5.1 Nákladová funkce a její vlastnosti

Dosud uvažovanou situaci (naturálně chápaný výrobní proces s 1 výrobkem) rozšíříme v této části ve dvou směrech. V prvé řadě rozšíříme uvažování na situaci, kdy místo skalární hodnoty produkce bude výstup z výrobního procesu tvořen vektorem m různých výrobků $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$. Tyto výrobky nemusí být nutně finálními produkty, ale třeba meziprodukty, které mohou vstupovat do navazujících výrobních procesů. Za druhé zavedeme do našich úvah cenová hlediska, a to jednak zavedením jednotkových cen výrobních faktorů, v podobě vektoru $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ a obdobně jednotkových cen výrobků jako vektor $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_m)$. Přitom může platit jak $m < n$, tak také $n < m$ (a přirozeně, byť ojediněle též $m = n$), neboť počet výrobků vůči počtu výrobních faktorů může být v různých reálných situacích velmi proměnlivý.[1] S těmito prostředky můžeme přistoupit k definici nákladové funkce:

Definice 5.1

Mějme dán vektor $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vyjadřující určité množství skupiny výrobků $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ vyráběných v dané technologii specifikované produkční funkcí $F(\boldsymbol{x})$. Nechť dále jednotkové *ceny* těchto *výrobních faktorů* jsou po řadě $p_1, p_2, ..., p_n$ a ty vytvářejí dohromady cenový vektor výrobních faktorů $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Pak

Nákladová funkce [*cost function*] (příslušná k produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$) je funkce $n + m$ proměnných definovaná vztahem

(5.1) $$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Min}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \,;\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}))$$, kde

$L(\boldsymbol{y})$ je produkční množina vstupů odpovídající produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$ na hladině produkce reprezentované vektorem výrobků $\boldsymbol{y}$. □

Jak je z uvedené definice patrné, argumentem nákladové funkce je jednak vektor výrobků $\boldsymbol{y}$, jednak vektor cen výrobních faktorů $\boldsymbol{p}$. Hodnota nákladové funkce je pak nejúspornější výdaj spojený při daných cenách $\boldsymbol{p}$ s nákupem výrobních faktorů v množství $\mathbf{x}$ umožňujících dosáhnout (vektorové) produkce o velikosti $\boldsymbol{y}$.

V případě, že výstup/produkci představuje pouze jediný výrobek, lze pro popis výrobní technologie použít produkční funkci $F(x_1, x_2, ..., x_n)$. Nákladovou funkci pak definujeme jako

(5.1A) $$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Min}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \,;\, F(\boldsymbol{x}) \geq y)).$$

Poznámka 5.1 Nákladová funkce může být definována i pro případ, že bychom se nacházeli v nekonkurenčním prostředí. Pak bychom mohli jednotlivé složky vektoru $\boldsymbol{p}$ interpretovat jako *stínové ceny*. Množinu $\boldsymbol{Z} = \{(y, x); x \in L(y), resp. y \in P(x)\}$ budeme nazývat ***množina výrobních možností*** („***production possibility set***"). Jde o množinu všech možných výrobních kombinací $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ takových, že s vektorem vstupů $\boldsymbol{x}$ lze dosáhnout (vyrobit) množinu výstupů $\boldsymbol{y}$.

[1] Případy, kdy z jediné suroviny lze získat více produktů nejsou nijak výjimečné: 18-karátové zlato lze variantně užít na zhotovení řetízků, náušnic, prstýnků či hodinkových pouzder, z ropy lze příslušnými technologickými postupy získat benzín, petrolej či dehty, ze dřeva lze vyrobit desítky různých produktů apod.

Nyní uvedeme pro případ $m=1$ vlastnosti přisuzované obecné nákladové funkci (5.1)[2]:

VĚTA 5.1

Nákladová funkce $\mathbf{C}(y,\mathbf{p})$ definovaná v (5.1A) ve vztahu k produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$, která splňuje vlastnosti (P1),...., (P6), je

(C1) ***reálná, konečná** a **nezáporná funkce** $m+1$ **proměnných definovaná pro všechny kladné ceny*** $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,....,p_n)>0$ a pro všechny ***kladné*** dosažitelné výstupy y.

(C2) Platí $C(y,\boldsymbol{p})>0$ pro $y>0$, přičemž $\mathbf{C}(0,\mathbf{p})=0$.

(C3) Nákladová funkce $\mathbf{C}(y,\mathbf{p})$ je

(a) ***neklesající funkce výstupu*** y, tj. pro $y^1<y^2$ platí $C(y^1,\boldsymbol{p})\le C(y^2,\boldsymbol{p})$ pro pevné $\boldsymbol{p}$,

(b) ***při neomezeně rostoucím výstupu*** rovněž ***neomezeně roste***, tj. $\lim\limits_{y\to\infty} C(y,\mathbf{p})=\infty$,

(c) ***neklesající v cenách***, tj. pro $\boldsymbol{p}^1\le\boldsymbol{p}^2$ platí $C(y,\boldsymbol{p}^1)\le C(y,\boldsymbol{p}^2)$ pro pevné y.

Zápisem $\boldsymbol{p}^1\le\boldsymbol{p}^2$ rozumíme, že ${p_j}^1\le{p_j}^2$ pro všechna j, kdy aspoň pro jedno $j^*: {p_{j*}}^1<{p_{j*}}^2$.

(C4) $C(y,\boldsymbol{p})$ je funkce ***(polo-)spojitá zdola v proměnné*** y ***a spojitá v proměnných*** $\boldsymbol{p}$.

(C5) $C(y,\boldsymbol{p})$ je funkce ***lineárně homogenní v cenách*** $\boldsymbol{p}$, tzn. platí pro ni vztah

(5.3) $$C(y,\lambda.\boldsymbol{p})=\lambda..C(y,\boldsymbol{p}).$$

(C6) $C(y,\boldsymbol{p})$ je funkce ***konkávní v cenách p*** pro libovolné y, tzn. platí pro vztah

(5.4) $$C(y,\lambda.\boldsymbol{p}^1+(1-\lambda).\boldsymbol{p}^2)\ge\lambda..C(y,\boldsymbol{p}^1)+(1-\lambda).C(y,\boldsymbol{p}^2).$$

Vlastnost (C2) mj. říká, že v případě, že se nic nevyrábí, nevznikají žádné výrobní náklady. Při růstu cen výrobních faktorů (za jinak nezměněné výrobní situace) je dle (C3) oprávněné vyloučit pokles nákladů. Na druhé straně celkové náklady nemusejí nutně vzrůst, neboť nemusejí být aktivně využívány veškeré výrobní faktory (např. ty, u nichž dojde k cenovému růstu), je-li možné použít jiné (existuje-li substitučnost mezi faktory). Matematickou vlastnost (C4) vyvoditelnou ze spojitosti (shora) produkční funkce lze ve vztahu k výstupu interpretovat tak, že požadavek po (dodatečném) zvýšení produkce může být za určitých okolností provázen skokovitým přírůstkem výrobních nákladů. Ve vztahu k cenám je tvrzení (C4) zřejmé. Konkávnost (C6) vystihuje okolnost, že při (neproporčním) zvýšení (některých) cen stoupnou náklady zpravidla menší měrou, než by odpovídalo maximální hodnotě cenového nárůstu. Podobně, (C5) konstatuje, že (dle očekávání) se při proporční změně cen úměrně změní výrobní náklady.

Všimněme si jistých rozdílů vlastností nákladové funkce oproti vlastnostem výdajové funkce:

- *Nákladová funkce je* pouze *jednostranně spojitá*, zatímco pro výdajovou funkci jsme přijali *oboustrannou spojitost*. Důvodem je jednostranná spojitost produkční funkce (P5), zatímco u užitkové funkce jsme předpokládali spojitost (z obou směrů) (U3).

- *Nákladová funkce je* pouze *neklesající v produkci*, zatímco u *výdajové funkce* jsme specifikovali ryzí monotónnost (*růst*) *v užitku*. Příčinou je slabší předpoklad (P3) přijatý u produkční funkce oproti (U2) u užitkové funkce.

[2] Uvedené vlastnosti lze vyvodit z definičního vztahu (5.1A) , na základě přijatých vlastností produkční funkce a z vlastností funkce *Minimum*.

Vlastnosti spojené s „hladkostí“ nákladové funkce nejsou „symetrické“ ve vztahu k produkci a k cenám: nepatrná změna kterékoliv ceny nemůže vést ke skokovitému růstu nákladů, ale nepatrný úbytek produkce skokovitý pokles nákladů způsobit může – jde o důsledek (P5).

Důkaz:

(C1) Platnost tvrzení je zřejmá: funkce definovaná v (5.1A) je *reálná a nezáporná*, neboť je definována jako (*minimální*) skalární součin *reálného kladného vektoru cen* $\boldsymbol{p}$, resp. *reálného nezáporného vektoru výrobních faktorů* $\boldsymbol{x}$. *Hodnota* tohoto *skalárního součinu je konečná* (pro konečné jednotkové ceny a pro konečná množství výrobních faktorů).

(C2) $\boldsymbol{C}(0,\boldsymbol{p}) = Min(px; F(x) \geq 0) = 0$, neboť stačí vzít nulová množství výrobních faktorů, pro která platí dle vlastnosti (P1) produkční funkce rovnost $F(0) = 0$. Je-li hodnota produkce kladná, tj. $y > 0$, musí být kladná i hodnota nákladové funkce, protože dle definice $\boldsymbol{Min}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}; F(\boldsymbol{x}) > 0) > 0$ (aspoň jeden výrobní faktor musíme vzít v kladném množství).

(C3a) Dále musí platit $\boldsymbol{C}(y^1,\boldsymbol{p}) \leq \boldsymbol{C}(y^2,\boldsymbol{p})$ pro $y^1 \leq y^2, y^1 \neq y^2$, neboť

$$\boldsymbol{C}(y^1,\boldsymbol{p}) = \underset{x}{\boldsymbol{Min}}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}; F(\boldsymbol{x}) \geq y^1)) \leq \underset{x}{\boldsymbol{Min}}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}; F(\boldsymbol{x}) \geq y^2)) = \boldsymbol{C}(y^2,\boldsymbol{p}), \tag{5.5}$$

protože – při stejném vektoru jednotkových cen – nemůže být faktorová kombinace poskytujících vyšší produkci (y^2) levnější než faktorová kombinace poskytující nižší produkci (y^1). $\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p})$ je tedy neklesající v y.

(C3b) ***C neomezeně roste nade všechny meze:***

Předpokládejme naopak, že by existovala horní hranice nákladů C^*, kterou by nemohla překročit jakkoliv velká faktorová kombinace. Zvolme tedy $\boldsymbol{x}^*$ takové, že platí

$$\boldsymbol{C}^*(y,\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}^*; F(\boldsymbol{x}) \geq y\}$$

Zvolme nyní proporčně zvětšenou faktorovou kombinaci $\boldsymbol{x}^{**} = 1{,}1.\boldsymbol{x}^*$, pro kterou máme

$$\boldsymbol{C}^{**}(y,\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}^{**}; F(\boldsymbol{x}) \geq y\}$$

Je zřejmé, že tato faktorová kombinace je spojena s vyšším vynaložením nákladů (při neměnných cenách) než $C^*(y,\boldsymbol{p})$, což je spor s předpokladem, že C^* je ona nepřekročitelná horní hranice. Odtud tedy nutně plyne

$$\text{tj. } \lim_{y\to\infty} C(y,\boldsymbol{p}) = \infty\,.$$

Kdyby totiž existovala horní hranice nákladů, pak bychom mohli neomezeně zvyšovat produkci, aniž by nadále rostly náklady. Takovouto, zajisté jinak přitažlivou eventualitu připustit nemůžeme. Tím je dokázáno Tvrzení (C3b). □

(C3c) $\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p})$ ***je neklesající v p :***

Pro dva neidentické vektory se vztahem $\boldsymbol{p}^1 \leq \boldsymbol{p}^2$ zřejmě platí

$$\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p}^1) = \boldsymbol{Min}(\boldsymbol{p}^1\cdot\boldsymbol{x}^*; F(\boldsymbol{x}^*) \geq y)) \leq \boldsymbol{Min}\left(\boldsymbol{p}^2\cdot\boldsymbol{x}^{**}; F(\boldsymbol{x}^{**}) \geq y)\right) = .\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p}^2), \tag{5.6}$$

protože platí $\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}^{**} \leq \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{x}^{**}$: platnost první nerovnosti vyplývá z toho, že bod $\boldsymbol{x}^*$ je bodem, v němž se nabývá minima nákladů ve vztahu k cenovému vektoru $\boldsymbol{p}^1$, platnost druhé nerovnosti vyplývá z podmínky $\boldsymbol{p}^1 \leq \boldsymbol{p}^2$.

(C4) ***Polospojitost zdola/zleva*** budeme dokazovat přímo na základě definice této vlastnosti:

Zvolme nějaký *pevný* cenový vektor $\boldsymbol{p} > 0$ a nějakou *pevnou* hodnotu výstupu $y^* > 0$. Oběma přísluší nějaká hodnota nákladové funkce $C(y^*, \boldsymbol{p})$. Dále vezměme neklesající posloupnost *(skalárních)* hodnot $0 \leq y^N \leq y^{N+1} \leq y$. Potom zřejmě musí platit

$C(y^N, \boldsymbol{p}) \leq C(y^{N+1}, \boldsymbol{p}) \leq C(y^*, \boldsymbol{p})$ v důsledku již dokázané vlastnosti (C3a), že $C(y, \boldsymbol{p})$ je neklesající ve výstupu. Pak $\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{y}^N, \boldsymbol{p}\right) = \left\{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}^N ; F(\boldsymbol{x}) \geq y^N\right\}$ pro nějaké $\boldsymbol{x}^N$ dosahující produkce alespoň y^N. Definujme dále kompaktní (omezenou a uzavřenou) množinu v $n+1$ -rozměrném prostoru $Z = \left\{(y, x) : 0 \leq y \leq y^*; 0 \leq x; px \leq px^*\right\}$.

Zřejmě pak pro libovolné přirozené číslo N body (y^N, x^N) patří do Z. Protože posloupnost dvojic (y^N, x^N) zůstává v kompaktní množině $n+1$ rozměrného Eukleidovského prostoru, musí existovat její *konvergentní* podposloupnost (y^{N_k}, x^{N_k}), taková, že $\lim \boldsymbol{x}^{N_k} \equiv \boldsymbol{x}^{**}$ a $\lim y^{N_k} \equiv y^*$. Protože pro členy takovéto podposloupnosti (y^{N_k}, x^{N_k}) platí $F(x^{N_k}) \geq y^{N_k}$, musí i pro její limitu (*v kompaktní množině* Z) platit $F(\boldsymbol{x}^{**}) \geq y^*$. Nyní tedy máme

$\lim C(y^N, p) = \lim C(y^{N_k}, p) = \lim px^{N_k} = px^{**}$. Protože dále $F(\boldsymbol{x}^{**}) \geq y^*$, máme $p.x^{**} \geq C(y^*, p)$. Takže dostáváme $\lim C(y^N, p) \geq C(y^*, p)$. Ale protože na druhé straně též platí $C(y^N, p) \leq C(y^*, p)$, máme odtud $\lim C(y^N, p) \leq C(y^*, p)$. Oběma požadavkům vyhovuje zřejmě pouze možnost $C(y^N, p) = C(y^*, p)$. Odtud plyne polospojitost zdola/zleva funkce $C(y, \boldsymbol{p})$ pro jakékoliv y při kladném cenovém vektoru $p > 0$. □

(C5) Snadno ukážeme, že platí také ***lineární homogenita***:

(5.1A) $$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}, \lambda.\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Min}(\lambda.\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} ; F(\boldsymbol{x}) \geq y)) = \lambda..\boldsymbol{Min}(.\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} ; F(\boldsymbol{x}) \geq y)) = \lambda.\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}, \lambda.\boldsymbol{p}),$$

neboť λ je skalární hodnota a výsledkem násobení jednoho vektoru ve skalárním součinu skalární konstantou λ je λ-násobek původního skalárního součinu. □

(C6) Zbývá vyšetřit ***konkávnost v cenách***: Pro libovolné body $\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2$ zřejmě platí

$$C\left(y, \lambda.\boldsymbol{p}^1 + (1-\lambda).\boldsymbol{p}^2\right) = \underset{x}{Min}\left((\lambda.\boldsymbol{p}^1 + (1-\lambda).\boldsymbol{p}^2)\boldsymbol{x}; F(\boldsymbol{x}) \geq y\right) =$$

(5.7) $$= \left[\lambda.\boldsymbol{p}^1 + (1-\lambda).\boldsymbol{p}^2\right]x^* = \left[\lambda.\boldsymbol{p}^1 x^* + (1-\lambda).\boldsymbol{p}^2 x^*\right] \geq$$

$$\geq \lambda.\underset{x}{Min}(\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}; F(\boldsymbol{x}) \geq y) + (1-\lambda.)\underset{x}{Min}(\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{x}; F(\boldsymbol{x}) \geq y) =$$

$$\lambda.C\left(y, \boldsymbol{p}^1\right) + (1-\lambda).C\left(y, \boldsymbol{p}^2\right)$$

Jako $\boldsymbol{x}^*$ jsme označili takovou faktorovou kombinaci, která je nejúspornější možná ve vztahu k cenovému vektoru $\lambda\boldsymbol{p}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}^2$ a při níž se dosáhne produkce alespoň o velikosti y.

Toto $\boldsymbol{x}^*$ však nemusí být minimální ve vztahu k cenovým vektorům $\boldsymbol{p}^1$, resp. $\boldsymbol{p}^2$: odtud nerovnost (mezi druhým a třetím řádkem). $\square$

V řadě případů, kdy pracujeme s funkcemi, jejichž analytický tvar umožňuje nakládat s parciálními derivacemi, připojujeme k výše uvedeným předpokladům o produkční funkci, které umožňují vyvodit vlastnosti (C1) - (C6) nákladové funkce, ještě dodatečný:

$\boldsymbol{C(y, p)}$ je funkce dvakrát spojitě diferencovatelná v $\boldsymbol{p}$.

Tento předpoklad nám umožňuje doplnit dvě další, velmi užitečné vlastnosti nákladové funkce: Jde o **(C7)**

(5.8) $$\frac{\partial \boldsymbol{C(y,p)}}{\partial p_i} = x_i$$

Vztah (5.8) se nazývá ***Shephardovo lemma***[3] a dále vlastnost **(C8)**

(5.9) $$\frac{\partial^2 \boldsymbol{C(y,p)}}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{C(y,p)}}{\partial p_j \partial p_i}$$ - ***vlastnost symetrie*** s důsledkem $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_{ij}}{\partial p_j}$.

Význam Shephardova lemmatu spočívá především v možnosti generovat na základě známé nákladové funkce $\boldsymbol{C(y,p)}$ úplný systém poptávkových funkcí po jednotlivých výrobních faktorech. Smysl symetrické vlastnosti (C8) doceníme zejména při ekonometrických analýzách, neboť v případě, že platí symetrie, docílíme snížení počtu neznámých odhadovaných parametrů nákladové funkce. Omezí se tím riziko výskytu multikolinearity a uchová se potřebný počet stupňů volnosti při testování významnosti (případně i nelineárních) regresních parametrů.

<u>Příklad nákladové funkce</u> Uvažujme nákladovou funkci ve tvaru

(5.10) $$C(y,p) = y.\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \qquad \text{, kde } 0 < \alpha_i < 1 \ ; i = 1,2,...,n$$

která splňuje předpoklady (C1), (C2), je oboustranně spojitá a za přijatých předpokladů o parametrech α_i, je dále konkávní a lineárně homogenní v $\boldsymbol{p}$. Vzhledem k diferencovatelnosti lze pomocí Shephardova lemmatu (5.8) odvodit soustavu poptávkových funkcí ve tvaru

(5.11) $$x_i = \frac{\partial \boldsymbol{C(y,p)}}{\partial p_i} = \alpha_i . y ,$$

z čehož je patrné, že tato nákladová funkce představuje dost speciální poptávkovou strukturu, kdy jsou jednotlivé faktory poptávány (vůči produkci) v pevných poměrech, nezávislých na cenách. Skutečně, reprezentací příslušného produkčního schématu je Leontiefova produkční funkce. Symetrie zde platí v triviální podobě.

Zvláštní postavení má nákladová funkce, která se vztahuje k jednotkové velikosti výstupu/produkce. Je nazývána jednotkovou nákladovou funkcí.

Definice 5.2
Mějme dán vektor $\boldsymbol{e} = (1,1,....,1)$ jednotkových množství výrobků $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ vyráběných v určité technologii specifikované produkční funkcí $F(\boldsymbol{x})$. Nechť jednotkové *ceny výrobních faktorů* $x_1, x_2, ..., x_n$ jsou obsaženy ve vektoru $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Pak

[3] Důkaz Shephardova lemmatu najde čtenář v části teorie užitku – Tvrzení 4.1, vztah (4.12).

Jednotková nákladová funkce [*unit cost function*] příslušná nákladové funkci $C(y, \boldsymbol{p})$, resp. produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$, je funkce $n + m$ proměnných definovaná vztahem

(5.12A) $$\boldsymbol{C(e, p) = Min(p \cdot x\, ;\, x \in L(e))}$$, kde

$L(\boldsymbol{e})$ je produkční množina vstupů odpovídající produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$ na hladině produkce reprezentované vektorem jednotkových množství výrobků $\boldsymbol{e}$.

V případě jednovýrobkové produkční technologie popsané produkční funkcí $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ lze jednotkovou nákladovou funkci definovat jako

(5.12B) $$\boldsymbol{C(1, p) = Min(p \cdot x\, ;} F(\boldsymbol{x}) \geq 1)).$$

Argumenty jednotkové nákladové funkce jsou tedy jednotková množství výrobků $\boldsymbol{e}$ a cenový vektor výrobních faktorů $\boldsymbol{p}$. □

Poznámka 5.2 Jednotková nákladová funkce je zřejmě funkcí jen n argumentů (prvků cenového vektoru $\boldsymbol{p}$). Zavedeme pro ni značení $\widetilde{C}(\boldsymbol{p}) = C(1, \boldsymbol{p})$.

Poznámka 5.3 Jednotková nákladová funkce je reálná, konečná a kladná funkce, která je dále (v cenách) neklesající, konkávní a lineárně homogenní. Platí pro ni Shephardovo lemma (C7) a podmínka symetrie (C8).

Důkaz: Platnost plyne bezprostředně z vlastností nákladové funkce $C(y, \boldsymbol{p})$.

K užitečnému zjednodušení zápisu nákladové funkce dochází tehdy, jestliže je původní produkční funkce lineárně homogenní. Vztah je obsahem následujícího tvrzení:

TVRZENÍ 5.2

Jestliže je produkční funkce $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ definovaná vztahem (1.4) s vlastnostmi (P1)-(P7) lineárně homogenní, pak lze k ní příslušnou nákladovou funkci zapsat jako součin velikosti produkce y a jednotkové nákladové funkce $\widetilde{C}(\boldsymbol{p})$ příslušné nákladové funkci $C(y, \boldsymbol{p})$.

Důkaz: Jednoduchou úpravou nákladové funkce $C(y, p) = Min\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \;;\, F(x) \geq y\right\}$

dostaneme pro $y > 0$

$$C(y, \boldsymbol{p}) = Min\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \;;\, \frac{1}{y} F(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 1\right\}.$$

Vzhledem k lineární homogenitě lze dále psát

$$C(y, \boldsymbol{p}) = Min\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \;;\, F(\frac{x_1}{y}, \frac{x_2}{y}, ..., \frac{x_n}{y}) \geq 1\right\}$$

a dále vzhledem k vlastnosti multiplikativní komutativity minima

$$C(y, \boldsymbol{p}) = y Min\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{y} \;;\, F(\frac{x_1}{y}, \frac{x_2}{y}, ..., \frac{x_n}{y}) \geq 1\right\}.$$

Po nahrazení podílů x_i / y novými proměnnými $z_i = x_i / y$ tedy máme

$$C(y, \boldsymbol{p}) = y.Min \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i z_i \; ; F(z_1, z_2, ..., z_n) \geq 1 \right\} = y.\, C(1, \boldsymbol{p}) = y.\widetilde{C}(\boldsymbol{p}) .$$ □

5.2 Výnosová funkce a její vlastnosti

Obdobnou úlohu, jako má *nákladová funkce* ve vztahu k nákladové stránce výrobního procesu, má *výnosová funkce*, která reprezentuje (jako pojem sám i svými vlastnostmi) chování výnosové, peněžně ohodnocené (tržební) stránky výrobního procesu. (Produkční funkce má primárně zobrazovat technologickou stránku výroby).

Definice 5.3
Mějme dán vektor $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ vyjadřující určité množství skupiny výrobků $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m)$ vyráběných v dané technologii specifikované *skupinou produkčních funkcí*[4] $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$. Nechť dále jednotkové ceny těchto výrobků jsou po řadě $q_1, q_2, ..., q_m$ a ty vytvářejí dohromady vektor cen výrobků $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_m)$. Pak

Výnosová funkce [*revenue function*] (příslušná k produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$) je funkce $n + m$ proměnných definovaná vztahem

(5.12) $$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{Max}(\boldsymbol{q}.\boldsymbol{y}\,;\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$$, kde

$P(\boldsymbol{x})$ je *produkční množina výstupů* odpovídající produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$ na hladině produkce reprezentované vektorem výrobních faktorů $\boldsymbol{x}$. □

Jak je z této definice patrné, argumentem výnosové funkce je jednak *vektor výrobních faktorů* $\boldsymbol{x}$, jednak *vektor cen výrobků* $\boldsymbol{q}$. Hodnota výnosové funkce je pak maximální dosažitelný výnos (tržba) získatelný při daných cenách $\boldsymbol{q}$ s prodejem (vektoru) výrobků o objemech $\boldsymbol{y}$, které jsou vyrobitelné při nasazení vektoru výrobních faktorů o velikosti $\boldsymbol{x}$.

V případě, že výstup/produkce představuje pouze jediný výrobek, lze pro popis výrobní technologie použít produkční funkci $F(x_1, x_2, ..., x_n)$. Výnosovou funkci pak definujeme jako

(5.12A) $$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{Max}(\boldsymbol{q}.\boldsymbol{y}\,;\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{y}).$$

VĚTA 5.3

(R1) Výnosová funkce $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})$ definovaná v (5.12) ve vztahu k produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$, která splňuje vlastnosti (P1),...., (P6), je ***reálná, konečná** a **nezáporná funkce*** $m+1$ ***proměnných definovaná pro všechny kladné ceny*** $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_n) > 0$ a pro všechny ***kladné*** použitelné vstupy $\boldsymbol{x}$.

(R2) Platí $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}) > 0$ pro $x > 0$, přičemž $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{q}) = 0$.

(R3) Výnosová funkce $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})$ je

(a) ***neklesající funkce vstupu*** $\boldsymbol{x}$, tj. pro $\boldsymbol{x}^1 < \boldsymbol{x}^2$ platí $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{q}) \leq \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{q})$ pro pevné $\boldsymbol{q}$,

(b) ***při neomezeně rostoucích vstupech*** rovněž ***neomezeně roste***, tj. $\lim_{x \to \infty} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}) = \infty$,

---

[4] Přesněji by šlo o m tzv. *produkčních korespondencí*.

(c) ***neklesající v cenách***, tj. pro $\boldsymbol{q}^1 \le \boldsymbol{q}^2$ platí $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}^1) \le \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}^2)$ pro pevné y.

Zápisem $\boldsymbol{q}^1 \le \boldsymbol{q}^2$ rozumíme, že $q_j{}^1 \le q_j{}^2$ pro všechna j, kdy aspoň pro jedno $j^*: q_{j*}{}^1 < q_{j*}{}^2$.

(R4) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})$ je funkce ***(polo-)spojitá shora v proměnné x a spojitá v proměnných q***.

(R5) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})$ je funkce ***lineárně homogenní v cenách výrobků q***, tzn. platí pro ni vztah

(5.13) $$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\lambda.\boldsymbol{q}) = \lambda.\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}).$$

(R6) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})$ je funkce ***konkávní v cenách p*** pro libovolné y, tzn. platí pro ni vztah

(5.14) $$R(x,\lambda.\boldsymbol{q}^1 + (1-\lambda).\boldsymbol{q}^2) \ge \lambda..R(x,\boldsymbol{q}^1) + (1-\lambda).R(x,\boldsymbol{q}^2).$$ □

Vlastnost (R2) konstatuje, že v případě, že pro výrobu nemáme žádná (kladná) množství výrobních faktorů, nelze realizovat (žádnou produkci a tudíž) žádné tržby.

Při růstu cen výrobků (za neměnné výrobní situace) je dle (R3): (a) s růstem užitých množství výrobních faktorů nemožný pokles výnosů (ty však nemusí nutně růst, protože se nemusí užívat právě ty, u kterých se zvětšila potenciálně zvětšená množství), (c) nemožný pokles výnosů (za jinak stejných okolností), jestliže zdražíme ceny výrobků, (b) neohraničená hodnota tržeb, pokud soustavně zvyšujeme nasazená množství všech výrobních faktorů.

Vlastnost (R4) vyjadřuje opět zákonitosti matematické povahy: drobný cenový růst (pokles) výrobků nemůže vést ke skokovitému růstu výnosů, avšak drobný přírůstek výrobních faktorů může ojediněle (nepřímo přes skokovitý růst produkce) vést k nespojitému růstu výnosů.

Lineární homogenita (R5) je zřejmá: Proporcionální změna cen (všech) výrobků se odrazí v adekvátní změně hodnoty tržeb (stejně jako proporcionální změna cen výrobních faktorů vede k adekvátní změně nákladů).

Konečně konkávnost (R6) znamená mj. že při poklesu (který nemusí být nutně proporční) cen výrobků nemusí adekvátně poklesnout tržby získané z prodeje výrobků, neboť výrobce v rámci dané technologie (připouští-li se substituční možnosti) může přejít (se stejnými výrobními faktory) k výrobě jiných produktů, u kterých ceny poklesly (oproti průměru) méně, případně vzrostly.

důkaz Věty 2 bude doplněn později, v podstatě však probíhá (tvrzení po tvrzení) obdobně jako důkaz vlastností výdajové funkce.

5.3 Zisková funkce a její vlastnosti

Minimalizaci výrobních nákladů lze chápat jako jednu z fází dvoustupňové procedury, která v celku pojímá zisk z výrobního procesu jako maximální dosažitelný rozdíl mezi hodnotou produkce - danou skalárním součinem vektoru výrobků a jim příslušných jednotkových cen - a výrobními náklady (vyjádřenými obdobným skalárním součinem vektorů výrobních faktorů a jejich jednotkových cen). Na ni navazuje druhá fáze: maximalizace hodnoty realizované produkce (objemu tržeb) představované výnosovou funkcí, od níž se odečítají minimalizované výrobní náklady (spojené s pořízením výrobních faktorů v optimálních množstvích).

Definice 5.4

Mějme dán vektor m výrobků $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ a vektor n výrobních faktorů $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ využívaných v rámci dané technologie určené produkční funkcí $F(\boldsymbol{x})$. Vedle těchto vektorů uvažujme ještě dva další vektory, a to jednak již zavedený vektor cen výrobních faktorů $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ a vedle něj ještě vektor $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_m)$, který představuje jednotkové ceny výrobků. Předpokládáme opět nezáporné ceny $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q} > \boldsymbol{0}$.

Zisková funkce [*profit function*] (příslušná k produkční funkci $F(x)$) je funkce $m+n$ proměnných definovaná vztahem

(5.15) $$\Pi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = Max(\boldsymbol{qy}-\boldsymbol{px}\,;(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$$, kde

$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ je opět množina výrobních možností uvažovaných v rámci dané technologie. Výraz (5.15) lze přepsat ve zkráceném vyjádření pro případ, že vezmeme $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{y},-\boldsymbol{x})$ jako tzv. vektor čistého výstupu (“*net output vector*”)

(5.15A) $$\Pi(\,q^{*}) = Max(\boldsymbol{q}^{*}\cdot \boldsymbol{z}\,;\boldsymbol{z}\in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$$, kde

$\boldsymbol{z}$ je právě vektor čistého výstupu (kladný pro výstupy, záporný pro vstupy) a $\boldsymbol{q}^{*}$ je příslušný sdružený cenový vektor $\boldsymbol{q}^{*}=(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$. □

Ziskové funkci definované výrazem (5.15) přisuzujeme tyto elementární vlastnosti:

(Z1) $\Pi(\,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ je reálná funkce definovaná pro všechny kladné ceny (výrobků i výrobních faktorů) $p_1,\dots,p_n,\ q_1,\dots,q_m$. Uplatníme-li zkrácený zápis $\Pi(\boldsymbol{q}^{*})$, pak je tato funkce navíc nezáporná.

(Z2) $\Pi(\,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ je nerostoucí funkce v cenách výrobních faktorů a neklesající v cenách výrobků, tzn. platí: pro $p_r < p_{r*}$

(5.16A) $$\Pi(\,\boldsymbol{q},p_1,\dots,p_r,\dots,p_n) \ge \Pi(\,\boldsymbol{q},p_1,\dots,p_{r*},\dots,p_n),\ r,r^{*}\in\{1,2\dots,n\}$$

a podobně platí pro $q_s < q_{s*}$

(5.16B) $$\Pi(\,q_1,\dots,q_s,\dots,q_m,\boldsymbol{p}) \le \Pi(\,q_1,\dots,q_{s*},\dots,q_m,\boldsymbol{p}),\ s,s^{*}\in\{1,2\dots,n\}.$$

(Z3) $\Pi(\,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ je spojitá funkce ve všech argumentech $p_1,\dots,p_n,\ q_1,\dots,q_m$.

(Z4) $\Pi(\,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ je konvexní ve všech argumentech $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots q_m$. Znamená to, že platí

(5.17) $$\Pi\left(\lambda\boldsymbol{q}^1,\lambda\boldsymbol{p}^1,(1-\lambda)\boldsymbol{q}^2,(1-\lambda)\boldsymbol{p}^2\right) \le \lambda..\Pi\left(\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1,\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\right)+(1-\lambda).\Pi\left(\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1,\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\right).$$

(Z5) $\Pi(\,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ je lineárně homogenní funkce v argumentech $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_m$, tzn. platí

(5.18) $$\Pi(\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\lambda}.\Pi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \text{ pro libovolné } \boldsymbol{\lambda}>0.$$

Z tvrzení (Z1) *je zřejmé, že zisku se dosahuje tehdy, jestliže je hodnota realizované produkce vyšší, než činí vynaložené výrobní náklady.V opačném případě jde o ztrátu.*

Předpoklad (Z2) *je v souladu se skutečností, že růst cen výrobních faktorů (při nezměněné výrobní situaci) nemůže zvyšovat zisk, na který však naopak může příznivě působit růst cen výrobků.*

Opět je oprávněné předpokládat vztah (oboustranné) spojitosti zisku vůči cenám - viz. (Z3). *Důvody jsou shodné jako u nákladové a výnosové funkce.*

Ve vztahu k (Z4) *si povšimněme rozdílu oproti nákladové funkci, který vyplývá z rozdílného cílového kritéria. Konvexnost vyplývá ze dvou skutečností : stejnou vlastnost má i výnosová funkce – viz (R6) jako menšenec rozdílu (člen* ***qy****), menšitel je pak nákladová funkce, která je konkávní, takže jako záporně vzatá veličina* $-\boldsymbol{px}$ *musí být konvexní.*

(Z5) Proporční změna všech cen (jak cen výrobků, tak výrobních faktorů), např. při změně peněžní jednotky, musí mít za důsledek analogický přepočet výše původně dosaženého zisku.

Při aplikaci analytických funkčních tvarů obvykle užívaných jako zisková funkce je zpravidla účelné připojit ještě následující podmínku:

(Z6) $\Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ je dvakrát spojitě diferencovatelná podle všech svých argumentů.

Po doplnění této poslední vlastnosti lze obdobně jako u nákladové funkce uvažovat dva její důležité důsledky.

(5.20) **(Z7)** $\frac{\partial \Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial p_r} = x_r$, resp. $\frac{\partial \Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial q_s} = y_s$ pro $r = 1, 2, ..., n$; $s = 1, 2...., m$

(vztah je znám jako ***Hotellingovo lemma***) a dále opět vlastnost symetrie

(5.21A) **(Z7*)** $\frac{\partial^2 \Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial p_r \partial q_s} = \frac{\partial^2 \Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial q_s \partial p_r}$ s důsledkem $\frac{\partial x_r}{\partial q_s} = \frac{\partial y_s}{\partial p_r}$.

Jestliže do tohoto výrazu zavedeme zkrácené značení a sdružíme vektory cen (výrobků a výrobních faktorů) do souhrnného vektoru $\boldsymbol{q}^* = (q_1, q_2, ..., q_m, p_1, p_2, ..., p_n)$ a podobné sloučení provedeme pro vektor množství (výrobků a výrobních faktorů), který označíme $\boldsymbol{z} = (y_1, y_2, ...y_m, x_1, x_2, ...x_n)$, kde $y_i > 0$ a $x_i < 0$ (tedy opět pracujeme s vektorem čistého výstupu), můžeme poslední podmínku (Z7*) psát v obecnější formě:

(5.21B) **(Z7**)** $\frac{\partial^2 \Pi(\boldsymbol{q}^*)}{\partial q_r^* \partial q_s^*} = \frac{\partial^2 \Pi(\boldsymbol{q}^*)}{\partial q_s^* \partial q_r}$ s důsledkem $\frac{\partial z_r}{\partial q_s^*} = \frac{\partial z_s}{\partial q_r^*}$.

V podmínkách pro symetrii (5.21A), resp. (5.21B) můžeme tedy kombinovat navzájem ceny výrobků i výrobních faktorů. Výsledkem je soustava poptávkových funkcí symetrická ve vztahu k výrobkům i výrobním faktorům navzájem.

5.4 Nákladová minimalizace

Uvažujme minimalizační problém, v němž jsou nezáporné jednotkové ceny výrobních faktorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ určeny exogenně jako vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$, tedy

(5.18) $$_{x_i} Min \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$ za podmínky,

že dosahovaná úroveň produkce je rovna (alespoň) y^0, tj. $F(\boldsymbol{x}) \geq y^0$. K tomu připojíme podmínky nezápornosti množství výrobních faktorů $x_i \geq 0$.

Pohleďme na tuto optimalizační úlohu jako na problém nalézt vázaný extrém funkce a proměnných $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ (při pevných cenách/parametrech). Optimálního stavu (stavu rovnováhy) lze dosáhnout ve dvou krocích. Nejprve předpokládejme, že je dán objem produkce y^0 a ceny výrobních faktorů $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Spotřeba faktorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ je taková, že výrobní náklady $\boldsymbol{px}$ jsou minimální za podmínky, že $F(\boldsymbol{x}) = y$.

Tuto minimalizační úlohu lze řešit, jak známo, např. pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. S ohledem na jedinou omezující podmínku zde postačí jeden multiplikátor. Označíme ho λ. Znamená to minimalizovat výraz tvaru

(5.19) $$H(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \lambda.(F(\boldsymbol{x}) - y^0)$$ při daných $y^0, p_i, i = 1, 2, ..., n$.

Derivacemi podle jednotlivých $x_i, i = 1,2,...,n$ a jejich anulováním obdržíme postupně soustavu podmínek nutných pro rovnováhu:

(5.20) $$\frac{\partial H(x,\lambda)}{\partial x_i} = p_i - \lambda.F_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{pro } i = 1,2,...,n$$

(5.20A) $$\frac{\partial H(x,\lambda)}{\partial \lambda} = F(\boldsymbol{x}) - y^0 = 0\,.$$

Z (5.20A) dostaneme poptávkové funkce $x_1^*, x_2^*,....,x_n^*$ jako funkce parametrů $y^0, p_1, p_2,..., p_n$. Tyto funkce musí splňovat podmínky nutné pro rovnovážný stav:

(5.21) $$\frac{p_i}{F_i(\mathbf{x}^*)} = \lambda \qquad \text{pro } i = 1,2,...,n$$

(5.21A) $$\text{tj. } \frac{p_1}{F_1(\boldsymbol{x}^*)} = \frac{p_2}{F_2(\boldsymbol{x}^*)} = ... = \frac{p_n}{F_n(\boldsymbol{x}^*)} = \lambda$$

za vedlejší podmínky $F(x) = y^0$. Výrobní náklady $\sum p_i x_i$ jsou potom tedy rovněž funkcí parametrů y^0 a $\boldsymbol{p}$. Uvedené podmínky vyjadřují požadavek, aby podíl mezní produktivity každého výrobního faktoru a jeho jednotkové ceny byl konstantní pro všechny faktory. Převrácené hodnoty těchto (stejných) podílů jsou rovny multiplikátoru λ.

Poznámka 5.4 Podmínky (5.21) můžeme interpretovat prostřednictvím pojmu ***parciální mezní náklady***: Jde o podíl změny $p_i dx_i$ na celkových nákladech a příslušné změny $F_i dx_i$ v objemu produkce (znamená to malou změnu x_i, přičemž ostatní $x_j, j \neq i$ zůstávají beze změny). Platí totiž

$$\frac{\dfrac{\partial \sum p_i x_i}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}} = \frac{p_i}{F_i(\boldsymbol{x})}\,.$$

Poznámka 5.5 Všimněme si dále, že platí $\partial C / \partial Y = \lambda$.

Ověření:

Poptávkové funkce (vyjádřené pro rovnovážný bod) jsou zřejmě funkcí cenového vektoru $\boldsymbol{p}$ a stanovené úrovně produkce y. Můžeme tedy psát $x_1 = x_1(\boldsymbol{p}, y), x_2 = x_2(\boldsymbol{p}, y)$. Ze zápisu produkční funkce máme

$$F(x_1(\boldsymbol{p}, y), x_2(\boldsymbol{p}, y)) = y\,.$$

Provedeme-li na obou stranách parciální derivace podle y, dostaneme

$$F_1.\frac{\partial x_1(\boldsymbol{p}, y)}{\partial y} + F_2.\frac{\partial x_2(\boldsymbol{p}, y)}{\partial y} = 1\,.$$

Z nutných podmínek pro rovnovážný bod pak vyplývá

$$\frac{p_1}{\lambda}.\frac{\partial x_1(\boldsymbol{p}, y)}{\partial y} + \frac{p_2}{\lambda}.\frac{\partial x_2(\boldsymbol{p}, y)}{\partial y} = 1\,.$$

Vynásobením obou stran rovnice λ dostáváme

$$p_1.\frac{\partial x_1(\boldsymbol{p},y)}{\partial y}+p_2.\frac{\partial x_2(\boldsymbol{p},y)}{\partial y}=\lambda\,.$$

Protože dále platí

$$C(\boldsymbol{p},y)=p_1x_1(\boldsymbol{p},y)+p_2x_2(\boldsymbol{p},y)\,,$$

zřejmě máme

$$\frac{\partial C(\boldsymbol{p},y)}{\partial y}=p_1.\frac{\partial x_1(\boldsymbol{p},y)}{\partial y}+p_2.\frac{\partial x_2(\boldsymbol{p},y)}{\partial y}=\lambda\,.$$ □

Postačující podmínky (zajišťující minimalizaci výrobních nákladů) mají tvar, *mutatis mutandis*, jako v případě maximalizace užitkové funkce. Rozdíl je dán tím, že zde řešíme úlohu nalezení minima. Aby byla minimalizována hodnota výrobních nákladů, je nutné, aby druhý diferenciál níže definované kvadratické formy $d^2H(x^*,\lambda)$ vyčíslený v bodě x^* byl záporný pro všechna dx_i, ne všechna nulová:

(5.22A) $$d^2H(\mathbf{x}^*,\lambda)=-\lambda.\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}F_{jk}(\mathbf{x}^*)\,dx_j dx_k\right]>0,$$

a to pro všechna dx_j propojená vedlejší podmínkou

(5.22B) $$\sum_{i=1}^{n}F_i(\boldsymbol{x}^*)dx_j=0.$$

Tato vedlejší podmínka je odvozena diferencováním ze vztahu $F(x^*)=y^0$.

Podmínka (5.21A) je zřejmě ekvivalentní požadavku, aby platila (při kladném λ, což plyne z (3.20)) nerovnost

(5.23A) $$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}F_{jk}(\mathbf{x}^*)\,dx_j dx_k<0$$

pro všechna dx_j provázaná zmíněnou vedlejší podmínkou

(5.23B) $$\sum_{i=1}^{n}F_i(\mathbf{x}^*)dx_j=0.$$

Převedeme-li – obdobně jako v případě užitkové funkce – výše uvedené podmínky na vlastnost (symetrické) matice Φ, vzniklé z matice druhých parciálních derivací produkční funkce $F(\boldsymbol{x})$ ovroubením gradientním vektorem v prvním řádku a prvním sloupci (a s nulovým levým horním prvkem), lze požadavek na existenci extrému v bodě x^* vyslovit ekvivalentně jako požadavek na střídání znamének konečné posloupnosti hlavních minorů matice Φ[5], tj.

---

[5] Je zřejmé, že pro $k=1$ je vztah (5.23) splněn vždy: minor je roven $-F_1{}^2$.

$$
(5.24) \qquad (-1)^k . \begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k1} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1k} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} & \dots & F_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_k & F_{1k} & F_{2k} & \dots & F_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad k = 2,3,\dots,n .
$$

Pokud tedy má daná kombinace množství výrobních faktorů $\boldsymbol{x}^*$ vést k minimalizaci výrobních nákladů, musí s přidáním každého výrobního faktoru (bez ohledu na pořadí jejich výběru) dojít ke změně znaménka takto zvětšeného hlavního minoru matice Φ (s kladnou hodnotou pro dva výrobní faktory) vyčíslené v této uvažované faktorové kombinaci $\boldsymbol{x}^*$. Není-li tomu tak, bod $\boldsymbol{x}^*$ minimem být nemůže.

Na fázi nákladové minimalizace navazuje jako druhý krok maximalizace zisku. Tu provedeme tak, že při dané jednotkové ceně výrobku q stanovíme rozsah výroby tak, aby bylo maximalizováno rozpětí mezi tržbami a náklady. Zisk je tímto vyjádřen jako

$$
(5.25) \qquad q.y^0 - C(y^0, \mathbf{p}) ,
$$

tj. rozdíl mezi objemem tržeb a výrobními náklady. K tomu ovšem stačí položit (kladný) multiplikátor λ hodnotě q (jednotkové ceně výrobku). Tím je řečeno, že v rovnovážné situaci jednak platí (jako nutné) podmínky $p_i / F_i(\mathbf{x}^*) = q$ pro všechna $i = 1,2,\dots,n$ jednak (jako postačující) též Hicksovy podmínky stability (5.22), resp. (5.23).

Ilustrace

Výše uvedený postup ukážeme nyní na nejjednodušším případě, v němž výrobní technologie operuje tak, že je vyráběn pouze jeden výrobek y, k jehož zhotovení se používají dva výrobní faktory x_1, x_2.

Nejprve vyšetříme podobu podmínek nutných pro rovnovážný bod. Postupně odvodíme výrazy pro změnu poptávky po každém výrobním faktoru při změně jedné z cen (arbitrárně zvolme p_1). Vyjdeme přitom z podmínek (5.25):

$$
(5.26A,B,C) \quad F(x_1(\mathbf{p}), x_2(\mathbf{p})) = y^0 \qquad F_1(x_1(\boldsymbol{p}), x_1(\boldsymbol{p})).\lambda = p_1 \qquad F_2(x_2(\boldsymbol{p}), x_2(\boldsymbol{p})).\lambda = p_2 .
$$

Derivujme nyní všechny tři vztahy podle p_1 (ceny, která se mění). Dostaneme

$$
(5.27A) \qquad \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} . \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} . \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0 .
$$

$$
(5.27B) \qquad F_1 . \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} . + \lambda . (\frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} . \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} . \frac{\partial x_2}{\partial p_1}) = 1 .
$$

$$
(5.27C) \qquad F_2 . \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} . + \lambda . (\frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} . \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} . \frac{\partial x_2}{\partial p_1}) = 0 .
$$

Po jednoduché úpravě druhé a třetí rovnice (vydělením každé z nich λ) dostáváme soustavu tří rovnic pro tři neznámé (dvě poptávkové změny $\partial x_1 / \partial p_1$ a $\partial x_2 / \partial p_1$ a pomocnou neznámou $1/\lambda . \partial\lambda/\partial p_1$). Tuto soustavu je pak možno souhrnně vyjádřit vektorově-maticovým zápisem

(5.28) $$\begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}.\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Odtud použitím Cramérova pravidla již snadno získáme řešení: výraz pro poptávkové změny

(5.29) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{|\Phi_1|}{|\Phi|} , \quad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{|\Phi_2 *|}{|\Phi|}$$, kde

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_2 \\ F_1 & \frac{1}{\lambda} & F_{12} \\ F_2 & 0 & F_{22} \end{pmatrix} \qquad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & 0 \\ F_1 & F_{11} & \frac{1}{\lambda} \\ F_2 & F_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Přímým výpočtem obou determinantů dostaneme

(5.30) $$|\Phi_1| = \frac{-F_2^{\,2}}{\lambda} \qquad |\Phi_2| = \frac{F_1 F_2}{\lambda}$$

a tedy následně

(5.31) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{-F_2^{\,2}}{\lambda..|\Phi|} \qquad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{F_1.F_2}{\lambda..|\Phi|}$$

Vzhledem k tomu, že $\lambda > 0$ a $|\Phi| > 0$, dostáváme zřejmě, že $\partial x_1 / \partial p_1 < 0$, zatímco $\partial x_2 / \partial p_1 > 0$. Znamená to tedy, že růst ceny příslušné výrobnímu faktoru vede k poklesu poptávky po něm, zatímco v případě druhého přítomného faktoru vede růst jeho ceny k růstu poptávky. Oba výrobní faktory jsou tedy v substitučním vztahu.

5.5 **Přímá maximalizace zisku** pomocí ziskové funkce

Rozšiřme úlohu formulovanou v části **[5.4]** tak, že *souběžně* s minimalizací nákladové stránky výroby budeme usilovat o dosažení maximálního zisku z hodnoty vyrobené produkce. K tomuto účelu potřebujeme vedle výše výrobních nákladů (připomeňme, že ty jsou dány součinem množství výrobních faktorů a jejich jednotkových cen) stanovit hodnotu, za kterou se bude vytvořená produkce prodávat na trhu. Proto je třeba do úvah zařadit veličinu množství výrobků a k nim příslušných jednotkových cen, tedy (při m výrobcích) hodnotu skalárního součinu tvaru

(5.32) $$\boldsymbol{q.y} = \sum_{j=1}^{m} q_j y_j \, .$$

Maximalizaci zisku (při nejmenších možných výrobních nákladech) lze pak zapsat ve tvaru

(5.33) $$Max\,\Pi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = Max[\boldsymbol{q.y} - \boldsymbol{p.x}] = Max\left[\sum_{j=1}^{m} q_j y_j - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]$$

tentokrát však bez přímého uvažování vedlejší podmínky $F(x) \geq y^0$ představující požadavek, aby produkce dosažitelná pomocí vektoru množství výrobních faktorů **x** měla alespoň velikost y^0. Zisková funkce $\Pi(\mathbf{q},\mathbf{p})$ v (5.32) pak udává maximální dosažitelný zisk z produkce realizované při minimálních výrobních nákladech a při tržně stanovených cenách $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$.

V dalším výkladu se pro zjednodušení omezíme na situaci, kdy je produkován pouze jediný výrobek, $m = 1$, tzn. $\boldsymbol{qy} = qy$. Příslušné úvahy by nicméně zůstaly v platnosti i pro případ sdružené produkce, tj. tehdy, pokud bychom rozšířili pojem produkční funkce na vektorovou situaci. S ohledem na sledovaný cíl (nalézt optimální rozsah výroby, při němž je minimalizován zisk) však bude nyní nutno na argumenty ziskové funkce pohlížet odlišně: Ceny $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ budeme považovat za exogenně stanovené „parametry" úlohy, zatímco optimalizaci budeme provádět vzhledem k (proměnným, hledaný) množstvím výrobních faktorů. Abychom však nekomplikovali situaci dalším symbolem, přidržíme se původního značení ziskové funkce Π.

Nutné podmínky pro to, aby v konkrétním bodě $\mathbf{x}^*$ byla maximalizována zisková funkce[6], jsou

(5.34)
$$\frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} = \frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_3} = ... = \frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} = 0$$

vyčíslení parciálních derivací zde vede k soustavě podmínek nutných pro rovnovážný bod[7]:

(5.35A)
$$\frac{\partial\tilde{\Pi}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} = q.\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} - p_1 = 0\,.$$

(5.35B)
$$\frac{\partial\tilde{\Pi}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} = q.\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} - p_2 = 0\,.$$

(5.35C)
$$\frac{\partial\tilde{\Pi}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n} = q.\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n} - p_n = 0\,.$$

Optimální (rovnovážná) spotřebovávaná množství výrobních faktorů $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ získáme nyní jako funkce cen $x_i^* = x_i^*(\mathbf{q},\mathbf{p})$ úpravou předchozí soustavy rovnic, v níž píšeme

(5.36)
$$F_i(x) = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad : \quad \frac{p_j}{F_j(\boldsymbol{x}^*)} = q$$

$$\text{(tj. } \frac{p_1}{F_1(\boldsymbol{x}^*)} = \frac{p_2}{F_2(\boldsymbol{x}^*)} = ... = \frac{p_n}{F_n(\boldsymbol{x}^*)} = q\text{).}$$

Optimální rozsah výroby je potom dán vztahem $y = F(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, je tedy vyvozen pro danou technologii z optimálních množství výrobních faktorů $\mathbf{x}^*$. Z dosaženého lze vyvodit:

A) Vztah (5.36) ukazuje, že v rovnovážném stavu $\mathbf{x}^*$ je poměr spotřeby kterýchkoliv dvou

---

[6] Používáme značení $\tilde{\Pi}$ oproti Π, protože zisková funkce definovaná v (5.15) je funkcí cen $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$. Zde, ač pracujeme s formálně shodným výrazem $\boldsymbol{qy} - \boldsymbol{px}$, pohlížíme na tento výraz odlišně: při maximalizaci (5.33) pokládáme obojí ceny za pevně dané, maximum zisku se hledá ve vztahu k rovnovážnému bodu, který určují hledaná optimálně užitá množství výrobních faktorů $\boldsymbol{x}^*$ - produkci pak určíme z produkční funkce $y^* = F(\boldsymbol{x}^*)$.

[7] Zde na rozdíl od situace v části [5.3] však neprovádíme podmíněnou, nýbrž nepodmíněnou maximalizaci, není tedy důvod uplatňovat postup s použitím Lagrangeova multiplikátoru.

faktorů r, s takový, že mezní míra substituce mezi nimi $F_r(x^*)/F_s(x^*)$ je rovna poměru cen těchto faktorů p_r / p_s.

B) Optimální rozsah výroby, tj. množství výrobních faktorů $x_1^*, x_2^*,..., x_n^*$ a následně hodnota produkce $y^* = F(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$ je pak dána úrovněmi $p_i = q.F_i(\mathbf{x}^*)$ pro všechna $j = 1,2,..,n$. Znamená to, že rozsah výroby se zvětšuje potud, pokud hodnota mezní produktivity (při daném pevném q) každého faktoru není rovna relativní ceně (vůči q) tohoto faktoru. V té chvíli se dosáhne rovnovážného stavu, v němž se výrobní poměry ustálí. V tomto stavu platí $F_i(x^*) = p_i / q$ pro všechna $i = 1,2,..,n$.

Poznamenejme ještě, že cílové kritérium, minimalizace zisku zde není přímo spojeno s požadavkem, aby hodnota produkce dosáhla jistou (dostatečnou) úroveň y^0: Výrobce bude mít zájem zvyšovat produkci do té doby, než se dosáhne, při zpravidla klesajících mezních produktech, podmínek (5.36). Na této úrovni se pak rovnovážná (optimální) výroba ustálí.

Dodatek Zkusme nyní vyšetřit, jak se bude chovat změna poptávky při změně příjmu M (jde o plánované výdaje, které výrobce vyhradí pro nákup výrobních faktorů $x_1, x_2,..., x_n$).

Vyjděme ze vztahů (5.26) resp. (5.26):

(5.37A,B,C) $F(x_1(\mathbf{p}), x_2(\mathbf{p})) = y^0 \quad F_1(x_1(\boldsymbol{p}), x_1(\boldsymbol{p})).\lambda = p_1 \quad F_2(x_2(\boldsymbol{p}), x_2(\boldsymbol{p})).\lambda = p_2$.

Derivujme nyní všechny tři vztahy podle M (peněz vyhrazených na nákup). Dostaneme:

(5.38A) $$\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y} = 1 .$$

(5.38B) $$F_1.\frac{\partial \lambda}{\partial y}. + \lambda.(\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y}) = 0 .$$

(5.38C) $$F_2.\frac{\partial \lambda}{\partial y}. + \lambda.(\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y}) = 0 .$$

Po drobné úpravě – vydělení druhé a třetí rovnice multiplikátorem λ - máme

(5.38*A) $$\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y} = 1 .$$

(5.38*B) $$F_1.\frac{1}{\lambda}.\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y} = 0 .$$

(5.38*C) $$F_2.\frac{1}{\lambda}.\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y} = 0 .$$

Tyto tři vztahy přepíšeme do vektorově-maticové podoby

(5.39)
$$\begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}.\frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Cramérova pravidla nyní dostaneme řešení pro hledané dvě neznámé $\frac{\partial x_1}{\partial y}, \frac{\partial x_2}{\partial y}$:

(5.40)
$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & F_2 \\ F_1 & 0 & F_{12} \\ F_2 & 0 & F_{22} \end{vmatrix}}{|\Phi|} = \frac{F_{12}.F_2 - F_1.F_{22}}{|\Phi|},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_1 & 1 \\ F_1 & F_{11} & 0 \\ F_2 & F_{12} & 0 \end{vmatrix}}{|\Phi|} = \frac{F_1.F_{12} - F_2.F_{11}}{|\Phi|}.$$

Odtud nelze nic moc vyvodit: determinant ve jmenovateli je sice zaručeně kladný, na druhé straně výrazy F_{11}, F_{22} jsou záporné, ale znaménko F_{12} může být jak kladné (pro substituční faktory), tak záporné (pro komplementární faktory). Nicméně, jde-li o komplementy, pak jsou čitatele obou výrazů záporné a při kladném (shodném) jmenovateli, naznačovalo by to *překvapivě ?* pokles poptávky po obou faktorech. při změně příjmu. V případě komplementů nelze vyvodit nic, protože znaménko v čitatelích nelze jednoznačně určit (první člen je vždy záporný, druhý vždy kladný).