4 Kategorizace výrobních faktorů v produkční funkci

V tomto oddíle uvedeme stručný přehled několika důležitých vlastností, kterými může být charakterizována uvažovaná výrobní technologie daná produkční funkcí $F(\boldsymbol{x})$ nebo jednotlivé výrobní faktory obsažené v této produkční funkci. Některé z těchto vlastností lze vyslovit, aniž použijeme předpokladu o diferencovatelnosti (případně i spojitosti) produkční, nákladové nebo jiné ekonomické funkce. Výhodou hladkých (neomezeně diferencovatelných) funkcí ovšem je možnost některé tyto vlastností ověřit snadněji než analýzou definičního vztahu.

Definice 9 Podstatnost výrobního faktoru

Výrobní faktor jako argument v ekonomickém vztahu je ***podstatný*** [angl. ***essential***] tehdy, jestliže jeho přítomnost je nezbytně nutná k tomu, aby hodnota produkce, kterou výrobní proces poskytuje, byl kladný. Formálně lze podstatnost skupiny s faktorů zapsat jednoduše (pro přehlednost značení předpokládáme, že podstatných je právě prvních s faktorů) vztahem :

$$F\left(0,....,0,....,0,X_{s+1},....,X_n\right)=0 \tag{4.1}$$

Symboly $X_{s+1},....,X_n$ označují libovolná dosazení z oboru přípustných hodnot ostatních (*nepodstatných, non-essential*) faktorů. □.

Je zřejmé, že je-li kombinace $v_1,....,v_s$ faktorů podstatná, je podstatná i kterákoliv kombinace $v_1,....,v_r$ pro $s \le r \le n-1$. Tento důsledek je očividný, neboť ubráním dalšího faktoru s kladným množstvím z okruhu stávajících podstatných, jež vystupují v nulových množstvích, nemůžeme dosáhnout kladné hodnoty produkce.

Podstatný faktor je *z geometrického hlediska* charakteristický tím, že *izokvanta* na kterékoliv hladině produkce *nemůže přilnout k ose (osám) dané (daným) nepodstatným (i) faktorem (faktory) v jeho (jejich) konečně velké hodnotě (velkých hodnotách)*. Podstatné jsou např. všechny argumenty *Cobb-Douglasovy* funkce a všechny výrobní faktory v *ACMS*-funkci s kladnou hodnotou parametru ρ. Naopak, při záporném ρ jsou výrobní faktory u *ACMS*-funkce nepodstatné, stejně jako výrobní faktory v produkční funkci typu *ADDILOG*, kde jsou argumenty vázány aditivně.

Definice 10 Substitučnost (*nahraditelnost*) dvou faktorů

Vlastnost se vztahuje k možnosti nahrazení dvou dosazovaných množství výrobních faktorů jinými dvěma množstvími vedoucími k téže hodnotě produkce. Jestliže v určitém bodě - faktorové kombinaci - existují kladné mezní produktivity dvou faktorů - pak lze říci, že tyto faktory jsou v substitučním vztahu (snížení jednoho musí být kompenzováno zvýšením druhého, má-li být úroveň produkce neměnná). Pojem však lze zavést i u produkčních funkcí, které nejsou diferencovatelné a dokonce ani nejsou spojité.

F.Pokropp v [1] definuje dva *plně substituční faktory* (neklesající produkční funkce), např. r-tý a s-tý) rovností oborů funkčních hodnot

$$F\left(x_1,....,X_r,....,x_s,....,x_n\right)=F\left(x_1,....,x_r,...X_s,....,x_n\right) \tag{4.2}$$

Při $1 \le r, s \le n$, kde X_r resp. X_s označují obor přípustných hodnot, zpravidla interval, kterých může nabývat r-tý resp. s-tý faktor. Nejsou-li uvažována omezení v rozsahu přípustných hodnot faktorů, pak $X_s = X_r = (0,+\infty)$.

Pojem *lokální substitučnosti* se zasazuje do prostředí mezních užitků (*substitučních*) faktorů v *neklesající produkční funkci*.

Nechť máme $F_r(\boldsymbol{x})$, $F_s(\boldsymbol{x})$ dva mezní produkty v bodě $\boldsymbol{x}$. Pak jsou r-tý a s-tý faktory tomto bodě (tedy *lokálně*) substituční) platí-li: $F_r(\boldsymbol{x}) > 0$ $F_s(\boldsymbol{x}) > 0$.

Definice 11 Limitovatelnost produkční funkce resp. faktoru

Pojem limitující produkční funkce je jistým protějškem substituční vlastnosti a souvisí s již zavedenou vlastností podstatnosti faktorů. Je spojován se situacemi, kdy nezvyšování množství jednoho nebo skupiny faktorů znemožňuje růst celkového výnosu, i když (třeba bez omezení) zvyšujeme množství faktorů ostatních (*nelimitujících*). Lze přitom rozlišit slabou a silnou limitovatelnost, kdy *slabá limitovatelnost* představuje pouze nutnou zatímco *silná limitovatelnost* současně nutnou i postačující podmínku k tomu, aby zvýšení množství limitujícího faktoru (skupiny faktorů) implikovalo zvýšení celkové produkce[1].

Slabá limitovatelnost byla R.W.Shephardem v [2] definována jako podmínka:

Existuje-li taková kombinace výrobních faktorů $x_j^*,....,x_s^*$ (při nelimitujících faktorech $x_{s+1},....,x_n$), že pro jakýkoliv vektor $x = (x_1,....,x_s, x_{s+1},....,x_n)$, kde $x_j \le x_j^*$, $j = 1,....,s$ platí $F(x) < M$ pro nějakou (dostatečně velkou) konstantu M, (tj. $F(x)$ je shora omezená), pak řekneme, že kombinace $x_j^*,....,x_s^*$ je *limitující*. □.

Souvislost s podstatností faktoru je dána větou (viz [2]) .

VĚTA 1 Nechť produkční funkce $F(\boldsymbol{x})$ splňuje axiom (P7*), tj. účinné podmnožiny $E(y)$ jsou ohraničené pro libovolnou hodnotu produkce y. Pak platí, že ***faktor*** (resp. *faktorová kombinace*) ***je slabě limitující právě tehdy, když je podstatný***(á).

Důkaz : převezmeme z publikace [2]:

□.

Zesílením předchozí vlastnosti je ***silná limitovatelnost***, která je dána podmínkou :
Platí-li pro jakoukoliv kombinaci výrobních faktorů $x_j^*,....,x_s^*$ (při nelimitujících $x_{s+1},....,x_n$) a jakýkoliv vektor $x = (x_1,....,x_s, x_{s+1},....,x_n)$ takový, že $x_j \le x_j{}^*$ $j = 1,....,s$ platí. že $F(x)$ je shora omezená, pak je daná faktorová kombinace. $x_j^*,....,x_s^*$ limitující. □.

Z definice, která má globální povahu, je ihned zřejmé, že silně limitující faktor je i slabě limitující (a je tedy také podstatný, pokud je ovšem splněn axiom (P7*)).

Protikladem substituční vlastnosti je taková situace, kdy výroba může racionálně probíhat pouze tehdy, jestliže část nebo všechny výrobní faktory se účastní výrobního procesu v pevně určeném poměru. (Tento poměr může, ale také nemusí záviset na velikosti úhrnné produkce).

Definice 12
Krajním případem ***komplementární*** produkční funkce, která výše uvedený typ technologie popisuje vztahem:

$$F(x_1, x_2,....,x_n) = \min\left[\frac{x_1}{a_1}; \frac{x_2}{a_2},....,\frac{x_n}{a_n}\right] \tag{4.3}$$

---

[1] Georgescu-Roegen v této souvislosti mluví o limitující (analogicky ke slabé limitovatelnosti) resp. limitativní (obdobě silné limitovatelnosti) faktorové kombinaci. U první vlastnosti jsou určující technické důvody, zatímco druhá má zpravidla též sociální a ekonomické pozadí.

ve kterém např. hodnota --- v nějakém bodě x^0 (a při předem daných technologických koeficientech $a_j, j = 1,2,....,n$) určuje limitující minimální hodnotu produkce). V účinných bodech izokvant je minima dosaženo současně ve všech argumentech funkce (2.1), přičemž poměr $\frac{x_j}{a_j}$ nezávisí na objemu produkce.

V “obecných” komplementárních funkcích je pojem “fixních proporcí” zahrnutých faktorů chápán poněkud volněji. Jestliže definujeme produkční funkci ve tvaru $y = Min(f_1(x_1),....,f_n(x_n))$, kde jednotlivé f_j vyjadřují maximálně dosažitelnou hodnotu produkce, jestliže j-tý faktor je ve výrobním procesu uplatněn v množství x_j, pak množina účinných bodů na jednotlivých izokvantách nemusí být přímka procházející počátkem. Pokud jsou všechny funkce f_j rostoucí, pak vždy existuje jen jediná kombinace, v níž jsou všechny faktory slabě limitující.

Pak: $f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = ... = f_n(x_n^*)$, přičemž (poloha bodu x^* závisí na dosaženém objemu produkce y).

(4.4) $$F(x_1, x_2,....,x_n) = \min\left[f_1(x_1); f_2(x_2),.....,f_n(x_n)\right]$$

Separabilita Smysl této vlastnosti se váže k určité relativní nezávislosti postavení příslušného faktoru v ekonomickém vztahu. Tato “nezávislost” má zpravidla podstatný vliv na možnost racionální agregace faktorů téže povahy do makroagregátu v makroprodukční funkci. Separabilita se buď definuje ve vztahu k monotónnosti funkce (nazvěme ji relační separabilita) nebo ve vztahu k mezní míře substituce faktorů, které mají být agregovány (tzv. funkcionální separabilita).

Definice 13 Separabilita produkční funkce

Relační separabilita

Tento přístup uplatňuje např. Pokropp v [1]; vlastnost je pak představována implikací (v zápisu pro r-tý faktor):

z nerovnosti $F(x_1,....,x_r,....,x_n) \le F(x_1,....,x_r^*,....,x_n)$

(4.5) vyplývá vztah $F(x_1^*,....,x_r,....,x_n^*) \le F(x_1^*,....,x_r^*,....,x_n^*)$

pro jakákoliv dosazení hodnot ostatních faktorů $x_j, x_j * j \ne r$. Zvýšení, resp. snížení produkce způsobené pouze parciálním působením r-tého (separabilního) faktoru, je nezávislé na jakýchkoliv dosazených hodnotách ostatních zahrnutých faktorů.

Funkcionální separabilita je definována ve vztahu k mezní míře substituce.

Proveďme za tímto účelem rozdělení všech n výrobních faktorů do několika, řekněme q disjunktních skupin , a to tak, aby do stejné skupiny patřily faktory, které jsou v nějakém smyslu “příbuzné”. Tím dostaneme rozdělení všech n faktorů do q skupin při četnostech skupin $n_1, n_2,....,n_q$, kde $\sum n_i = n$.

Funkcionální separabilita je charakterizována nezávislostí mezní míry substituce (mezi dvěma uvažovanými faktory) na změnách kterékoliv jiného výrobního faktoru (mimo oba uvažované). Formálně zapsáno :

(4.6) $$\frac{\delta\left(\frac{F_i}{F_j}\right)}{\delta x_k} = 0 \quad \text{nebo také} \quad F_j \cdot F_{jk} - F_k \cdot F_{jk} = 0$$

Je zřejmé, že anulovaný výraz obsahující toliko parciální derivace produkční funkce získáme z předešlého známým pravidlem pro derivaci zlomku podle x_k (nehledě na vynásobení F_j^2).

Definice 14 A

Řekneme, že **produkční funkce $F(x_1,...,x_r,....,x_n)$ je silně separabilní** s ohledem na přijaté dělení n výrobních faktorů do q skupin, jestliže vztah (*) platí pro všechny faktory i z r-té skupiny a všechny faktory j z s-té skupiny (r-tá a s-tá skupina jsou disjunktní)

Definice 14 B

Řekneme, že **produkční funkce $F(x_1,....,x_r,....,x_n)$ je slabě separabilní** s ohledem na přijaté dělení n výrobních faktorů do q skupin, jestliže vztah (*) platí pro všechny faktory i a j z r-té skupiny. Jak slabá, tak silná separabilita mohou platit v bodě (konkrétním množství faktorů) i globálně.

Vyjádříme-li pojmy slabé a silné separability poněkud jinými slovy, lze říci toto :

Množina faktorů patřící do r-té skupiny (při dekompozici všech n faktorů disjunktně a vyčerpávajícím způsobem do q skupin) ***je slabě separabilní*** vůči všem ostatním faktorům, ***jestliže mezní míra substituce mezi kterýmikoliv dvěma x_j, x_k z r-té skupiny je nezávislá na změně*** kteréhokoliv jiného ***faktoru nepatřícího do této skupiny.***
Produkční funkce je slabě separabilní, jestliže tato vlastnost platí pro všechny skupiny z přijatého členění všech n faktorů do q skupin, $q < n$.

Silná (také ***aditivní) separabilita produkční funkce předpokládá, že slabá separabilita platí pro faktory z libovolné dvojice tříd (r-té, s-té) vůči všem ostatním faktorům*** (při přijatém členění všech n faktorů do q tříd).

Poznámka: V definici aditivní separability se připouští, že $s = r$ (jde tedy o dvojici téže skupiny), takže ze silné separability vyplývá slabá.

Velmi zajímavým zjištěním je dále skutečnost, že funkcionální separabilita (slabá i silná) má bezprostřední vliv také na strukturní tvar produkční funkce, jestliže tato funkce je separabilní. Blíže o tom vypovídá následující věta :

VĚTA 2 (Goldman a Uzawa 1964)

a) Produkční funkce $\boldsymbol{F(x)}$ je ***globálně slabě separabilní*** s ohledem na přijaté dělení do $q\ (q > 2)$ disjunktních tříd, právě tehdy, když lze tuto funkci vyjádřit zápisem

(4.7) $$F(\boldsymbol{x}) = G\left(f^1(x^1), f^2(x^2), ..., f^q(x^q)\right) ,$$

kde G je rostoucí funkce a $f^i(x^i)$ jsou nějaké funkce, z nichž každá má za argumenty pouze faktory náležející do i-té třídy $(i = 1, 2, ..., q)$.

a) Produkční funkce $\boldsymbol{F(x)}$ je ***globálně silně separabilní*** s ohledem na přijaté dělení do $q\ (q > 2)$ disjunktních tříd, právě tehdy, když lze tuto funkci vyjádřit zápisem

(4.8) $$F(\boldsymbol{x}) = G\left(\sum_{i=1}^{q} f^i(x^i)\right) ,$$

kde G je rostoucí funkce a $f^i(x^i)$ jsou funkce, které mají za argumenty pouze faktory náležející do i-té třídy $(i = 1, 2...., q)$.

Pokud je produkční funkce *separabilní*, je takto umožněna jistá decentralizace v rozhodování, neboť lze optimalizovat po krocích (krok ve výběru optima v dané skupině není nijak podmíněn situací v jiné skupině). Zajímavé je, že i z historického pohledu vymezuje určité funkční tvary. Lze totiž ukázat, že *Cobb-Douglasova funkce* a *ACMS-funkce* jsou (explicitně) *silně separabilní*, jakož i to, že Hanochovy *CRESH* a CDE- funkce jsou (implicitně) *silně separabilní*.

Častým předmětem zkoumání je vliv proporcionálního zvyšování množství faktorů na hodnotu produkce. K tomuto účelu je nejčastěji uplatňován pojem homogenity funkce představován definicí.

Definice 14 - Homogenita produkční funkce

Jestliže pro produkční funkci $F(x_1, x_2,...., x_n)$ platí vztah

(4.9) $$F(\lambda.x_1, \lambda.x_2,...., \lambda.x_n) = \lambda^s.F(x_1, x_2,...., x_n),$$

kde λ je nějaké kladné číslo určující míru proporcionální změny vstupů a s je pevná konstanta (může být i záporná, zpravidla se přijímá omezení $s > -1$) udávající míru zvýšení (snížení) funkční hodnoty v uvažovaném vztahu (stupeň homogenity), řekneme je ***produkční funkce je homogenní stupně s***. **Jestliže $s = 1$**, řekneme, že ***funkce je lineárně homogenní.*** Podle velikosti této konstanty se mluví o rostoucích $(s > 1)$, klesajících $(s < 1)$ či konstantních výnosech z rozsahu výroby $(s = 1)$.

Poznámka Charakteristickou geometrickou vlastností izokvant generovaných lineárně homogenní produkční funkcí $F(x)$ je rovnoběžnost tečen k těmto izokvantám v bodech, které jsou průsečíky izokvant s paprsky (polopřímkami) vycházejícími z počátku souřadnic. Je tomu tak proto, že *mezní míra substituce* mezi kterýmikoliv dvěma faktory *zůstává při proporční změně všech faktorů konstantní* (jde o homogenní funkci stupně 0).

Lemma: Nechť je produkční funkce $F(K,L)$ homogenní funkce stupně 1. Potom je mezní míra substituce r_{KL} mezi faktory K, L u této produkční funkce homogenní funkce stupně 0.

ověření: Nechť platí (4.9), pak pro r_{KL}, která je definována vztahem

$$r_{KL} = \frac{F_K}{F_L}$$

$$F_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial x_K} \qquad F_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial x_L}$$

Definice 15 - Homoteticita produkční funkce

Homotetickou (produkční) funkci lze vyjádřit ve tvaru:

(4.10) $$F(x_1, x_2,...., x_n) = \Phi(G(x_1, x_2,...., x_n)),$$

kde G je nějaká homogenní funkce stupně 1 vstupních výrobních faktorů a Φ je nezáporná, spojitá a rostoucí funkce jedné proměnné s vlastnostmi $\Phi(0) = 0; \lim_{z \to \infty} \Phi(z) = +\infty$.

Lze snadno ukázat, že z (nezáporné) homogenity kteréhokoliv stupně vyplývá homoteticita, nikoliv však obráceně.

Podobně jako u lineární homogenity vyznačuje se struktura izokvant specifickou vlastností. K určení celé množiny izokvant postačuje znalost "jednotkové izokvanty", tj. izokvanty odpovídající produkci $y^0 = 1$. Všechny ostatní izokvanty můžeme získat radiální expanzí z počátku souřadnic tak, že libovolnou kombinaci faktorů na této izokvantě vynásobíme poměrem $\frac{\Phi^{-1}(y)}{\Phi^{-1}(1)}$. Tvar izokvant je tedy nezávislý na objemu produkce y.

Ve vztahu k pružnosti substituce libovolných dvou faktorů lze u homotetické produkční funkce ukázat, že se tato může měnit při pohybu po zvolené izokvantě, avšak zůstává konstantní podél paprsku vycházejícího z počátku (tj. nemění-li se proporce faktorů).

Definice16 - Linearita v parametrech (*po eventuální transformaci*)

(4.11) $$F(x_1,....,x_s,....,x_n) = (b + a_1 g_1(x_1) + ... + a_n g_n(x_n))$$

Výhodnost nelineárních tvarů, jež jsou lineární v parametrech, je snadnost, se kterou se zpravidla provede odhad parametrů těchto funkčních tvarů (produkční, nákladové aj.) Typickým příkladem je mnohočlen v n proměnných.

(4.12) $$F(x_1,....,x_s,....,x_n) = g^{-1}(b + a_1 g_1(x_1) + ... + a_n g_n(x_n)).$$

Snad vůbec nejznámější příklad funkce lineární v parametrech po transformaci je CD-funkce. Transformace je zde zřejmě logaritmická.

Definice 17- Kvazilinearita a zobecněná kvazilinearita

Pojem lineární aditivity zobecnil Wolfgang Eichhorn v [3] tak, že na jednotlivé prvky vztahu ( ) uplatňuje spojitou monotónní transformaci, k níž, jak známo, existuje inverzní. Ekonomický vztah (produkční, nákladová, poptávková funkce) může být za těchto okolností zapsán jako:

(4.13) $$F(x_1,....,x_s,....,x_n) = g^{-1}(b + a_1 g(x_1) + ... + a_n g(x_n)),$$ kde

g je spojitá monotónní funkce a dále b, $a_1,....,a_n$ jsou vhodné konstanty (a_i nenulové).
ACMS – funkce je kvazilineární (obecná mocnina řádu $-\rho$)

Zobecněním kvazilinearity je případ, kdy inverzní funkce ve vztahu (4.13) není totožná s jednofaktorovými funkcemi uvnitř závorky pravé strany. Zobecněnou kvazilineární funkci F lze tedy zapsat ve tvaru:

(4.14) $$F(x_1,....,x_s,....,x_n) = h(g_1(x_1),....,g_s(x_s),....,g_n(x_n)),$$ kde

$g_1,....,g_n$ jsou vesměs spojité a ryze monotónní funkce. Oproti (4.13) se nevyžaduje symetrie vnitřních funkcí g_i, $i = 1,....,n$ vůči jednotlivým argumentům.

Předchozí výčet vlastnosti – ač ne vyčerpávající – umožňuje provést jistou typologii v rámci produkčních nebo nákladových funkcí. Přirozeně, některé z těchto vlastností (např. substitučnost vs. komplementarita) se vzájemně vylučují. Daný výrobní vztah je proto třeba vyšetřovat obezřetně a mít na paměti, že ne ve všech oblastech faktorového prostoru musí funkce, resp. vztah některých jejich výrobních faktorů vykazovat stejné chování.