zúžení definičního oboru první prováděné operace je hledaným definičním oborem  $D(f)$ . Viz [DoKu:odst.1.3 s.18] a také ilustrační obrázek k [DoKu:Def.1.40 s.10-20] z přednášky. Při konstrukci definičního oboru binárních operací bereme v úvahu hodnoty neurčitých výrazů spočtené v kroku 1.

**3. Určení oboru hodnot  $H(f)$ :**

$H(f) = f(D(f))$  konstruujeme postupně z  $D(f)$  v pořadí provádění elementárních operací.

#### 4. Vyšetření symetrie:

Existenci a polohu středu symetrie  $x_s$  můžeme nalézt buď rozбором analytického vyjádření  $f(x)$  nebo ji odhadneme z grafického vyjádření až v posledním kroku 20 (např. užitím MATLABu). Pak dosadíme  $\pm x + x_s$  místo  $x$ , a vhodnou úpravou obou výrazů  $f(x + x_s)$  a  $f(-x + x_s)$  ověříme platnost příslušné identity  $f(-x + x_s) = f(x + x_s)$  nebo  $f(-x + x_s) = -f(x + x_s)$  pro každé  $x \in D(f)$ . V dalším stačí vyšetřovat chování  $f$  pouze pro  $x \geq x_s$ , přesněji pro  $x \in D(f) \cap [x_s, \infty)$ .

#### 5. Vyšetření periodicity:

Postupujeme analogicky jako v předchozím kroku s tím rozdílem, že místo  $x_s$  rozбором buď přímo určíme nebo z grafu odhadneme periodu  $T$  a poté ověříme platnost identity  $f(x + T) = f(x)$  pro každé  $x \in D(f)$ . V dalším stačí pak vyšetřovat chování  $f$  pouze na vhodně zvoleném intervalu délky  $T$ , přesněji pro  $x \in D(f) \cap [a, a + T)$ .

#### 6. Určení hodnot $x \in D(f)$ , kde $f$ je spojitá:

Odstraníme-li z  $D(f)$  všechny izolované body a body nespojitosti, získáme množinu všech bodů spojitosti. Ta je ve většině případů disjunktním sjednocením vhodných intervalů.

#### 7. Určení hodnot $x \in D(f)$ , kde $f$ je kladná a kde záporná:

Funkci  $f$  vyhodnotíme nejprve ve všech izolovaných bodech. Z množiny bodů spojitosti nalezené v předchozím kroku odstraníme všechny nulové body. Je-li takto získaná množina disjunktním sjednocením intervalů, pak  $f$  na žádném z nich nemění znaménko. Stačí tedy z každého takového podintervalu vybrat po jednom bodu a v něm spočítat funkční hodnotu. Obvykle volíme body, kde je vyhodnocení snadné:  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

#### 8. Kroky 1 až 7 zopakujeme pro $f'$ :

Určování  $D(f')$  je přitom usnadněno skutečností, že každý bod  $D(f')$  musí být bodem spojitosti funkce  $f$  dle [DoKu:věta 5.7 s.91]. Zejména tedy  $D(f')$  nemůže obsahovat izolované body.

#### 9. Určení stacionárních bodů ad I.1e):

Stacionárními body  $f$  jsou právě všechny nulové body derivace  $f'$ .

#### 10. Určení hodnot $x \in D(f)$ , kde $f$ je rostoucí:

$f$  je rostoucí (neklesající) na každém intervalu, kde  $f' > 0$  ( $f' \geq 0$ ), podrobněji viz [DoKu:odst.6.1 s.113-115].

#### 11. Určení hodnot $x \in D(f)$ , kde $f$ je klesající:

$f$  je klesající (nerostoucí) na každém intervalu, kde  $f' < 0$  ( $f' \leq 0$ ), podrobněji viz [DoKu:odst.6.1 s.113-115].

#### 12. Určení lokálních extrémů [DoKu:odst.6.2 s.115-120]:

Funkce  $f$  může mít lokální extrém pouze v těchto případech:

- (i) v bodě  $x_0$ , kde  $f'(x_0)$  neexistuje;  $f$  má v takovém bodě ostré lokální minimum (maximum), jestliže je zde spojitá a existuje ryzí okolí  $\mathcal{O}^*(x_0) \subseteq D(f')$  takové, že  $f'(x) < 0$  ( $f'(x) > 0$ ) v levé části tohoto okolí a současně  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) v pravé části tohoto okolí [DoKu:věta 6.10 s.117]; neboli když  $f$  v levé části tohoto okolí klesá (roste) a v pravé části okolí roste (klesá) — viz kroky 10 a 11.
- (ii) v bodě  $x_0$ , který je stacionární ( $f'(x_0) = 0$ ) [DoKu:věta 6.8 s.116];  $x_0$  je dle [DoKu:věta 6.14, pozn.6.15 s.118] ostrým lokálním minimem (maximem), pokud navíc pro nějaké  $k \geq 1$  je  $f^{(2k)}(x_0) > 0$  ( $f^{(2k)}(x_0) < 0$ ) a  $f^{(m)}(x_0) = 0$  pro každé  $1 \leq m < 2k$ .

**13. Kroky 1 až 7 zopakujeme pro  $f''$ :**

Určování  $D(f'')$  je opět usnadněno skutečností, že každý bod  $D(f'')$  musí být bodem spojitosti funkce  $f'$  dle [DoKu:věta 5.7 s.91]. Zejména tedy  $D(f'')$  nemůže obsahovat izolované body.

**14. Určení hodnot  $x \in D(f)$ , kde  $f$  je konvexní:**

$f$  je (ostře) konvexní na každém intervalu, kde  $f'' \geq 0$  ( $f'' > 0$ ), podrobněji viz [DoKu:odst.6.3 s.120-126].

**15. Určení hodnot  $x \in D(f)$ , kde  $f$  je konkávní:**

$f$  je (ostře) konkávní na každém intervalu, kde  $f'' \leq 0$  ( $f'' < 0$ ), podrobněji viz [DoKu:odst.6.3 s.120-126].

**16. Určení inflexních bodů ad I.1g) [DoKu:odst.6.3 s.127-128]:**

Funkce  $f$  může mít inflexní bod pouze v těchto případech:

- (i) v bodě  $x_0$ , kde  $f''(x_0)$  neexistuje;  $f$  má v takovém bodě inflexi, jestliže  $f'$  je zde spojitá a existuje ryzí okolí  $\mathcal{O}^*(x_0) \subseteq D(f'')$  takové, že  $f''(x) < 0$  ( $f''(x) > 0$ ) v levé části tohoto okolí a současně  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ) v pravé části tohoto okolí [DoKu:věta 6.10 s.117]; neboli když  $f$  je v levé části tohoto okolí ostře konkávní (ostře konvexní) a v pravé části okolí ostře konvexní (ostře konkávní) — viz kroky 14 a 15.
- (ii) v bodě  $x_0$ , kde  $f''$  existuje, přičemž pro nějaké  $k \geq 1$  je  $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$  a  $f^{(m)}(x_0) = 0$  pro každé  $2 \leq m < 2k + 1$ .

**17. Vyšetření (ne)ohraničenosti funkce  $f$  a globální extrémů:**

Funkce je neohraničená zdola (shora), jestliže existuje  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ , takové, že  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = -\infty$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \infty$ ). Takovými body  $x_0$  jsou buď  $\pm\infty$  nebo body nespojitosti 2. druhu. Pokud je funkce zdola (shora) ohraničená, pak globální<sup>1</sup> minimum (maximum) může (ale nemusí) funkce  $f$  nabýt pouze ve stacionárním bodech nebo v bodech, kde nemá derivaci [DoKu:pozn.6.17 s.118-9]. Pokud máme zjištěno, že existuje globální minimum (maximum), vyplývá z předchozího následující postup jejich nalezení:

- Najdeme stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace (včetně izolovaných bodů a bodů  $D(f)$ , které jsou krajními body nějakého intervalu spojitosti).
- Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
- Ze všech takto získaných funkčních hodnot (obvykle je jich konečný počet) vybereme nejmenší (největší). To bude hledané globální minimum (maximum).

**18. Určení asymptot funkce  $f$  [DoKu:odst.6.4 s.128-130]:**

a) **bez směrnice:** mezi body nespojitosti 2. druhu nalezneme všechny body  $x_0 \in \mathbb{R}$ , kde  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$  nebo  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ . V každém takovém bodě je  $x = x_0$  rovnicí hledané asymptoty bez směrnice (přímka rovnoběžná s osou  $y$  a procházející bodem  $x_0$ ).

b) **se směrnicí** [DoKu:věta 6.34 s.129]:

Přímka  $y = ax + b$  je asymptotou  $f$  pro  $x \rightarrow \infty$  právě když

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b.$$

Analogicky pro  $x \rightarrow -\infty$ .

**19. Tabele funkčních a limitních hodnot ve význačných bodech:**

Tabelujeme funkční hodnoty spočtené ve význačných bodech.

<sup>1</sup>nebo též absolutní

## 20. Nakreslení grafu funkce na celém definičním oboru:

Do grafu nejprve vyneseme jako izolované body hodnoty tabelované v kroku 19. Pak na každém intervalu spojitosti  $(a, b)$  nalezeném v kroku 6 zvolíme vhodnou dostatečně bohatou množinu bodů  $x_1 < \dots < x_n$ , v nichž vyhodnotíme funkční hodnoty  $f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , přidáme je do grafu z kroku 19 a pak spojíme lomenou čarou nebo jinak vhodně interpolujeme. V MATLABu můžeme pro tento účel užít například příkazy: `x=linspace(a,b); plot(x,f(x))`.