3 Rozšiřující přístupy v rámci klasických indexních čísel

3.1 Řetězení indexních čísel - Marshallův podnět

Jak je z předchozího textu patrné, u mnoha jinak „kvalitních" indexních čísel činí problém nesplnění axiomu okružnosti **(F4)**. To platí mj. pro všechna výše uvedená klasická indexní čísla založená na aritmetickém průměrování. Způsob, jak této slabině alespoň částečně ulehčit, se nabízí užitím postupu nazývaného řetězení.

Řetězení spočívá v postupném zjemňování dělení mezi dvěma stavy (např. stavem „0" a stavem „1") a v následném vyjádření jisté „atomizované" formy k původnímu indexnímu číslu tak, že se nejprve spočtou „parciální" indexní čísla mezi jednotlivými body tohoto dělení a tato se poté vzájemně vynásobí.

Metodu řetězení navrhl již před více než stoletím anglický ekonom Alfred Marshall [1887][1]. Název jí přisoudil nicméně až Irving Fisher. Postup je založen na následujících úvahách:

Vyčísleme nejprve hodnotu P_{st} pro jakékoliv dva body (období) z přijatého dělení intervalu základního období „0" a běžného období označeného „T", kde toto druhé období odpovídá symbolu „1" v původním (neděleném) označování. (Při této dočasné úpravě notace je možné zachovat vzestupnou tendenci v označování dělících bodů přirozenými čísly). Platí tedy: $1 \leq s < t \leq T$.

Definujme nyní **zřetězené indexní číslo** (příslušné nějakému prostému IČ) P^*_{st} výrazem

(3.1) $$P^*_{st} = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \ldots \cdot P_{t-1,t}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \ldots \cdot P_{s-1,s}} \,,$$

resp. při $s < t$ (a následném částečném vykrácení zlomku výše) zjednodušeněji jako

(3.1A) $$P^*_{st} = P_{s,s+1} \cdot P_{s+1,s+2} \cdot P_{s+2,s+3} \cdot \ldots \cdot P_{t-1,t} \,.$$

Buďme si vědomi toho, že jeho hodnota je obecně odlišná od prostého indexního čísla P_{st}.

Podílovou odchylku $\frac{P^*_{st}}{P_{st}}$ mezi zřetězeným a prostým indexním číslem nazveme **zkreslením při zřetězení**.

Lze ukázat, že postupným zjemňováním dělení mezi body „1" a „T" volbou stále více vnitřních dělících bodů (teoreticky při $T \to \infty$) lze postupně zmenšovat hodnotu tohoto zkreslení a přibližovat tak zřetězené indexní číslo výchozímu indexnímu číslu.

Poznámka 3.1 Je patrné, že řetězit má smysl především indexní čísla při časovém srovnání (pozorování musí být seřazena v časových posloupnostech), postupu nelze tedy srovnatelně účinně využít pro geografická data.

Poznámka 3.2 Hlavní bariérou, na kterou zjemňování dělícího intervalu naráží, je přirozená okolnost, že statistická data jsou registrována vždy pouze v určitých pevně stanovených časových okamžicích. Podnikové i makroekonomické ukazatele bývají vykazovány zpravidla v měsíčních nebo čtvrtletních intervalech, pouze výjimečně častěji, přičemž některé údaje jsou

[1] Marshall A.: Remedies for fluctuations of prices. Contemporary Review 1887.

registrovány řidčeji (ročně). Častější vykazování hodnot lze zaznamenat pouze u burzovních indexů (především akcií a obligací) a údajů z oblasti měnových kursů, kde jsou dostupná denní, příp. i frekventovanější data. V jiných oblastech reálné ekonomiky je srovnatelná "hustota" sledovanosti dat nedosažitelná.

Zřetězené indexní číslo vykazuje naopak dvě teoretické přednosti: splňuje totiž Fisherovy axiomy okružnosti **(F4)** a záměny období **(F3)**, a to i tehdy, když původní indexní číslo těmto testům nevyhovuje. Ukážeme to snadno:

<u>Ověření</u> **(F3)**: Zvolíme např. $s < t$. Potom platí

(3.2) $$P_{st}^{*} \cdot P_{ts}^{*} = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot \ldots \cdot P_{t-1,t}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot \ldots \cdot P_{s-1,s}} \cdot \frac{P_{\cdot 01} \cdot P_{12} \cdot \ldots \cdot P_{s-1,s}}{P_{\cdot 01} \cdot P_{12} \cdot \ldots \cdot P_{t-1,t}} = 1$$

a podobně při porovnání hodnot ve třech bodech (např. $r < s < t$) snadno ukážeme, že platí axiom okružnosti **(F4)**

(3.3) $$P_{rt}^{*} = P_{r,r+1} \cdot P_{r+1,r+2} \cdot \ldots \cdot P_{s-1,s} \cdot P_{s,s+1} \cdot P_{s+1,s+2} \cdot \ldots \cdot P_{t-1,t} = P_{rs}^{*} \cdot P_{st}^{*} \;.$$ $\square$

<u>Poznámka 3.3</u> Je zřejmé, že pokud prosté indexní číslo splňuje axiom okružnosti **(F4)**, pak je hodnotou shodné s jemu příslušným zřetězeným indexním číslem (při jakémkoliv dělení), tzn. $P_{st}^{*} = P_{st}$.

Podobně snadno ověříme platnost testů **(F1)** a **(F7)**:

(3.4) $$P_{ss}^{*} = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \ldots \cdot P_{s-1,s}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \ldots \cdot P_{s-1,s}} = 1 \;,$$

(3.5) $$P_{st}^{C*} = \frac{c.P_{01} \cdot c.P_{\cdot 12} \cdot c.P_{23} \cdot \ldots \cdot c.P_{t-1,t}}{c.P_{01} \cdot c.P_{12} \cdot c.P_{23} \cdot \ldots \cdot c.P_{s-1,s}} = c^{t-s} P_{st}^{*} \;.$$

(Pro případ $t = s + 1$ tedy zřejmě dostaneme $P^{C*}{}_{s,s+1} = c.P^{*}{}_{ss}$). $\square$

Jinak však vyšetřování dalších vlastností zřetězených indexních čísel nemusí být jednoduché, resp. tyto vlastnosti budou zpravidla záviset na vlastnostech výchozích prostých indexních čísel.

Otázku, zda preferovat použití indexního čísla prostého (tj. s pevným základem) nebo zřetězeného, nelze obecně zodpovědět. V souvislosti s konstatováním učiněným v souvislosti s testem **(F4)** lze přijmout názor, že pokud pracujeme s indexními čísly, která zacházejí symetricky s vahami (což platí mj. u $P_{01}{}^{W}, P_{01}{}^{F}, P_{01}{}^{E}, P_{01}{}^{T}$), nezáleží příliš na tom, kterou verzi použijeme, protože při praktickém použití se výsledky budou lišit jen málo. Pokud, jak je obvyklé, statistická metodika obměňuje pevný základ pro výpočet prostých cenových indexů zhruba po 5 - 8 letech a používá uvedené typy indexních čísel, nebude příliš záležet na tom, zda vezmeme index prostý nebo zřetězený. V metodice statistické praxe však stále přetrvává tendence setrvávat na indexech s vahami „nesymetrickými“, což platí jak o Laspeyresově, tak o Paascheho indexech. V tomto případě je nutné předchozí pozitivní závěr brát s jistou opatrností.

Přirozeně je zde však nutno přihlížet k dalším okolnostem, jako je délka užívaných časových řad, resp. časové odstupy, ve kterých se srovnání provádí, a míře variability u cen i kvantit mezi jednotlivými obdobími. Lze-li předpokládat zhruba monotónní vývoj (optimální je pozvolný růst cen i kvantit, nezbytné je vyloučení extrémního kolísání a silných kompenzačních efektů, pokud se tyto odehrají ve srovnávaných obdobích), pak mohou být rozdíly také u „nesymetrických" indexních čísel téměř neznatelné. Čím zřetelněji bude naopak pozorována značná rozkolísanost, tím bude znatelný nesoulad mezi oběma typy indexů pravděpodobnější.

Zajímavou skutečností, kterou dále přiblížíme, je, že von Bortkiewiczův vztah lze u některých indexních čísel využít ke zjištění, jakým směrem jsou tato indexní čísla vychýlena při zřetězení, tzn. zda dochází k nějaké systematické odchylce (pouze však u indexních čísel nesplňujících axiom okružnosti **(F4)**) při porovnání hodnot prostého a příslušného zřetězeného indexního čísla. Ukážeme to na příkladě několika již známých indexních čísel.

3.1.1 Zřetězení Carliho/Sauerbeckova indexního čísla

Nejprve vyjádříme u tohoto indexního čísla příslušné zkreslení při zřetězení. To má tvar

(3.6)
$$D_{012}^{S} = \frac{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(0)}}$$

Nyní využijeme již dříve uvedené rovnice (2.55), na základě které máme

(3.7)
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \overline{xy} + s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}$$

a v níž uplatníme následující konkretizace vektorů x a y. Pro sledovaný účel vezmeme právě

$$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \quad \text{a podobně} \quad y_i = \frac{p_i(2)}{p_i(1)}$$

neboli podíly cenových poměrů komodit vzatých ve dvou po sobě jdoucích úsecích.

Výraz (3.7) tak přejde do tvaru

(3.8)
$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\cdot\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_1(0)}\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right) + s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}$$

s tím, že na levé straně po zkrácení uvnitř sumace dostaneme $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(0)}$. Nyní vydělíme výraz pro D_{012}^{S} prvním členem pravé strany (3.8), což je vlastně součin $\bar{x}\cdot\bar{y}$. Po úpravě dostaneme

(3.9)
$$D_{012}^{S} = \frac{1}{1 + \frac{s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}}{\bar{x}\cdot\bar{y}}} \quad .$$

Obdobně bychom dělením výrazu (3.8) jeho levostranným členem obdrželi

(3.9A)
$$D_{012}{}^{S} = 1 - \frac{s_x . s_y . r_{xy}}{\bar{x}.\bar{y}} \quad .$$

V obou výrazech se příslušné průměry, směrodatné odchylky a korelační koeficient vztahují (prostým, neváženým způsobem) k výše definovaným hodnotám x_i a y_i.

S ohledem na dosazené hodnoty x_i a y_i můžeme říci, že výraz ve jmenovateli (3.9) bude menší než 1, neboť znaménko výrazu $\frac{s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}}{\bar{x} \cdot \bar{y}}$ závisí jedině na znaménku r_{xy}.

Toto znaménko bude v převážné většině situací záporné, neboť lze důvodně předpokládat, že ve dvou po sobě jdoucích obdobích (0→1) a (1→2) - nebudou-li časové odstupy příliš krátké - bude vzestup cen u komodit s podprůměrným růstem v prvém z těchto období následován (s ohledem na tendenci přibližování cenových úrovní) převážně nadprůměrným růstem v navazujícím období.

Ze stejného důvodu budeme na pravé straně (3.9A) od 1 odečítat zápornou hodnotu. Výrazy (3.9) resp. (3.9A) pro D_{012}^S budou proto zpravidla větší než 1 a Sauerbeckovo indexní číslo bude tedy zkresleno směrem nahoru.

3.1.2 Zřetězení Laspeyresova indexního čísla

Obdobně jako v předešlém případě se pokusíme vyjádřit zkreslení indexního čísla D_{012}^L výrazem vyskytujícím se na pravé straně von Bortkiewiczova poměru. Po zkrácení máme

$$(3.10)\qquad D_{012}^L = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^N p_i(2)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(1)\cdot q_i(1)}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^N p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0)\cdot q_i(0)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^N p_i(2)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0)\cdot q_i(0)}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^N p_i(2)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(1)\cdot q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^N p_i(2)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(1)\cdot q_i(0)}}.$$

Nyní musíme nalézt vhodnou náplň pro vektory x a y a pro váhy w_i, pro kterou by platila relace

$$(3.11)\qquad \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i y_i}{\bar{x}_w . \bar{y}_w} = 1 + \frac{s_{xw} . s_{yw} . r_{x,y}}{\bar{x}_w . \bar{y}_w}$$

při použitém značení

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^N w_i x_i, \quad \bar{y}_w = \sum_{i=1}^N w_i y_i, \quad s_{xw} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x}_w)^2}, \quad s_{yw} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i (y_i - \bar{y}_w)^2},$$

a

$$\mathrm{cov}_w(x,y) = \sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x}_w).(y_i - \bar{y}_w)$$

a takovou, při níž by levá strana (3.11) byla vyjádřitelná jako výraz pro zkreslení D_{012}^L.

Ukazuje se, že tomuto účelu vyhovují dosazení

(3.12A) $x_i = \dfrac{p_i(2)}{p_i(1)}$ a podobně vymezení $y_i = \dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}$

(resp. vice versa) a volba vah w_i ve tvaru

(3.12B) $$\frac{p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)} .$$

Při uvedené konkretizaci dostaneme totiž

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i y_i\right)} = \frac{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)}\cdot\dfrac{p_i(2)}{p_i(1)}\cdot\dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}}{\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)}\cdot\dfrac{p_i(2)}{p_i(1)}\right)\cdot\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)}\cdot\dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}\right)} ,$$

přičemž po následném zkrácení uvnitř sumací a následně dvou ze tří přítomných výrazů $\sum p_i(1)\cdot q_i(0)$ dospějeme k výrazu rovnému právě D_{012}^{L} . □

Také v tomto případě lze na základě přítomných výrazů učinit jisté úvahy o očekávaném směru zkreslení. Opět je zřejmé, že směr zkreslení bude záviset na znaménku korelačního koeficientu r_{xy} mezi vektory x a y výše definovanými.

Protože každé x_i vyjadřuje pro příslušnou komoditu cenovou změnu mezi obdobím 1 a 2, potom - s ohledem na to, co bylo řečeno u Sauerbeckova indexního čísla - lze důvodně předpokládat, že korelace cenových vektorů mezi obdobími 0→1 a 1→2 bude záporná. Na druhé straně lze přinejmenším stejně oprávněně vyslovit tvrzení, že korelace v témže období (0→1) mezi cenovými a množstevními změnami bude rovněž záporná. Odtud lze tedy dovodit, že cenové změny za období 1→2 budou se změnami kvantit v období 0→1 převážně korelovány kladně. Z těchto úvah vyplývá, že Laspeyresovo indexní číslo bude (shodně jako Sauerbeckovo) při zřetězení vychýleno směrem nahoru.

Poznámka 3.4 S ohledem na skutečnost, že průměrování provádíme s pomocí vah w_i, které mohou více nebo méně pozměnit vliv jednotlivých složek v agregátních součtech, platí výše uvedené vývody pouze s určitou podmíněností.

3.1.3 Zřetězení Paascheho indexního čísla

Obdobným odvozením a následnými úvahami o vztazích mezi cenovými a kvantovými změnami v navazujících obdobích bychom dospěli k závěru, že Paascheho indexní číslo se při zřetězení chová tak, že jeho zřetězená verze vychyluje hodnoty oproti přímo určenému číslu směrem dolů. Lze to prokázat touto konkrétní volbou vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ a vah $\boldsymbol{w}$:

(3.13) $$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \quad , \quad y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(2)} \quad , \quad w_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(2)} \quad .$$

Zde, jak vidíme, vyšetřujeme korelaci poměrových cenových změn v období 0→1 s množstevními poměrovými změnami během období 1→2 vzatými však v časově obráceném pořadí. Při zkoumání převažujícího směru korelovanosti obou vektorů lze nicméně usuzovat takto: cenové změny uskutečněné během období 0→1 budou negativně korelovány s cenovými změnami v navazujícím období 1→2. Tyto následné cenové změny budou opět negativně korelovány s množstevními změnami během téhož období 1→2 (shodná úvaha jako při určení směru zkreslení u Laspeyresova indexního čísla). Vzhledem k tomu, že však tentokrát uvažujeme vektor y_i s inverzně zadanými složkami oproti předchozímu případu, bude korelace veličin $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ a $\frac{q_i(1)}{q_i(2)}$ záporná.

<u>*Ověření:*</u> provedeme odvozením výrazu pro D_{012}^{P} :

Při uvedené konkretizaci x_i, y_i, w_i dostaneme postupně

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} w_i y_i\right)} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(2)}\cdot\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\cdot\frac{q_i(1)}{q_i(2)}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(2)}\cdot\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(2)}\cdot\frac{q_i(1)}{q_i(2)}\right)} =$$

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(2)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}\right)\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}\right)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(2)\right)}$$

kterýžto posledně zapsaný výraz je shodný s definičním výrazem pro D_{012}^{P} po zkrácení dvou ze tří výrazů $\sum p_i(0)\cdot q_i(2)$ vyskytujících se v definičním vzorci

(3.14) $$D_{012}^{P} = \frac{P_{01}^{\ P}\cdot P_{12}^{\ P}}{P_{02}^{\ P}} \quad .$$ □

U složitějších indexních čísel nelze zpravidla směr tranzitivního zkreslení tak snadno odvodit nebo o něm nelze vůbec vyslovit přiměřeně určitý a ekonomickými důvody podložený závěr.

3. 2 Giniho formulace indexních čísel

Jinou cestou, která navazuje na výše popsanou metodu řetězení, je postup, který pod názvem síťová metoda uplatnil italský matematik a ekonom Carrado Gini[2]. Opět se uvažuje rozčlenění období mezi počátečním - řekněme „0“-tým - a koncovým - řekněme „m“-tým - obdobím na celkem m úseků, ze kterých jsou získávány potřebné statistické údaje.

Gini formuloval (následně po něm nazvaná) indexní čísla následujících tvarů:

tzv. **GINIho indexní číslo 1. typu**

$$P_{0m}^{G(1)} = \sqrt[m+1]{\prod_{j=0}^{m} \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(m) \cdot q_i(j)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(j)}} , \tag{3.15}$$

tzv. **GINIho indexní číslo 2. typu**[3]

$$P_{0m}^{G(2)} = \sqrt[m-1]{\prod_{j=1}^{m-1} P_{0j}^{*} \cdot P_{jm}^{*}} , \tag{3.16}$$

přičemž ve druhém případě může symbol $P_{0m}^{G(2)}$ představovat libovolné jiné, z hlediska vlastností uspokojivé výchozí indexní číslo (definice $P_{0m}^{G(2)}$ tedy není jednoznačná).

Za zmínku stojí, že Giniho konstrukty (3.15), (3.16) lze použít i pro data, která nemusí tvořit časové posloupnosti cen a kvantit. Na druhé straně, určitou jejich slabinou – zdůrazňovanou hlavně v dobách omezených možností výpočetní techniky - je okolnost, že při aktualizaci je nutný celkový přepočet indexního čísla v případě, kdy získáme statistická data za nová období (resp. za další územní celky). Tato nevýhoda však nemusí být v praxi až tak citelná, neboť konstrukty byly autorem původně navrženy za účelem provádění prostorových (geografických) cenových srovnání.

Naopak předností obou těchto indexních čísel je opět splnění axiomu záměny období **(F3)** a rovněž skutečnost, že při velkém m (počtu dělení) se takto vytvořená veličina hodnotou zpravidla málo liší od hodnoty získané přímým výpočtem (bez dělení intervalu mezi „0“ a „m“).

Povšimněme si, že u prvého z obou konstruktů (jde-li o cenové indexní číslo) stačí znát cenové vektory jen v počátečním "0" a koncovém "m" období, zatímco údaje o spotřebě komodit, které využíváme pro stanovení vah při geometrickém průměrování, je potřebné sledovat též ve všech meziobdobích $1,2,...,m-1$.

Jak je bezprostředně vidět z definičního vztahu (3.15), při volbě $m=1$ dostáváme pro $P_{01}^{G(1)}$ přímo Fisherův cenový index, zatímco pro $m=2$ v případě $P_{02}^{G(2)}$ obdržíme obdobně (nevážený) geometrický průměr obou částí P_{01} a P_{02} generujícího cenového indexního čísla. Není nesnadné ukázat, že Giniho indexní čísla vyhovují Fisherovým postulátům **(F1)**, **(F3)**, **(F5)**, **(F6), (F7)**, **(F8)** (v případě $P_{0m}^{G(2)}$ je ovšem musí splňovat generující indexní číslo). Axiom

[2] Gini, C. : „On the Circular Test of Index Numbers“. Metron 1931

[3] Ragnar Frisch nazývá tyto konstrukty Gini' s aggregate crossing, resp. Gini´s two-point crossing.

záměny faktorů **(F2)** není splněn a axiom okružnosti **(F4)** platí jen za velmi speciálních podmínek (nikoliv obecně).

3.3 Stuvelova indexní čísla

Cestu, kterou zvolil v polovině 50. let 20. století nizozemský statistik Georg Stuvel, lze považovat za návrat ke klasickým postupům z počátku tohoto století. Myšlenka, na základě které odvodil dvojici (cenové a kvantové) indexních čísel, následně po něm nazývaných, nyní vyložíme[4]:

Stuvel vyšel z požadavku, aby hledaná dvojice indexních čísel (cenové označíme P_{01}^{St}, kvantové označíme Q_{01}^{St}) přímo splňovala axiom záměny faktorů **(F2)**, tj. aby platilo

$$P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \quad . \tag{3.17}$$

Za účelem zkrácení zápisu použijeme v dalším textu úspornější označení výrazu na pravé straně jako $\frac{M(1)}{M(0)}$, přičemž peněžní výdaje $M(1) = \sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)$, resp. $M(0) = \sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)$, vyjadřují náklady na pořízení úplné skupiny komodit v běžném resp. základním období.[5]

Druhou podmínkou, kterou má dvojice těchto indexních čísel splňovat (ve Stuvelově návrhu buď přesně nebo s určitou předem stanovenou odchylkou), je diferenční relace, která poměřuje rozdíly mezi takto konstruovanými indexními čísly P_{01}^{St}, Q_{01}^{St} a příslušnými Laspeyresovými indexními čísly:

$$Q_{01}^{St} - Q_{01}^{L} \cong P_{01}^{St} - P_{01}^{L} \quad . \tag{3.18}$$

Ve vztahu (3.18) je možné uvažovat dva možné případy ve specifikaci relace “$\cong$“:

(A) : relace (3.18) platí přesně, tj. ”$\cong$“ vezmeme jako rovnost,
(B) : relace (3.18) platí s určitou, přesně specifikovanou odchylkou.

Uvedená úvaha je vcelku oprávněná, vezmeme-li v úvahu poznatky statistické praxe, kde se zvláště pro krátká časová období ukazuje, že rozdíly $P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L}$, ale i $P_{01}^{P} \cdot Q_{01}^{P}$ od hodnoty $\frac{M(1)}{M(0)}$ nejsou nijak velké. Jak již víme, přesně tento požadavek nesplňuje Laspeyresovo ani Paascheho indexní číslo, avšak lze snadno ověřit, že tato indexní čísla jej „splňují“ křížovým způsobem tj.

$$P_{01}^{L} Q_{01}^{P} = P_{01}^{P} Q_{01}^{L} = \frac{M(1)}{M(0)} \quad . \tag{3.19}$$

3.3.1 Původní Stuvelův návrh

Z povahy zadání úlohy je zřejmé, že se hledá řešení dvou rovnic (pro neznámé P_{01}^{St} a Q_{01}^{St})

---

[4] Stuvel, G. : A New Index Number Formula. Econometrica 1957, Vol. 25.

[5] Stejně značení uplatníme ještě v oddíle 5 pro mikroekonomická indexní čísla.

(3.20) $$P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{M(1)}{M(0)} \quad ,$$

(3.21) $$Q_{01}^{St} - Q_{01}^{L} = P_{01}^{St} - P_{01}^{L} \quad .$$

Za daných předpokladů bude předmětem Stuvelovy úlohy nalezení řešení dvou rovnic (všimněme si, že první rovnice této soustavy je kvadratická) s neznámými P_{01}^{St} a Q_{01}^{St}, které jsou vyjádřeny pomocí známých ostatních veličin, tj. $M(1), M(0), P_{01}^{L}, Q_{01}^{L}$.

K nalezení řešení použijeme např. substituci z (3.21) $Q_{01}^{St} = P_{01}^{St} - P_{01}^{L} + Q_{01}^{L}$, která po dosazení do (3.20) dává kvadratickou rovnici s neznámou P_{01}^{St}:

$$\left(P_{01}^{St}\right)^2 - \left(P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}\right) \cdot P_{01}^{St} - \frac{M(1)}{M(0)} = 0 \quad .$$

Obdobně bychom obdrželi symetrickou relaci pro Q_{01}^{St}.

Řešení soustavy získané standardním postupem, tj. nalezením kořenů kvadratické rovnice, má tvar:

(3.22A) $$Q_{01}^{St} = \frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \quad ,$$

(3.22B) $$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \quad .$$

Poznámka 3.5 Vzhledem k tomu, že pro přijatelnou ekonomickou interpretaci mají smysl jen kladné hodnoty indexních čísel, je nutno se omezit vždy jen na kladné kořeny kvadratické rovnice. (Je patrné, že výrazy uvnitř odmocnin (3.22A) a (3.22B) jsou větší než příslušné výrazy před odmocninami.)

Výrazy (3.22A), (3.22B) můžeme zapsat formou, která bude obsahovat přímo vektory cen a množství $\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1), \boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1)$ - obě indexní čísla obsahují plnou čtveřici. Dostaneme

$$Q_{01}{}^{St} = \frac{\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \frac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \frac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}\right)^2}{4} + \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}$$

$$= \frac{\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0) + \sqrt{\left(\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0)\right)^2 + 4.\left(\sum p_i(1)q_i(1)\right)\left(\sum p_i(0)q_i(0)\right)}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

Podobně bychom získali

$$P_{01}{}^{St} = \frac{\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1) + \sqrt{\left(\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1)\right)^2 + 4.\left(\sum p_i(1)q_i(1)\right)\left(\sum p_i(0)q_i(0)\right)}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

3.3.2 Modifikovaný Stuvelův návrh

Analogicky prvému případu se hledá řešení dvou vztahů (pro obecně jiné neznámé P_{01}^{St*}, Q_{01}^{St*})

(3.23) $$P_{01}^{St*} \cdot Q_{01}^{St*} = \frac{M(1)}{M(0)} \ ,$$

(3.24A) $$Q_{01}^{St*} - Q_{01}^{L} = P_{01}^{St*} - P_{01}^{L} + \Delta ,$$

kde odchylka Δ má přesně specifikovaný tvar (interpretovatelný jako „míra nesplnění“ axiomu **(F2)** Laspeyresovými indexními čísly):

(3.24B) $$\Delta = P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L} - \frac{M(1)}{M(0)} \ .$$

Obdobným způsobem jako v části [3.3.1] řešíme soustavu dvou rovnic, přičemž k řešení použijeme opět např. substituci $Q_{01}^{St*} = P_{01}^{St*} - P_{01}^{St*} - P_{01}^{L} + Q_{01}^{L} + \Delta$. Po dosazení Q_{01}^{St*} z (3.24A) do (3.23) dostaneme

$$\left(P_{01}^{St*}\right)^2 - \left(P_{01}^{L} - Q_{01}^{L} - P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L} + \frac{M(1)}{M(0)}\right) \cdot P_{01}^{St*} = \frac{M(1)}{M(0)}$$

a způsobem analogickým předchozímu tak odvodíme jinou dvojici indexních čísel, která mají tvar:

(3.25A) $$P_{01}^{St*} = \frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L} \cdot \left(1 + P_{01}^{L}\right) + \frac{M(1)}{M(0)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L} \cdot \left(1 + P_{01}^{L}\right) + \frac{M(1)}{M(0)}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \ ,$$

(3.25B) $$Q_{01}^{St*} = \frac{Q_{01}^{L} \cdot \left(1 + P_{01}^{L}\right) - P_{01}^{L} - \frac{M(1)}{M(0)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} \cdot \left(1 + P_{01}^{L}\right) - P_{01}^{L} - \frac{M(1)}{M(0)}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \ .$$

Obě tato indexní čísla mohou být rovněž použita k vystižení globální změny cenového a podobně tak i objemového komoditního indexu. Ze stejného důvodu jako dříve jsou přijatelné pouze kladné kořeny příslušné kvadratické rovnice. Jak je z předchozího patrné, bylo by možné vyvodit i další indexní čísla, pokud bychom v podmínkách (3.21) resp. (3.24A) uvažovali vztahy k jiným než k Laspeyresovým indexním číslům (např. k Paascheho či k Edgeworthovým).

Na závěr ještě vyšetříme, v jaké míře vyhovuje prvá dvojice Stuvelových indexních čísel (3.22A), (3.22B) základním testům Irvinga Fishera:

Test identity **(F1)** je zřejmě splněn, neboť pro obě Laspeyresova indexní čísla platí, že $P_{00}{}^{L} = 1$, $Q_{00}{}^{L} = 1$ a výrazy pro $P_{00}{}^{St}$, $Q_{00}{}^{St}$ se tedy redukují na odmocninu z podílu $\frac{M(1)}{M(0)}$, která je při ztotožnění obou období rovna 1. Platnost **(F2)** je zřejmá, neboť jde přímo o definiční podmínku (3.20), na základě níž je dvojice indexů odvozována.

Axiom **(F3)** je u dvojice Stuvelových indexních čísel (3.20), (3.21) rovněž splněn, jak nepřímo ukazuje sám autor v [29] . Přímé ověření by vyžadovalo platnost vztahu

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St} = \left(\frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \right) . \left(\frac{P_{10}^{L} - Q_{10}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{10}^{L} - P_{10}^{L}}{2}\right)^2 + \frac{M(0)}{M(1)}} \right) = 1$$

Po roznásobení dostaneme dosti komplikovaný výraz (k jeho přesnému tvaru nechť se čtenář dopracuje sám), který však po postupném zjednodušování nabude hodnotu 1.

Okružnost **(F4)** není Stuvelovými indexními čísly splněna, což lze ověřit přímým vyšetřením příslušné podmínky. Naproti tomu axiomy určenosti **(F5)** a souměřitelnosti **(F6)** platí, neboť je splňují Laspeyresova indexní čísla v definici (3.21), přičemž též výraz v odmocnině (3.22A) je vždy definován a není identicky nulový (dokonce i kdyby nastala náhodná shoda $P_{01}{}^{St} = Q_{01}{}^{St}$). Souměřitelnosti pak vyhovují všechny výrazy vystupující v definici (3.22a).

Pokud jde o axiom proporcionality **(F7)**, pak zřejmě platí $P_{01}{}^{St} = c$, resp. $Q_{01}{}^{St} = d$ pro konstantu c splňující $\boldsymbol{p}(1) = c.\boldsymbol{p}(0)$, resp. konstantu d splňující $\boldsymbol{q}(1) = d.\boldsymbol{q}(0)$.
Platnost **(F8)** je zřejmá.
Î.