6 Další nelineární funkční tvary používané v teorii produkce

6.1 Funkce s proměnnou pružností substituce

6.1.1 VES- produkční funkce [Revankar 1971[1]] je definována jako

(6.1) $$F(K,L) = A.K(1-\delta.\rho)\left[L+(\rho-1).K\right]^{\alpha\delta\rho}$$ s těmito omezeními na parametry

$$A > 0, \alpha > 0, 0 < \delta < 1, 0 < \rho.\delta < 1$$

Mezní produkt práce

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \alpha\delta\rho.\frac{Y}{L+(\rho-1)K} > 0$$ vzhledem k přijatým omezením na parametry

Mezní produkt kapitálu (při stejných omezeních na parametry) má tvar

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha.(1-\delta\rho).\frac{Y}{K} + \alpha\delta\rho.(\rho-1)\frac{Y}{L+(\rho-1)K} > 0$$

Mezní míra substituce má tvar

$$r_{KL} = \left(\frac{\rho-1}{1-\delta.\rho} + \frac{1-\delta\rho}{\delta\rho}\right).\frac{L}{K} = \frac{\delta.\rho^2 - \delta.\rho + (1-\delta\rho)^2}{\delta\rho(1-\delta\rho)}$$

$$r_{KL} == \frac{\delta\rho^2 + 1 - 3\delta\rho + \delta^2\rho^2}{\delta\rho(1-\delta\rho)} = \frac{\delta\rho(\delta\rho + \rho - 3) - 1}{\delta\rho(1-\delta\rho)}$$

Často se však pracuje – viz Fuss, Mc.Fadden str. 242 – s jednodušším tvarem

(6.2) $$F(K,L) = \gamma.K^{\alpha_1}.(L+\beta K)^{\alpha_2}$$,

který však není přesným speciálním případem předchozího pro $\beta = \rho - 1$, $\delta = 0$, $\gamma = A$

Speciálním případem (6.2) je Cobb-Douglasova funkce, což je hned vidět, položíme-li $\beta = 0$.

Jak lze snadno určit, mezní produkty mají tvar

$$m_K = F(K,L).\left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2\beta}{L+\beta K}\right] \qquad m_L = F(K,L).\left[\frac{\alpha_2}{L+\beta K}\right]$$

a tudíž mezní míra substituce je rovna

$$r_{KL} = \frac{m_L}{m_K} = \frac{\left[\dfrac{\alpha_2}{L+\beta K}\right]}{\left[\dfrac{\alpha_1}{K} + \dfrac{\alpha_2\beta}{L+\beta K}\right]} = \frac{\left[\dfrac{K\alpha_2}{K(L+\beta K)}\right]}{\dfrac{\alpha_1(L+\beta K)+\alpha_2\beta K}{K(L+\beta K)}} = \frac{\alpha_2.K}{\alpha_1 L + (\alpha_1+\alpha_2)\beta K}$$

Homogenitu (6.1) i (6.2) vyšetříme snadno:

$$F(\lambda K,\lambda L) = A.(\lambda K).(1-\delta.\rho)\left[(\lambda.L)+(\rho-1).(\lambda K)\right]^{\alpha\delta\rho} = \lambda^{1+\alpha\delta\rho}.F(K,L)$$

$$F(\lambda K,\lambda L) = \gamma.(\lambda K)^{\alpha_1}.(\lambda L + \beta(\lambda K))^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2}.F(K,L)$$

Funkce tedy K výpočtu pružnosti substituce nelze tedy užít vzorec $s_{KL} = \dfrac{F_K.F_L}{F(K,L).F_{KL}}$.

---

[1] Revankar, S.Nagesh: A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions. *Econometrica* Vol.39/1971,p.61-71.

Nezbývá, než uplatnit úplný vzorec. Nejprve určíme druhé parciální derivace:

$$F_{KK} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}\left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2\beta}{L+\beta K}\right] + F(K,L).\left[-\frac{\alpha_1}{K^2} - \frac{\alpha_2\beta^2}{(L+\beta K)^2}\right] =$$

$$F.\left\{\left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2\beta}{L+\beta K}\right]^2 - \left[\frac{\alpha_1}{K^2} + \frac{\alpha_2\beta^2}{(L+\beta K)^2}\right]\right\} = F.\left\{\frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{K^2} + \frac{2\alpha_1\alpha_2.\beta}{K(L+\beta K)} + \frac{\alpha_2(\alpha_2-1).\beta^2}{(L+\beta K)^2}\right\}$$

$$F_{LL} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}\left[\frac{\alpha_2}{L+\beta K}\right] + F(K,L).\left[\frac{-\alpha_2}{(L+\beta K)^2}\right] = F(K,L).\left\{\left[\frac{\alpha_2}{L+\beta K}\right]^2 - \frac{\alpha_2}{(L+\beta K)^2}\right\} = F.\frac{\alpha_2{}^2-\alpha_2}{(L+\beta K)^2}$$

$$F_{KL} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}.\left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2\beta}{L+\beta K}\right] + F(K,L).\left[-\frac{\alpha_2\beta}{(L+\beta K)^2}\right] =$$

$$F.\left\{\left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2\beta}{L+\beta K}\right].\left[\frac{\alpha_2}{L+\beta K}\right] - \left[\frac{\alpha_2\beta}{(L+\beta K)^2}\right]\right\} = F.\left\{\frac{\alpha_1\alpha_2}{K(L+\beta K)} + \frac{\alpha_2.(\alpha_2-1)\beta}{(L+\beta K)^2}\right\}$$

Po dosazení máme $$s_{KL} = \frac{F.\left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2.\beta}{L+\beta K}\right].F\left[\frac{\alpha_2.}{L+\beta K}\right]}{F(K,L).F_{KL}}$$

$$m_K = F(K,L).\left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2\beta}{L+\beta K}\right] \qquad m_L = F(K,L).\left[\frac{\alpha_2}{L+\beta K}\right]$$

$$F_{KL} = F(K,L).\left[\frac{-\alpha_2\beta}{(L+\beta K)^2}\right] + F(K,L).\left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2.\beta}{L+\beta K}\right].\left[\frac{\alpha_2}{L+\beta K}\right]$$

$$s_{KL} = \frac{F.\left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2.\beta}{L+\beta K}\right].F\left[\frac{\alpha_2.}{L+\beta K}\right]}{F.F.\left[\frac{-\alpha_2\beta}{(L+\beta K)^2}\right] + \left[\frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2.\beta}{L+\beta K}\right].\left[\frac{\alpha_2}{L+\beta K}\right]}$$

Po dosazeních do obecného vzorce (2.7) dostaneme pro specifikaci (6.2) :

$$s_{KL} = \frac{\alpha_1 L + \beta.K(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_1 L} = 1 + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}.\frac{\beta.K}{L} \qquad \text{(ověřeno DM ! !)}$$

Pružnost substituce je dle literatury u specifikace produkční funkce (6.1) vyjádřena vztahem:

$$s_{KL} = 1 + \frac{\rho-1}{1-\delta.\rho} \qquad \text{(chybí tam ale K a L !!)}$$

Pokud jde o samotný název této produkční funkce, není nijak výstižný. Funkce není ani tak charakteristická proměnlivou pružností substituce (takových funkcí je nepřeberná řady), jako tím, že pružnost substituce je u tohoto nelineárního tvaru konstantní podél polopřímky vycházející z počátku, tj. všude tam, kde platí K/L = konstantní, nikoliv – jako u ACMS funkce - podél izokvanty.Lepší název by byl *produkční funkce s konstantní paprskovitou pružností substituce constant ray elasticity of substitution (CRES)*.

Wage rate $w = \delta.\rho.\dfrac{Y}{L_1} = \delta.\rho.\dfrac{Y}{L + (\rho - 1).K}$

6.1.2 CMS- produkční funkce [Bruno 1962,1968[2]]

Zkratka objevující se v názvu této produkční funkce (*Constant Marginal Share*) naznačuje, že tento nelineární tvar se vyznačuje konstantními účastmi na produkci shodně pro oba faktory. Její tvar je

(6.10) $$F(K,L) = A.K^{\alpha}.L^{1-\alpha} - \gamma.L \qquad A,>0, \alpha \in (0,1),\ \gamma \text{ je nějaká konstanta.}$$

Hodnoty mezních produktivit dostaneme jako

$$m_K = F_K(K,L) = A.\alpha.K^{\alpha-1}.L^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{K}.G(K,L),$$

$$m_L = F_L(K,L) = A.(1-\alpha).K^{\alpha}.L^{-\alpha} - \gamma = \frac{(1-\alpha)}{L}.G(K,L) - \gamma$$

přičemž jsme „Cobb-Douglasovu část“ z (6.2) označili jako $G(K,L) = A.K^{\alpha}.L^{\beta}$.

Všimněme si zde, že podmínkou kladného mezního užitku práce je, aby konstanta γ byla kladná.

Mezní míra substituce je dána jako

(6.11) $$r_{KL} = \frac{m_L}{m_K} = \frac{\left(\frac{1-\alpha}{L}.G(K,L) - \gamma\right)}{\frac{\alpha}{K}.G(K,L)} = \frac{K}{L}.\frac{(1-\alpha).G(K,L) - \gamma.L}{\alpha.G(K,L)} = \frac{K}{L}\frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{\gamma.K}{\alpha..G(K.L)}$$

Poněvadž je funkce tvaru (6.2) lineárně homogenní, lze k odvození výrazu pro s_{KL} užít vzorec (2.8):

Poté, co jsme určili $F_K = \dfrac{\alpha}{K}.G(K,L)$, $\quad F_L = \dfrac{(1-\alpha)}{L}.G(K,L) - \gamma$, máme $F_{KL} = \dfrac{\alpha.(1-\alpha).G(K,L)}{K.L}$

$$s_{KL} = \frac{F_K.F_L}{F_{KL}.F(K,L)} = \frac{\frac{\alpha}{K}G(K,L).(\frac{(1-\alpha)}{L}G(K,L) - \gamma)}{\frac{\alpha(1-\alpha).G(K,L)}{K.L}(G(K,L) - \gamma L)} = \frac{(1-\alpha).(G(K,L) - \gamma.L}{(1-\alpha)\big(G(K,L) - \gamma L\big)} = ,$$

$$= 1 + \frac{(1-\alpha).\gamma.L}{(1-\alpha).G(K,L) - (1-\alpha.).\gamma.L} = 1 + \frac{\alpha.\gamma.L}{(1-\alpha).(\gamma.L - G(K,L))} = 1 - \frac{\alpha\gamma.L}{(1-\alpha)F(K,L))}$$

(6.12) $$s_{KL} = \frac{m_L}{m_K} = 1 - \frac{\gamma.L}{\beta.F(K,L)} = 1 - \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}.\frac{L}{F(K,L)}$$ [3],

Pokud v (6.2) uvolníme předpoklad o jedničkovém součtu parametrů α, β, dostaneme obecnější zápis

(6.13) $$F(K,L) = A.K^{\alpha}.L^{\beta} - \gamma.L \qquad A,>0, \alpha, \beta > 0,\ \gamma \text{ je nějaká konstanta.}$$

Podmínku homogenity tohoto obecnějšího tvaru vyšetříme snadno: Zřejmě platí

(6.14) $$F(\lambda K, \lambda L) = A.(\lambda K)^{\alpha}.(\lambda L)^{\beta} - \gamma(\lambda L) = \lambda.F(K,L) \text{ jen tehdy, jestliže } \alpha + \beta = 1.$$

Protože takto modifikovaná CMS-funkce není obecně lineárně homogenní, musíme nyní k výpočtu pruž-

---

[2] Bruno,M.: A Note on the Implications of an Empirical Relationship Between Output per unit of Labor. *International Economic Review*, Vol.9/1968 s. 49-62.

[3] Ve shodě s výrazem (1.12) textu Revankar, N: A Class of VES Production Functions. s.64 .

nosti substituce uplatnit souhrnný vzorec (2.17). Nejprve dopočteme druhé parciální derivace

$$F_{KK} = \frac{\alpha.(\alpha-1).G(K,L)}{K^2} \qquad F_{LL} = \frac{\beta.(\beta-1).G(K,L)}{L^2} \qquad F_{KL} = \frac{\alpha.\beta.G(K,L)}{K.L}$$

a následně vyčíslíme

$$F_{LL}F_K{}^2 = \frac{\beta.(\beta-1).G(K,L)}{L^2}.\left(\frac{\alpha.G(K,L)}{K}\right)^2 = \frac{G(K,L)^3}{L^2K^2}.\alpha^2\beta(\beta-1)$$

$$F_{KK}F_L{}^2 = \frac{\alpha.(\alpha-1).G(K,L)}{K^2}.\left(\frac{\beta.G(K,L)-\gamma.L}{L}\right)^2 = \frac{G(K,L).(\beta.G(K,L)-\gamma.L)^2}{L^2K^2}.\alpha(\alpha-1)$$

$$F_{LK}F_L.F_K = \frac{\alpha.\beta.G(K,L)}{K.L}.\left(\frac{\beta.G(K,L)-\gamma.L}{L}\right).\left(\frac{\alpha.G(K,L)}{K}\right) = \frac{G(K,L)^2.(\beta.G(K,L)-\gamma.L)}{L^2K^2}.\alpha^2.\beta$$

Odtud sloučením dostaneme

$$F_{LL}F_K{}^2 + F_{KK}.F_L{}^2 - 2.F_{LK}.F_L.F_K = G(K,L).K^{-2}.L^{-2}.\begin{bmatrix} \alpha^2.\beta.(\beta-1)G(K,L)^2 + \alpha.(\alpha-1).(\beta.G(K,L)-\gamma.L)^2 \\ -2.\alpha^2\beta G(K,L).(\beta.G(K,L)-\gamma.L) \end{bmatrix}$$

Na druhé straně máme

(6.15.AB) $$\frac{K.F_K + L.F_L}{K.L} = \frac{\alpha.G(K,L)+\beta.G(K,L)-\gamma.L}{KL}$$, resp.

$$F_K.F_L = \left[\frac{\alpha.G(K,L)}{K}\right].\left[\frac{\beta.G(K,L)-\gamma.L}{L}\right]$$

Výraz pro první část vzorce pro pružnost substituce (2.17) tedy bude

(6.16)
$$\frac{K.F_K + L.F_L}{K.L}.F_K.F_L = \frac{\alpha.G(K,L)+\beta.G(K,L)-\gamma.L}{KL}.\left[\frac{\alpha.G(K,L)}{K}\right].\left[\frac{\beta.G(K,L)-\gamma.L}{L}\right] =$$
$$= K^{-2}L^{-2}.[(\alpha+\beta).G(K,L)-\gamma.L].[\alpha.G(K,L)].[\beta.G(K,L)-\gamma.L]$$,

Dosazením do výraz pro s_{KL}

$$s_{KL} = -\frac{K^{-2}L^{-2}\alpha..G(K,L).[(\alpha+\beta)G(K,L)-\gamma.L][\beta.G(K,L)-\gamma.L]}{K^{-2}.L^{-2}.G(K,L)\alpha\begin{bmatrix} \alpha\beta.(\beta-1).G(K,L)^2 + (\alpha-1).(\beta.G(K,L)-\gamma.L)^2 \\ -2.\alpha.\beta G(K,L).(\beta.G(K,L)-\gamma.L) \end{bmatrix}}$$, resp.

(6.17) $$s_{KL} = -\frac{[(\alpha+\beta).G(K,L)-\gamma.L][\beta.G(K,L)-\gamma.L]}{[\alpha.\beta.(\beta-1)G(K,L)^2 + (\alpha-1).(\beta.G(K,L)-\gamma.L)^2 - 2.\alpha.\beta G(K,L).(\beta.G(K,L)-\gamma.L)]}$$

Jmenovatel (6.17) dále upravíme na tvar

$$\alpha.\beta^2G(K,L)^2 + \alpha.\beta G(K,L)^2 + (\alpha-1).(\beta.G(K,L)-\gamma.L)^2 - 2.\alpha.\beta^2G(K,L)^2 - \gamma.L2.\alpha.\beta G(K,L)$$,

který po vyrušení shodných a přeskupení zbylých členů dává

$$\alpha.\beta.G(K,L)^2 + \beta^2.G(K,L)^2 - 2\beta\gamma.LG(K,L) - \alpha\gamma^2L^2 + \gamma^2.L^2 = (\beta G(K,L)-\gamma.L)^2 + \alpha(\beta G^2(K,L)-\gamma.L^2)$$

Podobně úpravou čitatele (6.17) dostaneme:

$$[(\alpha+\beta).G(K,L)-\gamma.L].[\beta.G(K,L)-\gamma.L]=\alpha..G(K,L)[\beta.G(K,L)-\gamma.L]+.[\beta.G(K,L)-\gamma.L]^2$$

Obdržíme $$s_{KL}=\frac{\alpha.G(K,L)[\beta.G(K,L)-\gamma.L]+.[\beta.G(K,L)-\gamma.L]^2}{(\beta G(K,L)-\gamma.L)^2+\alpha\left(\beta G^2(K,L)-\gamma^2L^2\right)}$$

$$s_{KL}=\frac{\alpha.G(K,L)[\beta.G(K,L)-\gamma.L]+\alpha\left(\beta G^2(K,L)-\gamma.L^2\right)-\alpha\left(\beta G^2(K,L)-\gamma.L^2\right)+.[\beta.G(K,L)-\gamma.L]^2}{(\beta G(K,L)-\gamma.L)^2+\alpha\left(\beta G^2(K,L)-\gamma^2L^2\right)}$$

$$s_{KL}=1-\frac{-\alpha\left(\beta G^2(K,L)-\gamma.L^2\right)+\alpha..G(K,L)[\beta.G(K,L)-\gamma.L]}{(\beta G(K,L)-\gamma.L)^2+\alpha\left(\beta G^2(K,L)-\gamma^2.L^2\right)}$$

$$s_{KL}=1-\frac{-\alpha\beta G^2(K,L)-\alpha\gamma L^2-\alpha\beta.G^2(K,L)+\alpha\gamma^2.\gamma LG(K,L).}{(\beta G(K,L)-\gamma.L)^2+\alpha\left(\beta G^2(K,L)-\gamma^2L^2\right)}$$

(6.18)

$$s_{KL}=1-\frac{\alpha(-\gamma L^2)+\gamma LG(K,L).}{(\beta G(K,L)-\gamma.L)^2+\alpha\left(\beta G^2(K,L)-\gamma^2L^2\right)}=1+\frac{\alpha\gamma L(G(K,L)-L)}{(\beta G(K,L)-\gamma.L)^2+\alpha\left(\beta G^2(K,L)-\gamma^2L^2\right)}$$

Závěrečnými úpravami dospějeme k tvaru

$$s_{KL}=\frac{[\beta.G(K,L)-\gamma L]^2+\alpha.G(K,L).[\beta.G(K,L)-\gamma L]}{[\beta.G(K,L)-\gamma L]^2+\alpha.\left[\beta.G(K,L)^2-\gamma^2L^2\right]}=1+\frac{\alpha\left|\gamma^2L^2-\gamma.L.G(K,L)\right|}{[\beta.G(K,L)-\gamma L]^2+\alpha.\left[\beta.G(K,L)^2-\gamma^2L^2\right]}$$

(6.19A) $$s_{KL}=1+\frac{\alpha\gamma L[\gamma L-G(K,L)]}{[\beta.G(K,L)-\gamma L]^2+\alpha.\left[\beta.G(K,L)^2-\gamma^2L^2\right]}=1+\alpha.\gamma.L.W(K,L)$$ **, kde**

(6.19B) $$W(K,L)=\frac{\gamma.L-G(K,L)}{[\beta.G(K,L)-\gamma.L]^2+\alpha.\left[\beta.G(K,L)^2-\gamma^2.L^2\right]}$$

Shodu s předchozím výrazem ověříme např. následovně: Jmenovatel ve $W(K,L)$ zapíšeme jako:

$$[\beta.G(K,L)-\gamma.L]^2+\alpha.\left[\beta.G(K,L)^2-\gamma^2.L^2\right]=\beta^2G(K,L)-2.\beta.\gamma.L.G(K,L)+\gamma^2.L^2+\alpha.\beta.G(K,L)^2-\alpha.\gamma^2.L^2$$

Nyní členy přeskupíme a sdružíme takto:

$$\left[\beta.(\alpha+\beta)G^2(K,L)-2\beta\gamma.L.G(K,L)+(1-\alpha)\gamma^2L^2\right]=\beta.(\alpha+\beta).\left[G(K,L)^2-\frac{2}{\alpha+\beta}.\gamma L.G(K,L)+\frac{1-\alpha}{\beta.(\alpha+\beta)}\gamma^2.L^2\right]$$

Je zřejmé, že, aby byl koeficient u druhého členu roven -2, musí platit $(\alpha+\beta)^{-1}=1$, což bude splně-
no

tehdy a jen tehdy, jestliže $\alpha+\beta=1$. Právě ze téže podmínky bude koeficient u třetího členu $\frac{1-\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}$ rovněž roven 1 a bude tedy možné výraz obsažený v závorce jmenovatele psát jako druhou mocninu $G(K,L)-\gamma.L)$ a následně krátit. Pak bude právě platit

$$W(K,L)=\frac{\gamma.L-G(K,L)}{[\beta.G(K,L)-\gamma.L]^2+(1-\beta).[\beta.G(K,L)^2-\gamma^2.L^2]}=\frac{\gamma.L-G(K,L)}{-2\beta\gamma.L.G(K,L)+\beta G(K,L)^2+\beta.\gamma^2.L^2}$$
$$=\frac{\gamma.L-G(K,L)}{\beta.(\gamma.L-G(K,L))^2}=[\beta.(G(K,L)-\gamma.L)]^{-1}=\frac{1}{\beta.F(K,L)}.$$

6.1.3 Liu-Hildebrandtova produkční funkce [Liu-Hildebrandt 1965[4]]

(6.3) $$F(K,L)=A.\left[(1-\delta)K^{-\rho}+\delta.K^{-m.\rho}L^{-(1-m)\rho}\right]^{-1/\rho}$$ [5]

při následujících hodnotách parametrů: $\delta\in(0,1), A>0, \rho\in(-1,+\infty)$

Dále máme $F(\lambda K,\lambda L)=A.\left[(1-\delta)(\lambda K)^{-\rho}+\delta.(\lambda K)^{-m.\rho}(\lambda L)^{-(1-m)\rho}\right]^{-1/\rho}=$

$$=A.\left[\lambda^{-\rho}(1-\delta)(K)^{-\rho}+\lambda^{-m\rho}\lambda^{-(1-m)\rho}\delta.(K)^{-m.\rho}(L)^{-(1-m)\rho}\right]^{-1/\rho}=$$

$$=A.(\lambda^{-\rho})^{-1/\rho}\left[(1-\delta)(K)^{-\rho}+\delta.\lambda^{-m\rho}\lambda^{-(1-m)\rho}(K)^{-m.\rho}(L)^{-(1-m)\rho}\right]^{-1/\rho}$$

$=\lambda.F(K,L)$ Odtud vyplývá homogenita 1. stupně této funkce.

K výpočtu pružnosti substituce proto můžeme uplatnit zkrácený vzorec.
Derivujeme a dostáváme:

$$H_K=\left(-\frac{1}{\rho}\right)A.\left[(1-\delta).K^{-\rho}+\delta.K^{-m.\rho}L^{-(1-m)\rho}\right]^{-1/\rho-1}\left[-\rho.(1-\delta)K^{-\rho-1}-\delta.m.\rho K^{-m.\rho-1}\right]=$$

$$=H(K,L).\left[1+\frac{\delta.(m-1)L^{(m-1).\rho}K^{-m\rho}}{(1-\delta)K^{-\rho}+\delta.L^{(m-1)\rho}K^{-m\rho}}\right]=\frac{H(K,L)}{K}.\frac{\delta.(m-1).\left(\frac{L}{K}\right)^{m\rho}}{(1-\delta).\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho}+\delta.\left(\frac{L}{K}\right)^{m\rho}}=$$

$$=\frac{H(K,L)}{K}.\left[\frac{(m-1)}{\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-m).\rho}+1}\right]=\frac{H(K,L)}{K}.\frac{m-1}{B(K,L)+1}$$

---

[4] Liu,T.C., Hildebrand,G.,H.: Manufacturing Production Functions in the United States, 1957, Ithaca, Cornell Univerity Press, 1965.

[5] Liu-Hildebrandtova funkce je vždy lineárně homogenní, CMS funkce má tuto vlastnost jen když platí $\alpha+\beta=1$, zatímco VES
je homogenní stupně $1+\alpha\delta\rho$. Transcendentní funkce není homogenní žádného stupně.

$$H_L = \left(-\frac{1}{\rho}\right) A.\left[(1-\delta)K^{-\rho} + \delta.K^{-m.\rho}L^{-(1-m)\rho}\right]^{-1/\rho-1}\left[(-\rho+m\rho).\delta.K^{-m.\rho}.L\right]^{-(1-m).\rho-1} =$$

$$= H(K,L).\frac{\delta.(m-1)K^{-m\rho}L^{(m-1)\rho-1}}{(1-\delta)K^{-\rho}+\delta.K^{-m\rho}L^{(m-1)\rho}} = \frac{H(K,L)}{L}.\left[1+\frac{\delta.(m-1).\left(\frac{L}{K}\right)^{m\rho}}{(1-\delta)\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho}+\delta.\left(\frac{L}{K}\right)^{m\rho}}\right] =$$

$$= \frac{H(K,L)}{L}\left[1+\frac{m-1}{\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-m).\rho}+1}\right] = \frac{H(K,L)}{L}.\left[1+\frac{m-1}{B(K,L)+1}\right]$$

Dále musíme spočíst křížovou parciální derivaci H_{KL} :

$$H_{KL} = \frac{1}{K}.\left\{\frac{\partial H(K,L)}{\partial L}.\left[\frac{(m-1)}{\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-m).\rho}+1}\right] + H(K,L).(m-1).\frac{\partial\left(\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-m).\rho}+1\right)^{-1}}{\partial L}\right\} =$$

$$= \frac{H(K,L)}{KL}\left\{\left[1+\frac{m-1}{\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-m).\rho}+1}\right].\left[\frac{(m-1)}{\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-m).\rho}+1}\right]\right\} + (1-m)^2.\rho\left(\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-m).\rho}+1\right)^{-2}.\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-m)}$$

$$H_{KL} = \frac{H(K,L)}{K.L}.\frac{\big((B+1)(m-1)\big)+(m-1)^2+\rho(1-m^2)B}{(B+1)^2}$$, po úpravě pak

$$H_{KL} = \frac{H(K,L)}{K.L}.\left(\frac{Bm+m-B-1+m^2-2m+1+\rho.B-\rho.m^2.B}{(B+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{H(K,L)}{K.L}.\left(\frac{B(m-1)+m(m-1)+(1-m)(1+m)\rho.B}{(B+1)^2}\right) = \frac{H(K,L)}{K.L}.\left(\frac{(m-1).(B+m-(1+m)\rho.B)}{(B+1)^2}\right)$$

V následujícím textu použijeme pro zkrácení zápisu vyjádření $B(K,L) = \frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho.(1-m)}$

Nyní již dosadíme jednotlivé výrazy do vzorce $s_{KL} = \frac{H_K.H_L}{H_{KL}.H(K,L)}$. Dostaneme

$$s_{KL} = \frac{\left[\frac{H(K,L)}{K}.\frac{m-1}{B(K,L)}\right]\left[\frac{H(K,L)}{L}.\left(1+\frac{m-1}{B(K,L)+1}\right)\right].}{\frac{H(K,L)}{K.L}.\left[\frac{((B(K,L)+1).(m-1)+(m-1)^2+\rho.(1-m)^2.B(K,L)}{(B(K,L)+1)^2}\right].H(K,L)}$$

$$s_{KL}=\frac{K.LH(K,L)^2}{K.LH(K,L)^2}\frac{\left[.\frac{m-1}{B(K,L)}\right].\left(1+\frac{m-1}{B(K,L)+1}\right)}{\left[\frac{(m-1).\left[B(K,L)+1+(m-1)+\rho.(1+m).B(K,L)\right]}{\left(B(K,L)+1\right)^2}\right].}$$

$$s_{KL}=\frac{\left[.\frac{m-1}{B(K,L)}\right].\left(\frac{B(K,L)+m}{B(K,L)+1}\right)(B(K,L)+1)^2}{(m-1).\left[B(K,L)+m+\rho.(1+m).B(K,L)\right]}$$

$$s_{KL}=\frac{\left(B(K,L)+m\right).\,(B(K,L)+1)}{\left[B(K,L)+m+\rho.(1+m).B(K,L)\right].B(K,L)}$$

$$s_{KL}=\frac{\left(B(K,L)+m\right).}{\left[B(K,L)+m+\rho.B(K,L)+\rho.m.B(K,L)\right].B(K,L)}=\frac{1}{1+\rho\frac{B.(1+m)}{B+m}}=\frac{1}{1+\rho\frac{B+Bm}{B+m}}=$$

$$s_{KL}=\frac{1}{1+\rho\frac{B(K,L)+m+(B(K,L)-1)m}{B(K,L)+m}}=\frac{1}{1+\rho+\rho\frac{(B(K,L)-1)m}{B(K,L)+m}}=\frac{1}{1+\rho+\rho.C(K,L,m)}\ ,$$

kde $C(K,L,m)=\dfrac{\left(\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-\rho m}-1\right).m}{\frac{1-\delta}{\delta}.\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-\rho m}+m}$

Pružnost substituce u Liu Hildebrandtovy funkce je tedy

$$s_{KL}=\frac{1}{1+\rho+\frac{m\rho}{S_k}}$$ S_K je capital's share

Je známo, že tato funkce má důležité ekonomické dopady, ale obsahuje obtížné nelinearity pro zdravé ekonometrické metody odhadu.

$$\ln(\frac{V}{L})=h_0+h.\ln w+h_2\ln(\frac{K}{L})$$

Jednou z uváděných vlastní Liu-Hildebrandtovy funkce je možnost vyjádření ve tvaru

$$\ln(\frac{F(K,L)}{L})=h_0+h_1.\ln w+h_2\ln(\frac{K}{L})$$

kde w je wage rate a h_0,h_1,h_2 jsou koeficienty tvořené transformacemi původních parametrů funkce.

(6.37) $$F(K,L) = A.\left[(1-\delta)K^{\sigma} + \delta.K^{m\sigma}L^{(1-m)\sigma}\right]^{1/\sigma}$$ [6]

(6.37) $$Y/L = A.L\left[(1-\delta).K^{\sigma} + \delta.K^{m\sigma}L^{(1-m)\sigma}\right]^{1/\sigma}$$

(6.37) $$\frac{Y}{L} = A.\left[(1-\delta).\left(\frac{K}{L}\right)^{\sigma} + \delta.\left(\frac{K}{L}\right)^{m.\sigma}\right]^{1/\sigma}$$

(6.37) $$\ln(\frac{Y}{L}) = \ln A + \frac{1}{\sigma}.\ln\left[(1-\delta).\left(\frac{K}{L}\right)^{\sigma} + \delta.\left(\frac{K}{L}\right)^{m.\sigma}\right]$$

(6.37) $$\ln(\frac{Y}{L}) = \ln A + \frac{1}{\sigma}.\ln\left[\left(\frac{K}{L}\right)^{\sigma}.\left\{(1-\delta) + \delta.\left(\frac{K}{L}\right)^{m.\sigma-\sigma}\right\}\right]$$

$$\ln(\frac{Y}{L}) = \ln A + \frac{\sigma}{\sigma}.\ln\left(\frac{K}{L}\right) + \frac{1}{\sigma}.\ln\left[(1-\delta) + \delta.\left(\frac{K}{L}\right)^{m.\sigma-\sigma}\right]$$

$$\ln(\frac{Y}{L}) = \ln A + \ln\left(\frac{K}{L}\right) + \frac{1}{\sigma}.\ln\left[(1-\delta) + \delta.\left(\frac{K}{L}\right)^{(m-1)\sigma}\right]$$

6.1.4 Transcendentní produkční funkce [Halter, Carter, Hocking 1957[7]]

(6.40) $$F(K,L) = A.K^{\beta}L^{1-\beta}.\exp\{\alpha_1 K + \alpha_2 L\} \quad A,\alpha_1,\alpha_2 > 0, \beta \in (0,1)$$

s mezními produktivitami

$$m_K = A.\beta K^{\beta-1}L^{1-\beta}.\exp\{\alpha_1 K + \alpha_2 L\} + AK^{\beta}L^{1-\beta}\exp\{\alpha_1 K + \alpha_2 L\}\alpha_1$$
$$= F(K,L).\left[\frac{\beta}{K} + \alpha_1\right]$$

$$m_L = A.(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta}.\exp\{\alpha_1 K + \alpha_2 L\} + AK^{\beta}L^{1-\beta}\exp\{\alpha_1 K + \alpha_2 L\}\alpha_2$$
$$= F(K,L).\left[\frac{1-\beta}{L} + \alpha_2\right],$$

mezní mírou substituce

$$r_{KL} = \frac{m_L}{m_K} = \frac{\frac{1-\beta+\alpha_2 L}{L}}{\frac{\beta+\alpha_1 K}{K}} = \frac{(1-\beta+\alpha_2 L).(\beta+\alpha_1 K)}{K.L}$$

Liu-Hildebrandtova funkce je vždy lineárně homogenní, CMS funkce má tuto vlastnost jen když platí $\alpha + \beta = 1$, zatímco VES je homogenní stupně $1+\alpha\delta\rho$. Transcendentní funkce není homogenní žádného stupně.

[7] Halter,A.,N., Carter,H.O.,Hocking, J.,G.: A Note on Transcendental Production Function. Journal of Farm Economics. Vol.39/1957

má pružnost substituce ve tvaru[8]

(6.41) $$s_{KL} = \frac{(1-\beta+\alpha_2 L).(\beta+\alpha_1 K)}{(1-\beta).(\beta+\alpha_1 K)^2 + \beta.(1-\beta+\alpha_2 L)^2}$$

ověření: Funkce není lineárně homogenní, takže musíme uplatnit úplný vzorec:

Výpočtem parciálních derivací máme:

$$F_K = F(K,L).\left[\frac{\beta}{K}+\alpha_1\right], \quad F_L = F(K,L).\left[\frac{1-\beta}{L}+\alpha_2\right]$$

$$F_{KK} = F(K,L).\left[(\frac{\beta}{K}+\alpha_1)^2 - \frac{\beta}{K^2}\right], \quad F_{LL} = F(K,L).\left[(\frac{1-\beta}{L}+\alpha_2)^2 + \frac{\beta-1}{L^2}\right]$$

$$F_{KL} = F(K,L).\left[\frac{1-\beta}{L}+\alpha_1\right].\left[\frac{\beta}{K}+\alpha_1\right] = F_{LK}$$

Dosazením do vzorce pro výpočet pružnosti substituce

$$s_{KL} = -\frac{L.F\left(\frac{1-\beta}{L}+\alpha_2\right)+K\left(\frac{\beta}{K}+\alpha_1\right)}{K.L}.\frac{F.\left(\frac{1-\beta}{L}+\alpha_2\right).F.\left(\frac{\beta}{K}+\alpha_1\right)}{J}$$, kde

$$J = F^3.\left[\left(\frac{\beta}{K}+\alpha_1\right)^2 - \frac{\beta}{K^2}\right].\left[\frac{1-\beta}{L}+\alpha_2\right]^2 + F^3.\left[\left(\frac{\beta}{K}+\alpha_1\right)^2\right].\left[\frac{1-\beta}{L}+\alpha_2\right]^2 -$$
$$2.F^3\left[\frac{1-\beta}{L}+\alpha_2\right]^2.\left[\frac{\beta}{K}+\alpha_1\right]^2$$

Po úpravách (roznásobení K.L a zkráceni $F^3(K,L)$ dostaneme

$$s_{KL} = -\frac{\left[(1-\beta+\alpha_2.L)+(\beta+\alpha_1.K)\right].\left[(1-\beta+\alpha_2.L).(\beta+\alpha_1.K)\right]}{\left[(\beta+\alpha_1.K)^2-\beta\right].\left[1-\beta+\alpha_2.L\right]^2+\left[\beta+\alpha_1.K\right]^2.\left[(1-\beta+\alpha_2.L)^2+\beta-1\right]-2.\left[1-\beta+\alpha_2.L\right]^{[\beta+\alpha_1.K]^2 2}}.$$

Označíme-li dále $C=\beta+\alpha_1.K, D=1-\beta+\alpha_2.L$, můžeme psát

$$s_{KL} = -\frac{(C+D).CD}{(C^2-\beta).D^2+(D^2+\beta-1)C^2-2C^2.D^2} = \frac{C.D(C+D)}{D^2.\beta+C^2(\beta-1)},$$

což po zpětném dosazení vede k výrazu

$$s_{KL} = \frac{(\beta+\alpha_1 K).(1-\beta+\alpha_2.L).(1+\alpha_2.L+\alpha_1 K)}{(1-\beta+\alpha_2.L)^2.\beta+(\beta+\alpha_1 K)^2(\beta-1)}.$$ □ .

Z funkčního tvaru je patrné, že pro $\alpha_1=\alpha_2=0$ dostáváme Cobb—Douglasovu funkci, čemuž odpovídá i příslušná hodnota elasticity substituce:

---

[8] K výpočtu elasticity substituce musíme použít vzorec (2.17), protože produkční funkce není lineárně homogenní.

$$_{CD}s_{KL} = \frac{(1-\beta).\beta}{\beta.(1-\beta)^2 + (1-\beta).\beta^2} = \frac{\beta}{\beta^2 + \beta(1-\beta)} = 1$$

Jinou nelinearitou, která je obdobou transcendentní funkce (6.), je specifikace ve tvaru

$$(K, L) = \gamma.K^{1-\beta}.L^{\beta}.e^{\alpha.K/L}$$

Její pružnost substituce je

$$s_{KL} = \frac{(\alpha w + 1 - \beta).(\beta - \alpha.w)}{(\alpha.w + 1 - \beta).(\beta - \alpha.w) - \alpha.w} \quad \text{, kde } w = K/L .$$

ověření:

6.2 Flexibilní funkční tvary

Další skupinou funkčních tvarů používaných jako produkční funkce jsou tzv. flexibilní funkční tvary. Uvedeme čtyři nejpoužívanější z nich v zápisech pro obecný n -faktorový případ.

(6) **Transcendentní logaritmická funkce** (jinak známější pod zkratkou ***TRANSLOG***)
Funkci uvedli poprvé autoři Christensen, Jorgenson, Lau [1973]

$$\ln F(\boldsymbol{x}) = \beta_0 + \sum_j \beta_j \ln(x_j) + \frac{1}{2}\sum_j \sum_k \beta_{jk} \ln(x_j)\ln(x_k)$$

přičemž se předpokládá dodržení symetrie koeficientů u „křížových členů“ tzn. platí $\beta_{jk} = \beta_{kj}$.
Z ostatních koeficientů se zpravidla vyžaduje již jen nezápornost β_j pro všechna j.

(7) **Zobecněná Leontiefova funkce** zavedená poprvé Diewertem [1971]

$$F(\boldsymbol{x}) = \beta_0 + \sum_j \beta_j \cdot x_j^{\frac{1}{2}} + \sum_j \sum_k \beta_{jk} \cdot x_j^{\frac{1}{2}} \cdot x_k^{\frac{1}{2}}$$

opět s dodržením symetrie koeficientů u „křížových odmocninných členů“ tzn. platí $\beta_{jk} = \beta_{kj}$ a nezápornost β_j pro všechna j.

(8) **Odmocnina kvadratické funkce** (formy), jejíž tvar použili Lau [1974] a Denny [1974]

$$F(\boldsymbol{x}) = \left[\beta_0 + \sum_j \beta_j x_j^{\frac{1}{2}} + \sum_j \sum_k \beta_{jk} x_j x_k\right]^{\frac{1}{2}}$$

stejně tak se symetrií koeficientů u křížových členů $\beta_{jk} = \beta_{kj}$, přičemž zpravidla ještě požadujeme $\beta_j > 0$ a $\beta_{jk} \geq 0$ pro všechna $j, k = 1, \ldots, n$.

(9) **Zobecněná Cobb-Douglasova funkce**

$$\ln F(\boldsymbol{x}) = \beta_0 + \sum_j \beta_j \ln(x_j) + \sum_j \sum_k \beta_{jk} \ln\left[\frac{(x_j + x_k)}{2}\right]$$

s kladným β_0 a symetrickými koeficienty β_{jk} vůči j a k.

Jak patrno, všechny tyto flexibilní funkční tvary se vyznačují přítomností interakčních členů $f(x_j)\cdot f(x_k)$ ve skupině vysvětlujících proměnných (posuzováno ekonometricky). Smysl a přínos zavedení těchto členů (které na druhé, záporné straně, výrazně zvětšují počet odhadovaných parametrů při ekonometrické analýze) je následující :

Uvažujme problém, že máme empiricky dostupná pozorování hodnot produkční funkce, aniž přesně známe analytický funkční tvar. Současně vyslovme požadavek, aby tento funkční tvar vyhovoval našim apriori zadaným podmínkám, že :
a) funkční hodnoty jsou
b) mezní produktivity jsou ....

Pokud ovšem k předchozím připojíme i požadavek na to, aby :
c) mezní míra substituce byla
d) pružnost míra substituce byla ....

dostaneme se do nesnází, pokud se omezíme na předchozí funkční tvary. Je tomu tak proto, že počet parametrů o těchto funkčních tvarů prostě nestačí na „vyhovění" všem volně zadaným ekonomickým charakteristikám.
Určitou nevýhodou (posuzováno ze statistického hlediska) je značný počet parametrů, které mají být předmětem statistického odhadu. Tak pro třífaktorové funkce (   ) je počet parametrů již 10, pro čtyřfaktorové pak 17.

V 80. letech 20.století byly učiněny ojedinělé pokusy o využití i kombinovaných typů produkčních funkcí, např. CD-TRANSLOG nebo *ACMS -TRANSLOG*.

6.3 Zobecněné a kombinované funkční tvary

V článku ... se objevily poprvé kombinace výše uvedených funkčních tvarů

6.3.1 CES-COBB-DOUGLASova produkční funkce

6.3.2 CES-TRANSLOG produkční funkce

6.3.3 WDI funkční tvar (zkratka z anglického ***weak disposability of input***) je nelineární tvar , který , v zápisu jako produkční funkce má tvar se 6 parametry:

(6.9) $$H(K,L) = A.[\alpha_1 (K-\gamma_1 L)^{\sigma} + \alpha_2 (L-\gamma_2 K)^{\sigma}]^{1/\sigma}$$

, pro $(K-\gamma_1 L) \geq 0$ a $(L-\gamma_2 K) \geq 0$ $\lambda_{12} = 0$

Pružnost substituce pro WDI funkční tvar lze zapsat jako

$$s_{KL} = \frac{1}{1-\sigma} \cdot \frac{1+\gamma_1.\gamma_2 - \gamma_1.\frac{\alpha_1}{\alpha_2} W(K,L)^{1-\sigma} - \gamma_2.\frac{\alpha_2}{\alpha_1} W(K,L)^{\sigma-1}}{1+\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1.W(K,L) + \gamma_2 W(K,L)^{-1}}, \text{ with } W(K,L) = \frac{L-\gamma_2 K}{K-\gamma_1 L} \quad (12)$$

6.3.4 McCarthyho funkční tvar zapsaný také se 6 parametry jako

(6.9) $$H(K,L) = B.[\lambda_1 K^{\mu} + \lambda_2 L^{\mu} + \lambda_{12}.K^{\delta} L^{\mu-\delta})^{1/\mu},$$

for $K \geq 0$ and $L \geq 0$

bě tyto jsou homogenní stupně 1, pokud jsou jejich parametry omezeny hodnotami

$A > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \sigma \in (-\infty,0) \cup (0,1)$ in case of the form (2) and

$B > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0, \quad \mu \in (-\infty,0) \cup (0,1)$ for the form (3).

The WDI functions allow for weak but not necessarily strong disposability of inputs. For the appropriate *output* production correspondence $P(\boldsymbol{x})$ it means that only the weak disposability holds: $P(\boldsymbol{x}) \le P(\lambda \boldsymbol{x})$ for scalar $\lambda \ge 1$ instead of $P(\boldsymbol{x}) \le P(\boldsymbol{y})$ for $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}$, where $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ are input vectors.

The WDI production functions allow for variable elasticity of substitution and they are suitable for modeling production technologies that exhibit an input congestion, as is the case of traffic congestion.

Pružnost substituce pro McCarthyho tvar je dána výrazem

$$s_{KL} = \frac{1}{1-\mu+\mu.Z(K,L)} \quad , \quad \text{ve kterém}$$

$$Z(K,L) = \frac{\lambda_{12}\left(\frac{\delta}{\mu}-1\right).\frac{\delta}{\mu}.\left(\frac{K}{L}\right)^{\delta}}{\left(\lambda_1(\frac{K}{L})^{\mu}+\lambda_{12}.\frac{\delta}{\mu.}.\left(\frac{K}{L}\right)^{\delta}\right).\left(\lambda_2+\lambda_{12}(1-\frac{\delta}{\mu}).\left(\frac{K}{L}\right)^{\delta}\right)}. \tag{9c}$$