2 Užitková funkce a její vlastnosti. Monotónní transformace užitkové funkce

2.1 Vlastnosti užitkové funkce, geometrické znázornění

Pro užitkovou funkci $u(x)$ zavedenou výše pomocí relace „$\succeq$„ přijmeme nyní některé vlastnosti, které jsou odvoditelné z vlastností preferenční relace „$\succeq$„ a současně se ukazují jako opodstatněné téměř ve všech situacích spojených s rozhodováním spotřebitele na základě svých preferenčních kritérií.

Definice 2.1 Jestliže funkce $u(\boldsymbol{x})$ n proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ má následující vlastnosti

(U1) $u(x)$ je reálná konečná funkce a platí pro ni $u(\boldsymbol{0}) = 0$.
(U2) $u(x)$ je rostoucí ve všech proměnných, tzn. platí: Jestliže $x \le z$, $x \ne z$, pak $u(x) < u(z)$.
(U3) $u(x)$ je spojitá v celém definičním oboru.
(U4) $u(x)$ je kvazikonkávní funkce.
(U5) $u(x)$ je určena až na ryze monotónní (rostoucí) spojitou transformaci $\varphi(u)$.

Potom o takové funkci $u(\boldsymbol{x})$ řekneme, že má vlastnosti užitkové funkce.
Přesný význam vlastností (U4) a (U5) nyní vyložíme formulací příslušné definice.

Definice 2.2 Funkce n proměnných $G(\boldsymbol{x})$ se nazývá **konkávní**, jestliže pro kterékoliv dva body/vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ z definičního oboru $D_r(G(x))$ platí nerovnost:

(2.1) $$G(\boldsymbol{x}\cdot\lambda + (1-\lambda)\cdot \boldsymbol{z}) \ge \lambda.G(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda).G(\boldsymbol{z})$$

pro libovolné reálné číslo $\lambda \in (0,1)$. Konkávnost znamená, že při průběhu argumentu úsečkou spojující body $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ (v komoditním prostoru) nesmí hodnota funkce $G(\boldsymbol{y})$ v kterémkoliv bodě $\boldsymbol{y}$ na této úsečce klesnout pod (*prostorovou*) úsečku spojující body $G(\boldsymbol{x})$ a $G(\boldsymbol{z})$.

Definice 2.3 Funkce n proměnných $G(\boldsymbol{x})$ se nazývá **kvazikonkávní**, jestliže pro kterékoliv dva body $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ z definičního oboru $D_r(G(x))$ platí nerovnost[1]:

(2.2) $$G(\boldsymbol{x}\cdot\lambda + (1-\lambda)\cdot \boldsymbol{z}) \ge Min[G(\boldsymbol{x}); G(\boldsymbol{z})]$$

pro libovolné reálné číslo $\lambda \in (0,1)$. Kvazikonkávnost tedy obrazně znamená, že při průběhu argumentu úsečkou spojující body $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ (v komoditním prostoru) nesmí hodnota funkce $G(\boldsymbol{y})$ v žádném bodě $\boldsymbol{y}$ na této úsečce klesnout pod menší z hodnot obou krajních bodů této úsečky $G(\boldsymbol{x})$, resp. $G(\boldsymbol{z})$.

Kvazikonkávnost je takto definovaná bez ohledu na existenci derivací (resp. i spojitost) funkce n proměnných. Později ukážeme, jak lze tuto vlastnost formulovat u funkcí, které jsou diferencovatelné. Poznamenáváme dále, že konkávní funkce je vždy kvazikonkávní, zatímco kvazikonkávní funkce nemusí být nutně konkávní. Prostorová úsečka spojující body $G(\boldsymbol{x})$ a $G(\boldsymbol{z})$ totiž v žádném případě nemůže „propadnout“ pod minimum vzaté z obou svých krajních hodnot.

[1] Pokud by ve vztahu (2.1) platila ostrá nerovnost, řekli bychom, že $G(\boldsymbol{x})$ je **ryze konkávní**

Definice 2.4 Funkce n proměnných $G(\boldsymbol{x})$ se nazývá **neklesající**, jestliže pro kterékoliv dva body/vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ z definičního oboru $D_r(G(x))$ takové, že $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z}$, **tj.** $x_i \leq z_i$ pro všechna $i = 1,2,...,n$, přičemž alespoň pro jedno k $x_k < z_k$, platí nerovnost:

$$G(\boldsymbol{x}) \leq G(\boldsymbol{z}). \tag{2.3}$$

Monotónnost (v růstu) tedy znamená, že s přidáním hodnoty kteréhokoliv z argumentů nemůže dojít k poklesu funkční hodnoty.

Definice 2.5 Funkce n proměnných $G(\boldsymbol{x})$ se nazývá **rostoucí**, jestliže pro kterékoliv dva body/vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ z definičního oboru $D_r(G(x))$ takové, že $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z}$, **tj.** $x_i \leq z_i$ pro všechna $i = 1,2,...,n$, přičemž alespoň pro jedno k $x_k < z_k$, platí nerovnost:

$$G(\boldsymbol{x}) < G(\boldsymbol{z}). \tag{2.4}$$

Ryzí monotónnost (v růstu) tedy znamená, že s přidáním hodnoty kteréhokoliv z argumentů musí dojít ke zvýšení funkční hodnoty.

Definice 2.6 Funkce n proměnných $G(\boldsymbol{x})$ se nazývá **nerostoucí,** jestliže je funkce $-G(\boldsymbol{x})$ neklesající. Funkce n proměnných $G(\boldsymbol{x})$ se nazývá **klesající,** jestliže je $-G(\boldsymbol{x})$ rostoucí.

Definice 2.7 Jestliže ve třídě ordinálních užitkových funkcí $g(u(\boldsymbol{x}))$, které jsou ekvivalentní s $u(\boldsymbol{x})$ po lineární transformaci g, existuje užitková funkce $v(\boldsymbol{x})$ taková, že platí

$$v(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i), \tag{2.5}$$

pak říkáme, že $u(\boldsymbol{x})$ je **aditivně rozložitelná** užitková funkce.

Je zřejmé, že v takovémto případě lze vyjádřit individuální přínosy k celkovému užitku samostatně pro každou komoditu, jinými slovy, celkový užitek je pak součtem těchto individuálních přínosů.

Definice 2.8 Funkce n proměnných $G(\boldsymbol{x})$ se nazývá **homogenní stupně s**, jestliže pro kterýkoliv bod/vektor $\boldsymbol{x}$ z definičního oboru $D_r(G(x))$ a libovolné $\lambda > 0$ platí rovnost:

$$G(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda.^s.G(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.6}$$

pro nějaké reálné číslo s (zpravidla $s \geq -1$).

Homogenita znamená, že skalární zvětšení (zmenšení) současně všech funkčních argumentů se projeví vynásobením původní funkční hodnoty s-tou mocninou této skalární změny. Nejčastější případy nastávají při $\lambda = 1$, kdy mluvíme o **lineární homogenitě** (pak bude funkční hodnota přímo $\lambda - násobkem$ původní), a při $\lambda = 0$ **homogenita nultého stupně**, kdy skalární změna všech argumentů nemá na funkční hodnotu žádný vliv (viz případ *nepřímé užitkové funkce*).

TVRZENÍ 2.1 Nechť $G(x)$ je (*diferencovatelná*) užitková funkce, která je homogenní stupně s ve smyslu definice (2.8). Pak je její derivace $G'(x)$ homogenní funkce stupně $s-1$.

Ověření: Vztah (2.8) definující homogenitu s - tého stupně derivujeme podle x. Dostaneme

$$\frac{\partial G(\lambda x)}{\partial x} = \frac{\partial G(\lambda x)}{\partial(\lambda x)} . \frac{\partial(\lambda x)}{\partial x} = \lambda^s . \frac{\partial G(x)}{\partial x} = \frac{\partial[\lambda^s . G(x)]}{\partial x} .$$

Porovnáním dvou středních členů máme

$$\lambda . g(\lambda x) = \lambda^s . g(x) \text{ čili } g(\lambda x) = \lambda^{s-1} . g(x) ,$$

přičemž jsme derivaci $G'(x)$ označili jako $g(x)$. □

Poznámka 2.1 Platnost *tvrzení 2.1* je pro vyšetřování vlastností ekonomických funkčních typů v prostředí teorie spotřebitelské poptávky (a obdobně i v teorii produkce) velmi důležitá. Např. Marshallovské i Hicksovské poptávkové funkce získáváme jako první derivace nepřímé užitkové, resp. výdajové funkce. Je-li výdajová funkce lineárně homogenní, bude příslušná poptávková funkce zapsaná v Marshallovském tvaru (ve stejných argumentech) homogenní stupně nula.

Vlastnost (U5) konstatuje, že užitková funkce není určena jednoznačně, ale že za „v podstatě tutéž funkci“, resp. funkci patřící do „téže třídy jako je výchozí $u(x)$“ lze považovat i libovolnou transformovanou funkci $\varphi(u(x))$, pokud je transformace $\varphi(.)$ spojitá a rostoucí. Znamená to tedy, že užitkovou funkci uvažujeme „jen“ v ordinálním smyslu, tzn., že při porovnání užitku, který přináší dvě komoditní kombinace $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{z}$, nerozhoduje, jaké jsou konkrétní číselné velikosti užitku $u(\boldsymbol{x})$ a $u(\boldsymbol{z})$, nýbrž jen to, zda vždy platí $u(\boldsymbol{x}) > u(\boldsymbol{z})$ či $u(\boldsymbol{z}) > u(\boldsymbol{x})$ nebo zda $u(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{z})$. Zatímco pro kterékoliv dvě komodity lze rozhodnout, která z nich je pro spotřebitele z hlediska přinášeného užitku lepší (popř. jsou-li indiferentní), nelze rozdíl mezi dvěma různými užitky (nejsou-li komodity indiferentní) kvantitativně vyčíslit tj. změřit. Každá transformace φ s sebou přináší obecně jinou „mezihladinovou“ škálu pro měření rozdílů.

Poznámka 2.2 Nejednoznačnost určení užitkové funkce ve smyslu (U5) má důsledek např. v tom, že funkce $u(\boldsymbol{x})$, $2 \cdot u(\boldsymbol{x})$, $\sqrt{\log u(\boldsymbol{x})} + 4$, $2 \cdot \sqrt{u(\boldsymbol{x}) + 3}$ vyjadřují v podstatě tutéž situaci ve spotřebitelově hodnocení, které uplatňuje vůči několika komoditním kombinacích, které mu přinášejí užitek.

V případě, že chceme pojem užitkové funkce využít při hlubší analýze spotřebitelova chování (např. ve vztahu k cenám komodit a příjmu spotřebitele) a potřebujeme přitom uplatnit poznatky diferenciálního počtu, přijímáme pro užitkovou funkci ještě jednu nebo obě (jak známo, první vyplývá z druhé) další vlastnosti:

(U6) Existují spojité 1.parciální derivace $u_r = \dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_r}$ (tj.podle všech proměnných).

(U6*) Existují spojité 2.parciální derivace $u_{rs} = \dfrac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_r \partial \boldsymbol{x}_s}$ (tj. pro $r, s = 1, 2, ..., n$).

Význam společně uvažovaných vlastností (P1), (P2), (P3), (P5) preferenční relace „$\succeq$„ bude zřetelnější ve světle následujícího tvrzení:

Věta 2.1 [Debreu, Eilenberg, Rader]
Jestliže preferenční relace „$\succeq$„ splňuje vlastnosti (P1), (P2), (P3), (P5) v komoditním prostoru generovaném spočetnou bází otevřených množin, potom lze v tomto prostoru zkonstruovat spojitou užitkovou funkci $u(x)$.

Důkaz:
a) existence: Nechť M_1, M_2 je posloupnost otevřených množin ve spočetné bázi X. Pro jakékoliv x uvažujme množinu $N(x) = \{n \mid z > x \text{ pro všechna } z \in M_n\}$ a definujme funkci $v(x)$ vztahem

$$v(x) = \sum_{n \in N(X)} 2^{-n} \quad .$$

Jestliže $y \geq x$, potom $N(x) \subset N(y)$, takže $v(x) \leq v(y)$. Na druhé straně, jestliže y < x, pak existuje $n \in N(y)$ takové, že $x \in M_n$, ale nikoliv $n \in N(x)$. Tedy $N(x) \notin N(y)$ a $v(y) > v(x)$. Tedy v je užitková funkce.

b) spojitost: Nechť S označuje libovolnou množinu na rozšířené reálné přímce, která později bude brána jako $v(X)$. S stejně jako její doplněk $\#S$ může sestávat z nedegenerovaných a degenerovaných intervalů. Za „mezeru“ S označíme maximální nedegenerovaný interval doplňku $\#S$, který má horní a dolní hranici v S. Podle věty vyvozené G. Debreuem (1964) platí, že jestliže S je podmnožina rozšířené reálné přímky R, pak existuje rostoucí funkce g z S do R taková, že všechny mezery $g(S)$ jsou otevřené množiny. □

Geometrická interpretace: Užitková funkce je představována nadplochou v $n+1$-rozměrném prostoru R_{n+1}, v rámci něhož komoditní prostor X generuje n dimenzních složek a hodnotu užitku v poslední $n+1$-dimenzi. V této $n+1$-dimenzi „měříme“ užitek, který spotřebiteli přináší kterákoliv komoditní kombinace $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X$. Geometrická místa bodů (komoditních kombinací), která poskytují stejný užitek (na určité konstantní úrovni u^*) vytvářejí (obrazně řečeno) určité „vrstevnice“, přičemž výška každé vrstevnice udává hodnotu užitku pro danou kombinaci komodit.[2] Tyto vrstevnice budeme nazývat **indiferenční křivky** (ve vztahu k užitku).

Při této interpretaci lze o soustavě vrstevnic mluvit jako o tzv. **indiferenční mapě** tvořené těmito vrstevnicemi pro všechny možné hladiny užitku. S ohledem na vlastnost (U5) je indiferenční mapa nezávislá na volbě transformační funkce $\varphi(u)$, neboli řečeno jinými slovy: průměty vrstevnic do n-rozměrného komoditního prostoru zůstávají při změně φ beze změn. Je tomu tak proto, že se změnou φ se sice může změnit nominální hodnota užitku, ale preferenční srovnání libovolných dvou komodit se zachovává.

Poznámka 2.3 Lze také ukázat, že také naopak ze znalosti indiferenční mapy tj. vrstevnic $u(x_1, x_2, ..., x_n) = \omega$ pro libovolné ω ležící na některé vrstevnici, lze odvodit (opět až na

[2] Ne ze všech hledisek je ovšem srovnání indiferenční mapy se skutečnou (geografickou) mapou plnohodnotné: Vrstevnice indiferenční mapy - jak ukazuje **obrázek č. ...** - nemohou být uzavřené křivky vzhledem k vlastnosti (U2) užitkové funkce a v důsledku (U4) musí vytvářet konvexní útvary: tzn. úsečkové spojnice propojující dva body na téže indiferenční křivce nesmí protnout žádný bod s nižší hladinou užitku. Spotřebitel pohlížející na mapu směrem „od počátku souřadnic“ tedy „vrstevnice“ vidí pouze směrem „do kopce“, aniž by se v této mapě mohlo vyskytnout za vrcholem či hřebenem kopce (tj. při zvýšených množstvích dosazovaných komodit) opět klesání směrem dolů.

transformující funkci φ) tvar užitkové funkce $u(x)$. V tomto směru je tedy znalost užitkové funkce a znalost indiferenční mapy rovnocenná.

Ekonomická historie zná mnoho polemik o oprávněnosti toho, zda lze na kvantifikaci užitku pohlížet i klasickým, tj. kardinálním způsobem. Přestože existuje řada (i nekomplikovaných) způsobů, jak přechod na kardinální vyjadřování provést, ukazuje ekonomická praxe, že důsledné kardinální pojetí měření užitku vyžaduje zpravidla vždy takové informace kvantitativní povahy, jejichž (třeba jen subjektivně posuzovanou) určitelnost či odhadnutelnost zajistit nelze. Zkuste např. ohodnotit, zda - třeba na odlehlém místě a v zimním čase - jsou pro nás teplé rukavice o 20 %, 40 % či 70 % méně užitečné, než teplá zimní obuv, máme-li se rukavicemi chránit před omrznutím rukou a teplými botami před promrznutím nohou. Přitom už samotné ordinální srovnání může být určitým problémem. Ostatně provést úvahu s kardinální kvantifikací nejrůznějších užitkových preferenčních srovnání a následně vyslovit svůj názor či závěr může každý čtenář sám.

2.2 Ekonomické charakteristiky užitkové funkce

Definice 2.9 První parciální derivace užitkové funkce podle libovolné r-té komodity vyčíslená v některém pevném bodě $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ je nazývána ***mezním (marginálním) užitkem r -té komodity*** v tomto bodě (kombinaci komodit). Mezní užitek značíme zpravidla

$$u_r = \frac{\partial u\left(\boldsymbol{x}^0\right)}{\partial \boldsymbol{x}_r}.$$

Podle předpokladu o ryzí monotónnosti užitkové funkce $u(\boldsymbol{x})$ je mezní užitek kterékoliv komodity kladná hodnota. Tento požadavek je dosti restriktivní, neboť nepřipouští (v realitě snadno myslitelné) úvahy o dosažení určité saturační úrovně „užitečnosti" některých komodit, po jejímž překročení se užitek pociťovaný spotřebitelem již dále nezvyšuje. Zajisté by bylo možné jmenovat případy, kdy po nabytí jisté úrovně dané komodity užitek klesá (pokud bychom uvažovali např. nežádoucí průvodní jevy spojené s nemírnou konzumací jídel, alkoholických nápojů apod.).

Definice 2.10 Podíl dvou mezních užitků (příslušných různým komoditám ζ_r, ζ_s), vyčíslený v některém bodě $\boldsymbol{x}^0$ komoditního prostoru $\boldsymbol{X}$ se nazývá ***mezní (marginální) míra substituce mezi r -tou a s -tou komoditou***. Značíme ji m_{rs} a definujeme tedy jako

$$m_{rs} = \frac{u_r}{u_s}. \tag{2.7}$$

Jak je z definice patrno, mezní míra substituce je ve vztahu k pořadí komodit reciproká. Tím rozumíme, že obrátíme-li pořadí komodit v substitučním vztahu, obdržíme převrácenou hodnotu původní: $m_{sr} = \dfrac{1}{m_{rs}}$. Hodnota mezní míry substituce bude silně záviset na tom, ve kterém bodě komoditního prostoru ji vyčíslujeme, vždy jde však o nezápornou hodnotu.

Pro mezní míru substituce lze snadno odvodit vztah:

$$m_{rs} = -\frac{dx_s}{dx_r}. \tag{2.8}$$

Ověření: Vyjdeme ze známého vyjádření totálního diferenciálu funkce a jeho rozkladu na dvě aditivní komponenty u funkce dvou (substitučních) proměnných.

(2.3) $$du(\boldsymbol{x}^0) = \frac{\partial u(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial u(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_s} dx_s .$$

Protože při pohybu po indiferenční křivce $u^* =$ konst. se úroveň užitku nemění (mění se však vzájemný poměr faktorů x_r a x_s), platí pro totální diferenciál $du(\boldsymbol{x}^0) = 0$. Odtud zřejmě plyne

$$-u_r dx_r = u_s dx_s$$ a z něj dále

(2.9) $$\frac{u_r}{u_s} = -\frac{dx_s}{dx_r} .$$

Mezní míra substituce mezi dvěma komoditami (při neměnících se komoditách ostatních) kvantitativně vyjadřuje množství zvýšení jedné komodity (při snížení druhé komodity o jednotku jejího množství) potřebné k tomu, aby takto nově vytvořená komoditní kombinace poskytovala stejný užitek jako kombinace původní. Všimněme si, že i ve výrazu (2.1.4) zůstává mezní míra substituce nezáporná: Jeden z diferenciálů dx_r nebo dx_s bude totiž záporný, neboť přírůstek v množství jedné komodity musí být kompenzován úbytkem druhé a vice versa. Pokud bychom současně zvýšili množství obou komodit, dosáhli bychom (při předpokladu kladných mezních užitků) vyšší hladiny užitku. V případě tří a více komodit jsou přirozeně možné kombinace změn v množstvích komodit při zachování dané hladiny užitku pestřejší.

Typickou vlastností mezní míry substituce je, že se tato charakteristika při pohybu po indiferenční křivce mění. Přitom při pohybu po indiferenční křivce směrem zleva/shora $\Rightarrow$ doprava/dolů dochází k poklesu mezní míry substituce. V této souvislosti lze mluvit o zákonu klesající mezní míry substituce. Vyslovíme jej přesněji:

Věta 2.2 ***Zákon klesající mezní míry substituce***: Při pohybu po indiferenční křivce platí pro libovolné dva body $x = (x_1, x_2), x^* = (x_1^*, x_2^*)$ komoditního prostoru takové, že jejich souřadnice vyhovují vztahům $x_1 \le x_1^*, x_2 \ge x_2^*$ a současně leží na téže indiferenční křivce, tzn. $u(x_1, x_2) = u(x_1^*, x_2^*)$, podmínka $m_{rs}(x_1, x_2) > m_{rs}(x_1^*, x_2^*)$ právě tehdy, když je užitková funkce $u(\boldsymbol{x})$ kvazikonkávní.

Důkaz: Jak již víme, mezní míra substituce je nezáporná funkce. Uvažovanou podmínku lze zapsat jako požadavek na zápornost diferenciálu veličiny $dm_{rs}(x_r, x_s)$ při pohybu po libovolné indiferenční křivce. S použitím věty o rozkladu totálního diferenciálu (*někdy též Youngovy věty*), lze uvažovanou podmínku zapsat jako

(2.10) $$dm_{rs} = \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_s} dx_s < 0 .$$

Po úpravě využívající vyvozeného vztahu (2.9), lze klesající tendenci mezní míry substituce vyjádřit vztahem (dělíme hodnotou dx_r, která je při uvažovaném směru pohybu kladná)

(2.11) $$\frac{\partial m_{rs}}{\partial x_r} - m_{rs} \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_s} < 0 .$$

Přepíšeme-li tento výraz v definičním vyjádření $m_{rs} = \frac{u_r}{u_s}$ a provedeme-li výpočty příslušných parciálních derivací, dostáváme ekvivalentní vyjádření

(2.12) $$\frac{\partial\left(\frac{u_r}{u_s}\right)}{\partial x_r} - \frac{u_r}{u_s} \cdot \frac{\partial\left(\frac{u_r}{u_s}\right)}{x_s} < 0,$$

které přejde po standardních úpravách do podoby

(2.13) $$\frac{u_s u_{rr} - u_r u_{sr}}{u_s^2} - \frac{u_r}{u_s} \cdot \frac{u_s u_{rs} - u_r u_{ss}}{u_s^2}$$ až po

tvar

(2.14) $$\frac{u_s^2 u_{rr} - 2 \cdot u_r u_s u_{rs} + u_r^2 u_{ss}}{u_s^3} < 0.$$

Zapíšeme-li čitatel výrazu (2.14) pomocí kvadratické formy s proměnnými u_r, u_s a koeficienty u_{rr}, u_{rs}, u_{ss} dostaneme (s vědomím toho, že u_s^3 je dle předpokladu > 0) nerovnost

(2.15) $$\begin{bmatrix} u_s & u_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{rr} & -u_{rs} \\ -u_{rs} & u_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_s \\ u_r \end{bmatrix} < 0.$$

Jiným zápisem téže podmínky je pak vyjádření

(2.16) $$\begin{vmatrix} 0 & u_r & u_s \\ u_r & u_{rr} & u_{rs} \\ u_s & u_{rs} & u_{ss} \end{vmatrix} > 0,$$

kterou snadno ověříme aplikací např. Sarusova pravidla.

Z (2.16) je zřejmé, že podmínka pro klesající mezní míru substituce je formálně totožná s podmínkou pro kvazikonkávnost výchozí užitkové funkce (je-li tato alespoň dvakrát spojitě diferencovatelná). Jinými slovy: Jestliže předpokládáme pro užitkovou funkci vlastnost kvazikonkávnosti, budeme mít zaručeno, že příslušná mezní míra substituce bude mít při pohybu po indiferenční křivce zleva/shora $\Rightarrow$ doprava/dolů klesající tendenci.

Uvedené lze ilustrovat na obrázku 2: Přípustné podoby indiferenční křivky vymezující hladinu užitku u^0 nalezneme na obrázku [2a], kde je patrné, že při pohybu ve směru zleva/shora $\Rightarrow$ doprava/dolů se vždy zachovává klesající tendence poměru $\frac{dx_2}{dx_1}$. Naopak na obrázku [2b] je tato relace porušena mezi („inflexními“) body B a C, kde je indiferenční křivka vyklenuta směrem „od počátku souřadnic“. (Povšimněme si však, že i v těchto případech první souřadnice bodu pohybujícího se v uvedeném směru po indiferenční křivce roste, zatímco druhá klesá.) Klesající mezní míra substituce je tedy silnější vlastností než pouhé konstatování, že $m_{rs} > 0$. Jak je patrné, v případech 2c, 2d není množina $L(u^0)$ konvexní. V části 3 ukážeme (na příkladu produkční funkce), že kvazikonkávnost má přímý vztah ke konvexnosti množin $L(u^0)$.

Výše zavedené předpoklady (U1)-(U5), (U6*) nám umožňují zavést pro účely dalšího výkladu velmi užitečnou čtvercovou matici U sestávající z prvních a druhých parciálních derivací užitkové funkce u_r a u_{rs}, konkrétně tvaru

(2.17)
$$\boldsymbol{U} = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}.$$

Matice U je vzhledem k vlastnosti (U6*) symetrická (obsahuje tedy nanejvýš $\frac{n(n+1)}{2}$ různých prvků). Jak uvidíme dále, tato matice bude hrát důležitou úlohu ve více situacích.

2.3 Monotónní transformace užitkové funkce

Jak bylo zmíněno dříve, užitková funkce je určena až na spojitou monotónní (rostoucí) transformaci $g(u)$. V dalším ukážeme, jak volba transformace (mající za následek nejednoznačnost u) ovlivňuje veličiny jako je mezní užitek a mezní míra substituce.

a) **mezní užitek (transformované) užitkové funkce** $g(u(\boldsymbol{x}))$ se snadno odvodí z pravidla pro derivování složené funkce:

(2.18)
$$g_r = \frac{\partial g(u(\boldsymbol{x}))}{\partial x_r} = g'(u) \cdot u_r, \text{ kde } u_r = \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{x_r}.$$

Hodnota mezního užitku při transformaci je tedy závislá na volbě transformující funkce. Vzhledem k tomu, že $g(u)$ je rostoucí, bude „transformovaný" mezní užitek opět kladný.

b) **mezní míra substituce (transformované) užitkové funkce** $g(u(\boldsymbol{x}))$ se odvodí podobně

(2.19)
$$m_{rs} = \frac{g_r(u(\boldsymbol{x}))}{g_s(u(\boldsymbol{x}))} = \frac{\dfrac{\partial g(u(\boldsymbol{x}))}{\partial x_r}}{\dfrac{\partial g(u(\boldsymbol{x}))}{\partial x_s}} = \frac{g'(u) \cdot u_r}{g'(u) \cdot u_s} = \frac{u_r}{u_s}$$

a její hodnota je tedy na volbě transformující funkce nezávislá. Jinými slovy: kvantitativní vyjádření vzájemného vztahu mezi dvěma substitučními komoditami zůstává při změně transformující funkce nedotčeno. Toto zjištění je očekávané mj. proto, že při transformaci se zachovává vzájemná poloha vrstevnic vymezujících indiferenční křivky: transformace z tohoto hlediska nemění nic na vztahu (např. substitučním) obou komodit při pohybu po indiferenční křivce.

c) **druhé parciální derivace (transformované) užitkové funkce** se změní způsobem:

(2.20)
$$\frac{\partial^2 g(u(\boldsymbol{x}))}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial (g'(u(\boldsymbol{x})) \cdot u_r)}{\partial x_s} = g'(u) \cdot \frac{\partial u_r(\boldsymbol{x})}{\partial x_s} + g''(u) \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_s} \cdot u_r = g'(u) \cdot u_{rs} + g''(u) \cdot u_s \cdot u_r$$

d) Nyní vyšetříme, do jaké míry se provedením rostoucí spojité transformace g na užitkovou funkci změní matice $\boldsymbol{U}$ a její determinant. Nejprve tedy dosadíme transformované hodnoty mezních užitků a druhých parciálních derivací užitkové funkce do příslušné matice transformací (analogicky k $\boldsymbol{U}$ ji označíme $\boldsymbol{G}$). Dostaneme

(2.21)

$$G=\begin{pmatrix} 0 & g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u) \\ g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_{11}+g''(u).u_1^2 & g'(u).u_{12}+g''(u).u_1.u_2 & g'(u)\cdot u_{13}+g''(u).u_1.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1}+ \\ g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_{12}+g''(u).u_1u_2 & g'(u).u_{22}+g''(u).u_2^2 & g'(u)\cdot u_{23}+g''(u).u_2.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2}+ \\ g'(u)\cdot u_3 & g'(u)\cdot u_{13}+g''(u).u_1u_3 & g'(u).u_{23}+g''(u).u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{33}+g''(u).u_3^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3}+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g'(u)\cdot u_{1n}+g''(u).u_1u_n & g'(u).u_{2n}+g''(u).u_nu_2 & g'(u)\cdot u_{n3}+g''(u).u_n.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn}+ \end{pmatrix}$$

a tedy příslušný determinant z této matice jako (2.22)

$$|\boldsymbol{G}_2|=\begin{vmatrix} 0 & g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_{11}+g''(u).u_1^2 & g'(u).u_{12}+g''(u).u_1.u_2 & g'(u)\cdot u_{13}+g''(u).u_1.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1}+g''(u). \\ g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_{12}+g''(u).u_1u_2 & g'(u).u_{22}+g''(u).u_2^2 & g'(u)\cdot u_{23}+g''(u).u_2.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2}+g''(u). \\ g'(u)\cdot u_3 & g'(u)\cdot u_{13}+g''(u).u_1u_3 & g'(u).u_{23}+g''(u).u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{33}+g''(u).u_3^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3}+g''(u). \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g'(u)\cdot u_{1n}+g''(u).u_1u_n & g'(u).u_{2n}+g''(u).u_nu_2 & g'(u)\cdot u_{n3}+g''(u).u_n.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn}+g''(u). \end{vmatrix}$$

Abychom nyní určili hodnotu tohoto determinantu, resp. pokusili se ho porovnat s determinantem $|\boldsymbol{U}|$, rozložíme $|\boldsymbol{G}|$ pomocí známého součtového pravidla. To říká, že pokud je např. první sloupec čtvercové matice $A=\{a_{ij}\}$ $\boldsymbol{a}_1$ součtem dvou vektorů $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$, pak je determinant $|\boldsymbol{A}|$ roven součtu dvou determinantů čtvercových matic se sloupci $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,....,\boldsymbol{a}_n)$ a $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,....,\boldsymbol{a}_n)$. Aplikováno na náš případ, kdy lze druhý až n-tý sloupec G rozložit na součtové členy, dostáváme:

$$|\mathbf{a_1},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{1}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{2}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{2},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{3}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{3},....,\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}| =$$

$$|\mathbf{a_1},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{2}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{2},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{3}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{3},....,\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}|+|\mathbf{a_1},\boldsymbol{\beta}_\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{2}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{2},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{3}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{3},....,\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}|=$$

$$|\mathbf{a_1},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{2},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{3}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{3},....,\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}|+|\mathbf{a_1},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{1},\boldsymbol{\beta}_\mathbf{2},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{3}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{3},....,\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}|+$$

$$|\mathbf{a_1},\boldsymbol{\beta}_\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{2},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{3}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{3},....,\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}|+|\mathbf{a_1},\boldsymbol{\beta}_\mathbf{1},\boldsymbol{\beta}_\mathbf{2},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{3}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{3},....,\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}| \text{ atd.}$$

Celkem tedy obdržíme $2n-1$ determinantů, z nichž však převážná většina nijak neovlivní výsledný výraz. Pouze první z nich, který má tvar

$$|\boldsymbol{G}_1|=\begin{vmatrix} 0 & g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_{11} & g'(u)\cdot u_{21} & g'(u)\cdot u_{31} & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1} \\ g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_{12} & g'(u)\cdot u_{22} & g'(u)\cdot u_{32} & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2} \\ g'(u)\cdot u_3 & g'(u)\cdot u_{13} & g'(u)\cdot u_{23} & g'(u)\cdot u_{33} & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g'(u)\cdot u_{1n} & g'(u)\cdot u_{2n} & g'(u)\cdot u_{3n} & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn} \end{vmatrix},$$

je totiž nenulový a - jak je zřejmé - má hodnotu $[g'(u)]^{n+1}\cdot|\boldsymbol{U}|$. Všechny ostatní determinanty se vyznačují vlastností, že nejméně dva jejich sloupce jsou lineárně závislé a jejich hodnota je tedy nulová. Přiblížíme to na rozkladu do součtových členů $|\boldsymbol{G}|=|\boldsymbol{G_1}|+|\boldsymbol{G_2}|+|\boldsymbol{G_3}|+|\boldsymbol{G_4}|$, kde

(2.23) $$|\boldsymbol{G}_1|=[g'(u)]^{n+1}\cdot|\boldsymbol{U}|$$

(2.24)

$$|\boldsymbol{G}_2|=\begin{vmatrix} 0 & g'(u)\cdot u_1 & 0 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_{11} & g'(u).u_2u_1 & g'(u)\cdot u_{13}{}'+g''(u).u_1u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1}+g''(u).u_1u_n \\ g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_{12} & g'(u)\cdot u_2.u_2 & g'(u)\cdot u_{23}{}'+g''(u).u_2u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2}+g''(u).u_2u_n \\ g'(u)\cdot u_3 & g'(u)\cdot u_{13} & g'(u)\cdot u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{33}{}'+g''(u).u_3{}^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3}+g''(u).u_3u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g'(u)\cdot u_{1n} & g'(u)\cdot u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{n3}{}'+g''(u).u_nu_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn}+g''(u).u_n{}^2 \end{vmatrix}=0$$

v důsledku lineární závislosti prvního a třetího sloupce (oba jsou násobky vektoru $(0,u_1,u_2,....,u_n)$),

$$|\boldsymbol{G}_3|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & g'(u).u_2 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g''(u)\cdot u_1.u_1 & g'(u).u_2 & g'(u)\cdot u_{13}{}'+g''(u).u_1u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1}+g''(u).u_1u_n \\ g'(u)\cdot u_2 & g''(u)\cdot u_1.u_2 & g'(u)\cdot u_{22} & g'(u)\cdot u_{23}{}'+g''(u).u_2u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2}+g''(u).u_2u_n \\ g'(u)\cdot u_3 & g''(u)\cdot u_1.u_3 & g'(u)\cdot u_{23} & g'(u)\cdot u_{33}{}'+g''(u).u_3{}^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3}+g''(u).u_3u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g''(u)\cdot u_1.u_n & g'(u)\cdot u_{2n} & g'(u)\cdot u_{n3}{}'+g''(u).u_nu_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn}+g''(u).u_n{}^2 \end{vmatrix}=0$$

v důsledku lineární závislosti prvního a druhého sloupce (oba jsou násobky vektoru $(0,u_1,u_2,...u_n)$),

$$|\boldsymbol{G}_4|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g''(u)\cdot u_1.u_1 & g''(u).u_2.u_1 & g'(u)\cdot u_{13}+g''(u).u_1.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1}+g''(u).u_1.u_n \\ g'(u)\cdot u_2 & g''(u)\cdot u_1.u_2 & g''(u).u_2.u_2 & g'(u)\cdot u_{23}+g''(u).u_2.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2}+g''(u).u_2.u_n \\ g'(u)\cdot u_3 & g''(u)\cdot u_1.u_3 & g''(u).u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{33}+g''(u).u_3{}^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3}+g''(u).u_3.u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g''(u)\cdot u_1.u_n & g''(u).u_2.u_n & g'(u)\cdot u_{n3}+g''(u).u_n.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn}+g''(u).u_n{}^2 \end{vmatrix}=0$$

tentokrát v důsledku lineární závislosti prvního, druhého i třetího sloupce (každý z těchto sloupců je opět násobkem vektoru $(0,u_1,u_2,....,u_n)$.

Z předchozího tedy vyplývá, že můžeme psát

(2.25) $$|\boldsymbol{G}|=[g'(u)]^{n+1}\cdot|\boldsymbol{U}|\,.$$

Odtud je patrné, že i když jsou obecně hodnoty determinantů $|\boldsymbol{U}|$ a $|\boldsymbol{G}|$ různé, zachovává po transformaci (spojitou rostoucí funkcí) determinant $|\boldsymbol{G}|$ znaménko souhlasné s původním $|\boldsymbol{U}|$.

<u>Poznámka - případ lineární transformace</u>

Zvolme nejjednodušší spojitou rostoucí transformační funkci, kterou je lineární funkce (s kladným koeficientem u lineárního členu), tedy $g(u) = au + b$, s konstantami $a > 0$, b. Pak zřejmě platí

(2.26) $$\frac{\partial g(u)}{\partial x_r} = a \cdot u_r \text{, resp. } \frac{\partial^2 g(u)}{\partial x_r \partial x_s} = a \cdot u_{rs}.$$

Znamená to tedy, že jak mezní užitek, tak prvky matice 2. parciálních derivací se od původních prvků matice $\boldsymbol{U}$ liší pouze vynásobením kladnou konstantou a. Příslušný determinant $|\boldsymbol{G}|$ je pak a^{n+1} - násobkem původního $|\boldsymbol{U}|$.